数学ターミナル　線型代数の発想

ダイジェスト版　**1**

理工系数学基礎科目の二本柱

基本概念：正比例

正比例

量の変換を表す方法 線型代数学

「何個買った」と「何円払った」との間で見方を変える操作

数学の文法で作文：$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1\text{円} \\ y_2\text{円} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}\text{円}/\text{個} & a_{12}\text{円}/\text{個} \\ a_{21}\text{円}/\text{個} & a_{22}\text{円}/\text{個} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1\text{個} \\ x_2\text{個} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{x}}.$$

量の変化を捉える方法 微分積分学

「何秒経つ」と「何 m 進むか」を追跡する操作

数学の文法で作文：$dx = v(t)dt$.　◀ $y = ax$ と同じ形.

線型代数学のねらい

● 線型代数学とは，どんな内容を扱う数学なのでしょうか?

簡単にいうと，中学数学で学習した連立方程式を発展させた数学です．

「何個買う (入力)」から「何円払う (出力)」を探る

代わりに

「何円払う (出力)」から「何個買う (入力)」を探る．

何のために ？

理工系，経済・経営などで扱う問題では，未知数は ２個，３個ではなく，何十個，何百個，何千個，何万個，. . . もあるので，連立方程式の解き方を工夫する必要があります．

連立１次方程式の理論

(あとで「1 次」は「線型」という用語に関わることを知る)

二つの解法

未知数が多いとき
数値解析に応用

図形的意味

式の姿（イメージ) を
見る方法

数・式と図形との結びつき

連立１次方程式の解法(ダイジェスト版**1–15**),連立１次方程式の図形的意味(**16–30**)を理解しますが,「数・式を図形で見る」とはどういうことでしょうか ？

▶ この事情を知るために，連立１次方程式とは直接関係ありませんが，つぎの２問を考えてみましょう．

Q1　高校数学で学習する $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ $(a \geqq 0,\ b \geqq 0)$ を取り上げます．

- 左辺と右辺は，それぞれ「何平均」というかを思い出してください．
- 「これらの大小関係が成り立つのはあたりまえだ」と一目でなっとくできるように，この不等式の姿を描いてください．

★ ３分間 考えてわからなかったら 本書 p.x（目次の左側のページ）を見よ．

人の名前を知っても，顔が思い浮かばないと，その人をイメージできないのと同じです．

★ 本書 p.x（目次の左側のページ）

右辺に $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ があることから,

左辺の a を $\sqrt{a}\sqrt{a}$, b を $\sqrt{b}\sqrt{b}$

と表してみます.

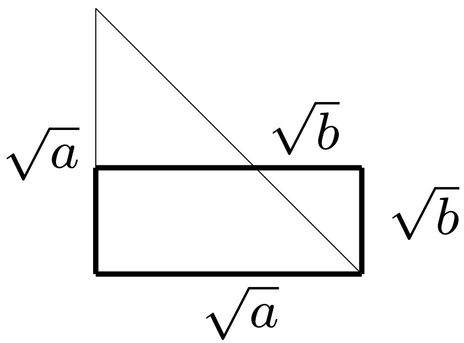
右辺は辺の長さが $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ の長方形の面積,

左辺は辺の長さが $\sqrt{a}$ の直角二等辺三角形と $\sqrt{b}$ の

直角二等辺三角形の面積の合計

であることに気づきます.

この図形が相加平均・相乗平均の不等式の姿です.



$$\frac{1}{2}\sqrt{a}\sqrt{a}+\frac{1}{2}\sqrt{b}\sqrt{b} \geqq \sqrt{a}\sqrt{b}.$$

Q2　正三角形で構成した図形（図 1）を使って，無限等比級数

$$\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots\left(\frac{1}{4}\right)^n+\cdots$$

の値を求めてください．

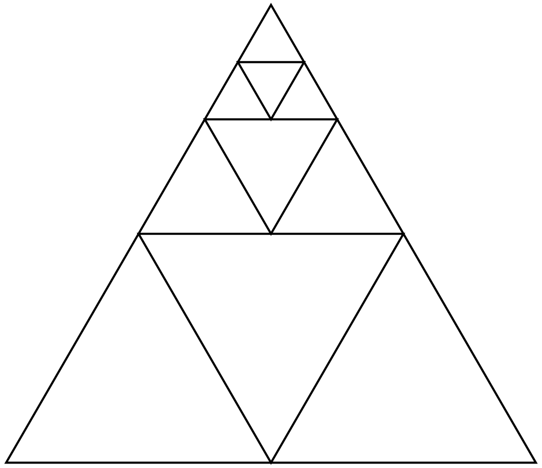
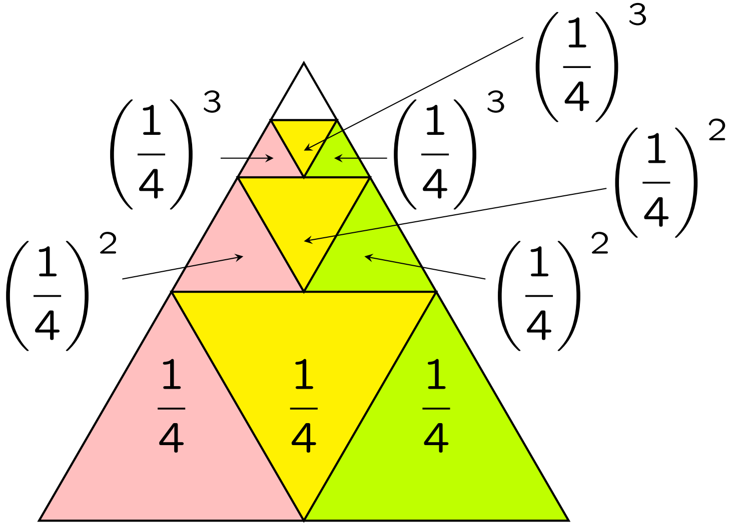


