数学ターミナル　**線型代数の発想**

**ダイジェスト版　10**

## $\boxed{\text{行列式の性質}}$ ★ 本書1.6.2項

● $\boxed{\text{前回}}$の講義で定義した２次,３次の行列式に**共通の特徴**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= +a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

のそれぞれの項がどちらの符号(正号，負号)になるのでしょうか ？

● $n$次の行列式 $(n > 3)$ を**簡単に計算する方法**

## ２次の行列式の特徴

★ 本書 pp.90 − 93

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

基本の順列　１　２

| | | | 基本の順列に並べ換える互換 | | 符号 |
|---|---|---|---|---|---|
| 行番号 | １ | ２ | 行番号は基本の順列に固定 | | |
| 列番号 | １ | ２ | ０回（偶数回） | | ＋ |
| | ２ | １ | １回（奇数回） | ２　１ $\longrightarrow$ １　２ | − |

意味：２　１の特徴は「奇数回の互換で１　２になるような並び方」

## ３次の行列式の特徴

★ 本書 pp.90 – 93

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

$$
= +a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
= {} & +a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\
& -a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} \\
& +a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.
\end{aligned}
$$

**問題１** つぎの互換の回数と各項の符号とを調べてください．

基本の順列　１　２　３

| | | | | 基本の順列に並べ換える互換 | | 符号 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 行番号 | １ | ２ | ３ | 行番号は基本の順列に固定 | | |
| 列番号 | １ | ２ | ３ | ０回（偶数回） | | ＋ |
| | １ | ３ | ２ | １回（奇数回） | １　３　２ $\longrightarrow$ １　２　３ | − |
| | ２ | １ | ３ | | | |
| | ２ | ３ | １ | | | |
| | ３ | １ | ２ | | | |
| | ３ | ２ | １ | | | |

意味：１　３　２の特徴は「奇数回の互換で１　２　３になるような並び方」

解

基本の順列　１ ２ ３

| | | | | 基本の順列に並べ換える互換 | | 符号 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 行番号 | 1 | 2 | 3 | 基本の順列に固定 | | |
| 列番号 | 1 | 2 | 3 | 0回(偶数回) | | + |
| | 1 | 3 | 2 | 1回(奇数回) | 1 3 2 $\longrightarrow$ 1 2 3 | − |
| | 2 | 1 | 3 | 1回(奇数回) | 2 1 3 $\longrightarrow$ 1 2 3 | − |
| | 2 | 3 | 1 | 2回(偶数回) | 2 3 1 $\longrightarrow$ 3 2 1 $\longrightarrow$ 1 2 3 | + |
| | 3 | 1 | 2 | 2回(偶数回) | 3 1 2 $\longrightarrow$ 3 2 1 $\longrightarrow$ 1 2 3 | + |
| | 3 | 2 | 1 | 1回(奇数回) | 3 2 1 $\longrightarrow$ 1 2 3 | − |

意味：３ １ ２の特徴は「偶数回の互換で１ ２ ３になるような並び方」

$\boxed{\text{まとめ}}$

列番号が

奇置換のとき　負号 $(-1)$,

偶置換のとき　正号 $(+1)$.

符号関数　**例**　$\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -1.$　　$\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} \text{基本の順列} \\ \text{実際の順列} \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \underbrace{\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{+1} a_{11}a_{22} + \underbrace{\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{-1} a_{12}a_{21}.$$

$\boxed{\text{参考}}$ この式で２次の行列式を定義する流儀もありますが，初学者にはこのように定義する理由（必然性）が理解しにくいかもしれません．２元連立１次方程式の解に基づいて導入すると，この難点は回避できます（ダイジェスト版 9 p.9）.

## 行列式を和の記号で表す方法（その1）

★ 本書 p.92

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \underbrace{\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{+1} a_{11}a_{22} + \underbrace{\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{-1} a_{12}a_{21}.$$

$$= \sum_{\ell_1 \ell_2} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \ell_1 & \ell_2 \end{pmatrix} a_{1\ell_1} a_{2\ell_2}.$$

和の記号の読み方：$\ell_1 \ell_2$ のあらゆる順列についての和

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\ell_1 \ell_2 \ell_3} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \end{pmatrix} a_{1\ell_1} a_{2\ell_2} a_{3\ell_3}.$$

**参考** 計算には帰納的定義（ダイジェスト版 9 p.13）のほうが便利です．
「帰納」とは「2次,3次,4次,...のように定義を拡張する」という意味です．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \sum_{\ell_1\ell_2\ell_3\ell_4} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & \ell_4 \end{pmatrix} a_{1\ell_1}a_{2\ell_2}a_{3\ell_3}a_{4\ell_4}.$$

**問題２** $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ と $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$ の符号を調べてください.

$\boxed{\text{解}}$

$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ の符号

列番号　$4\ \ 3\ \ 1\ \ 2 \longrightarrow 1\ \ 3\ \ 4\ \ 2 \longrightarrow 1\ \ 3\ \ 2\ \ 4 \longrightarrow 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4$

互換が３回だから負号です.

$a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$ の符号

列番号　$2\ \ 3\ \ 1\ \ 4 \longrightarrow 3\ \ 2\ \ 1\ \ 4 \longrightarrow 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4$

互換が２回だから正号です.

## 行列式とあみだくじとの関係

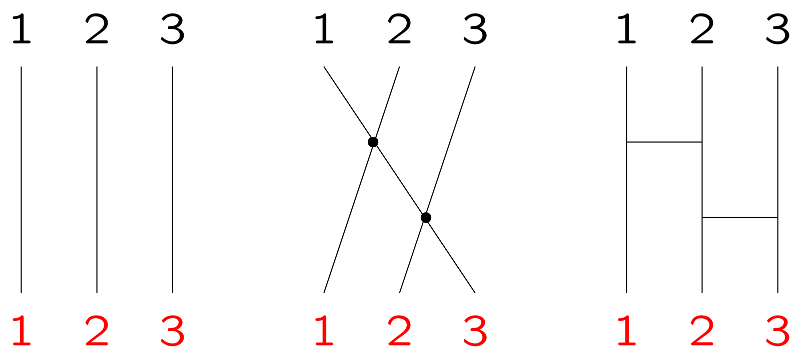
★ 本書 p.104

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$a_{13}a_{21}a_{32}$ の符号

列番号　$3\ \ 1\ \ 2 \longrightarrow 3\ \ 2\ \ 1 \longrightarrow 1\ \ 2\ \ 3 \quad \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = +1.$

互換が２回 ( 偶置換 ) だから正号です.




$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

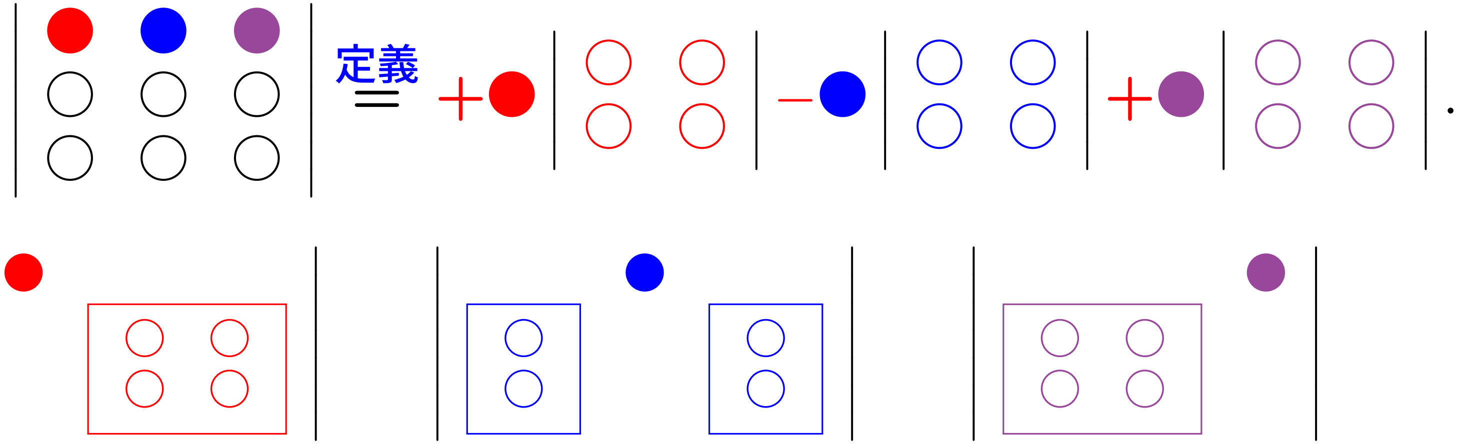
線分 1–3, 2–1, 3–2 を引き,

線分どうしの交点をよこ線に置き換えます.

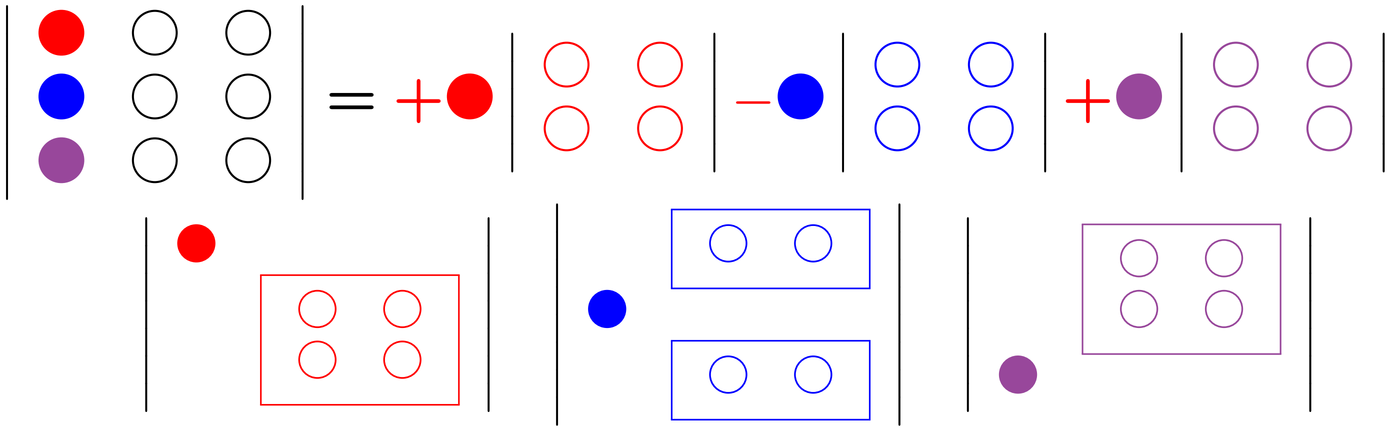
よこ線は互換を表し, 偶数本だから偶置換です.