図 1

★ 3 分間 考えてわからなかったら，つぎのページを見よ．



最も大きい正三角形の面積（比の値）を１とすると，この正三角形に

$$\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots\left(\frac{1}{4}\right)^n+\cdots$$

の面積の図形［作図の都合で $(1/4)^3$ までしか描いていない］が３通りあるから，

$$\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots\left(\frac{1}{4}\right)^n+\cdots=\frac{1}{3}.$$

２問を通じて

「数学＝計算」ではなく，

イメージが大切であること

を理理解したでしょうか？

参考　内部に自分自身の相似形を含む図形をフラクタル図形といいます．

● ０章，１章で連立１次方程式の解法に習熟し，

２章から６章までで連立１次方程式とその解の姿を目で見えるように

します．

数学の流儀

中学・高校数学では，問題の解き方に集中して，数学の文法を十分に学ぶ機会は少ないと思います．

「数学は記号の科学」ですから，大学数学では記号（文字）の使い分けで意味のちがいを表します．

▶ つぎの問題に正しく答えることができるでしょうか?

Q3　$\log x$ と $logx$ とのちがいを答えてください．

★ 30秒間 考えてわからなかったら，つぎのページを見よ．

★ 本書 pp.2 – 3, p.4 自習

$$\log x \text{ は「}x\text{ の対数」}$$

$$logx \text{ は「}l \times o \times g \times x\text{」}$$

を表します．どうして，このようなちがいがあるのでしょう？

重要　文字の使い分け

立体（ローマン体）　　関数 log, sin など　単位 m, kg など

斜体（イタリック体）　数 $a = 5$　量 $S = 3$ cm^2　（cm は単位だから立体）

注意　$\ell = 4$ m の m は「メートル」という単位を表します．

$m = 3$ kg の m は「質量」という量を表します．

同じアルファベットでも，字体で意味のちがいが読み取れます．

線型代数学ではベクトルを使いますから，その記号を覚えましょう．

ボールド体　$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$　「数の組」をベクトル（数ベクトル）といいます．

$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$　括弧内の c は -2，5 などの数を表すので，斜体で書きます．

- 左辺の $\boldsymbol{c}$ は見にくいかもしれませんが，太文字（ボールド体）で書いています．
- 右辺の括弧内の c は細文字です．

$\boxed{\text{参考}}$　手書きの場合，太文字（ボールド体）は $\boldsymbol{c}$ の代わりに $\mathbb{c}$ のように書きます．

★ 本書 p.27 注釈欄

★ $\mathbb{a}$，$\mathbb{b}$，$\mathbb{d}$，$\mathbb{x}$，$\mathbb{y}$ などの書き方を練習してください．

Q4 ピリオドの意味を三つ以上答えてください．

★ 30 秒間 考えてわからなかったら，つぎのページを見よ．

★ 本書 p.3

① 文末

$t = 2$ のとき
$$3t = 6$$
ではなく

$t = 2$ のとき
$$3t = 6.$$
が正しい書き方です．式も文ですから，式が文末の場合にピリオドが必要です．

② 小数点

③ 略号

p.3　　page

pp.5 − 7　　pages（複数形）

Q5　つぎの等号の意味を読み取ってください．

① $5+9=14$　② $2x=6$　③ $4x+3x=7x$
④ $f(x)=3x+7$　⑤ $f(2)=13$　⑥ $y=f(x)$

★ 30秒間 考えてわからなかったら，つぎのページを見よ．

★ 本書 p.3

$\boxed{\text{等号}}$　２本の平行線の幅は永遠に等しいから ＝ と表します.

① $5 + 9 = 14$　計算結果

② $2x = 6$　方程式（x が特定の値のとき成り立つ等号）

③ $4x + 3x = 7x$　恒等式（x の値に関係なく成り立つ等号）

④ $f(x) = 3x + 7$　関数 f の定義（線型代数学で重要）

⑤ $f(2) = 13$　関数値を計算した結果（線型代数学で重要）

⑥ $y = f(x)$　「x の値を入力すると y の値を出力する」という因果律

次回のための予習　本書0.2節

線型代数の骨組

① 数と量の概念

② 旧法則保存の原理

③ 類別と対応

④ 関数の概念　（「関数＝式」ではない）