## 行展開と列展開

行展開




列展開



★本書 pp.95 − 96

**Q1**　どんなときに行展開と列展開とのどちらを使うと便利でしょうか?

**例**　行展開

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 6 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \underbrace{-0\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}_{\text{計算の手間が省ける．}}$$

**例**　列展開

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 0 & 11 & 9 \\ 0 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 11 & 9 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} \underbrace{-0\begin{vmatrix} -1 & 8 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -1 & 8 \\ 11 & 9 \end{vmatrix}}_{\text{計算の手間が省ける．}}$$

## $\boxed{\text{行列式を和の記号で表す方法(その2)}}$

★ 本書 p.96

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +\boxed{a_{11}}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \boxed{a_{12}}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \boxed{a_{13}}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\boxed{a_{11}} \times \left( + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) + \boxed{a_{12}} \times \left( - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \right) + \boxed{a_{13}} \times \left( + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \right)$$

を

$$\boxed{a_{11}}\Delta_{11} + \boxed{a_{12}}\Delta_{12} + \boxed{a_{13}}\Delta_{13}$$

と表します.

**問題3** この式を和の記号で表してください.

★ 復習　$a_1 + a_2 + a_3$, スカラー積 $(a_1 \;\; a_2)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$ を和の記号で表せ.

$\boxed{\text{解}}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} a_{1k}\Delta_{1k}$ 番号，回数：$i, j, k, \ell, m, n$ ★ 本書 p.4

$\boxed{\text{参考}}$ 余因子

$$\Delta_{11} = + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_{13} = + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

$(-1)^{\text{行番号}+\text{列番号}}$

$\boxed{\text{行列式を簡単に計算する工夫}}$　簡単のために,２次または３次の行列式で感覚をつかみます.

## はじめに

**Q2**　$103 \times 97$ を暗算してください.

★ 中学数学の知識で暗算できます.

$$
\begin{aligned}
& 103 \times 97 \\
= \; & (100+3)(100-3) \\
= \; & 100^2 - 3^2 \\
= \; & 9991.
\end{aligned}
$$

★ 本書 p.99

何のために中学数学で

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

を学んだのでしょう．

行列式の性質を理解すると，行列式も簡単に計算することができます．

★ 本書 pp.100 − 101

**性質 1** $\begin{vmatrix} a+e & b+f \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ c & d \end{vmatrix}.$

$\boxed{\text{Why}}$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a+e & b+f \\ c & d \end{vmatrix} &= (a+e)d-(b+f)c \\ &= (ad-bc)+(ed-fc) \\ &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ c & d \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{自習}}$ $\begin{vmatrix} a+e & b \\ c+f & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}$ を確かめてください.

**例** $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (-1)+1 & 2 \\ (-3)+3 & 5 \end{vmatrix} = 0.$

性質２ $\begin{vmatrix} a & bs \\ c & ds \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} s \quad (s \neq 0).$

$\boxed{\text{Why}}$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & bs \\ c & ds \end{vmatrix} &= ads - bsc \\ &= (ad - bc)s \\ &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} s. \end{aligned}$$

**性質３**　行または列の交換で符号が変わる.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}. \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}.$$

**Why**

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &= ad - bc \\ &= -(bc - ad) \\ &= -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

**例**

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \\ 9 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -7 \\ 9 & -5 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{行展開}}{=} -\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}.$$

１　０　０ を第１行に移すと, 行展開が簡単になります.

性質$3'$　同じ行または列を含む行列式の値は0. **例** $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0.$

Why　性質３を使うと

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

となります．右辺を移項して

$$2\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

を２で割ります.

性質４ $\begin{vmatrix} a & b+as \\ c & d+cs \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$ ◀ ある列（または行）に他の列（または行）の $s$ 倍を足す．

Why

$$\begin{vmatrix} a & b+as \\ c & d+cs \end{vmatrix} \overset{\text{性質１}}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & as \\ c & cs \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{性質２}}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} s$$

$$\overset{\text{性質３}'}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

自習 $\begin{vmatrix} a & b \\ c+as & d+bs \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ を確かめてください．

$\boxed{\text{次回のための予習}}$

行列式の性質の使い方

行列式関数の線型性

本書 pp.100 – 103, pp.107 – 108