数学ターミナル　**線型代数の発想**

ダイジェスト版　29

$\boxed{\text{前回}}$

$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^n \text{ の計算の工夫}}$

★ 本書 pp.295 – 296

手順 1 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求める.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{\text{固有ベクトル}} = \underbrace{1}_{\text{固有値}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{\text{固有ベクトル}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}}_{\text{固有ベクトル}} = \underbrace{4}_{\text{固有値}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}}_{\text{固有ベクトル}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} 1. \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} 4.$$

手順2　左辺どうし，右辺どうしをまとめて表す．

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

記号（マトリックスの名称は大文字）で

$$AU = U\Lambda$$

と表して，両辺に右から U^{-1} （U の逆マトリックス）を掛けると

$$A = U\Lambda U^{-1}$$

となります．

★ 本書 pp.286 – 287，pp.295 – 296

手順3 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ の逆マトリックスを求める.　★ 本書 pp.132 – 134

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

とおき,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{単位マトリックス}}$$

をみたす x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} を求めます.

問題1 　左辺のマトリックスの乗法を計算して，2組の連立方程式を立ててください.

解

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x_{11}+\frac{1}{\sqrt{5}}x_{21} & \frac{1}{\sqrt{2}}x_{12}+\frac{1}{\sqrt{5}}x_{22} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x_{11}-\frac{2}{\sqrt{5}}x_{21} & \frac{1}{\sqrt{2}}x_{12}-\frac{2}{\sqrt{5}}x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

だから，２組の連立方程式

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}x_{11}+\frac{1}{\sqrt{5}}x_{21}=1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x_{11}-\frac{2}{\sqrt{5}}x_{21}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}x_{12}+\frac{1}{\sqrt{5}}x_{22}=0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x_{12}-\frac{2}{\sqrt{5}}x_{22}=1 \end{cases}$$

が成り立ちます．

問題２　これらの連立方程式を Cramer の方法で解いてください．

$\boxed{解}$

$$x_{11} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \qquad x_{12} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$x_{21} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix}} = \frac{\sqrt{5}}{3}. \qquad x_{22} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{2\sqrt{2}}{3} & \dfrac{\sqrt{2}}{3} \\ \dfrac{\sqrt{5}}{3} & -\dfrac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{検算}}$ ★ 本書 p.134 ［注意 1］

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{2\sqrt{2}}{3} & \dfrac{\sqrt{2}}{3} \\ \dfrac{\sqrt{5}}{3} & -\dfrac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}}_{U^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}}_{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

手順4 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^n$ を求める．

$$U^{-1}U = I \quad (\text{単位マトリックス})$$

に注意すると

$$\begin{aligned} A^n &= \underbrace{U\Lambda U^{-1}}_{A}\underbrace{U\Lambda U^{-1}}_{A}U\cdots U^{-1}\underbrace{U\Lambda U^{-1}}_{A} \\ &= U\Lambda^n U^{-1}. \end{aligned}$$

問題3 U，Λ^n，U^{-1} の乗法を計算して A^n を求めてください．

$\boxed{解}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^{n}}_{A^{n}}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} 1^{n} & 0 \\ 0 & 4^{n} \end{pmatrix}}_{\Lambda^{n}} \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{2\sqrt{2}}{3} & \dfrac{\sqrt{2}}{3} \\ \dfrac{\sqrt{5}}{3} & -\dfrac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}}_{U^{-1}}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{4^{n}}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{2\cdot 4^{n}}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{2\sqrt{2}}{3} & \dfrac{\sqrt{2}}{3} \\ \dfrac{\sqrt{5}}{3} & -\dfrac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{2+4^{n}}{3} & \dfrac{1-4^{n}}{3} \\ \dfrac{2-2\cdot 4^{n}}{3} & \dfrac{1+2\cdot 4^{n}}{3} \end{pmatrix}.$$

別法

★ 本書 p.293 問5.7

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} 1. \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} 4.$$

手順2　左辺どうし，右辺どうしをまとめて表す.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と表すこともできます.

手順３で $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ の逆マトリックスを求めて，手順４に進めると

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \frac{2+4^n}{3} & \frac{1-4^n}{3} \\ \frac{2-2\cdot 4^n}{3} & \frac{1+2\cdot 4^n}{3} \end{pmatrix}$$

を得ることができます．

$\boxed{\text{まとめ}}$

n 個のマトリックスの乗法が

３個のマトリックス U，Λ^n，U^{-1} の乗法に

帰着します．

マトリックスのn乗の応用例

人口の移動

★ 本書 pp.324 – 325

ある年の

都市の人口の 90% と郊外の人口の 20% が翌年の都市の人口，

都市の人口の 10% と郊外の人口の 80% が翌年の郊外の人口

になる数理モデル

表 1

地域＼年	ある年	翌年
都市	x_1	$0.90x_1 + 0.20x_2$
郊外	x_2	$0.10x_1 + 0.80x_2$

問題 4 翌年の人口分布 $\begin{pmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \end{pmatrix}$ とある年の人口分布 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ との関係をマトリックスで表してください．

$\boxed{\text{解}}$ $\begin{pmatrix} {x_1}' \\ {x_2}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.90 & 0.20 \\ 0.10 & 0.80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$

式の見方　マトリックスは数値の表として活用できます.

$$\begin{array}{cccccc} & & & \text{都市}\to\text{都市} \quad \text{郊外}\to\text{都市} & & \\ \begin{array}{c}\text{都市}\\ \text{郊外}\end{array} & \begin{pmatrix} {x_1}' \\ {x_2}' \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0.90 & 0.20 \\ 0.10 & 0.80 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c}\text{都市}\\ \text{郊外}\end{array} \\ & \text{翌年の人口} & & \text{都市}\to\text{郊外} \quad \text{郊外}\to\text{郊外} & \text{ある年の人口} & \end{array}$$

$\boxed{\text{問題5}}$　２年後の人口分布 $\begin{pmatrix} {x_1}'' \\ {x_2}'' \end{pmatrix}$ とある年の人口分布 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ との関係をマトリックスで表してください.

$\boxed{\text{解}}$

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.90 & 0.20 \\ 0.10 & 0.80 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} 0.90 & 0.20 \\ 0.10 & 0.80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}^{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}}$$

◀ 問題4

$$= \begin{pmatrix} 0.90 & 0.20 \\ 0.10 & 0.80 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

同様に，n 年後の都市の人口と郊外の人口の組は

$$\begin{pmatrix} 0.90 & 0.20 \\ 0.10 & 0.80 \end{pmatrix}^{n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

と表せます.

座標軸の選び方

★ 本書 pp.288 – 289

対角マトリックスの場合

例 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$

★ ダイジェスト版 **13** p.3(再掲)

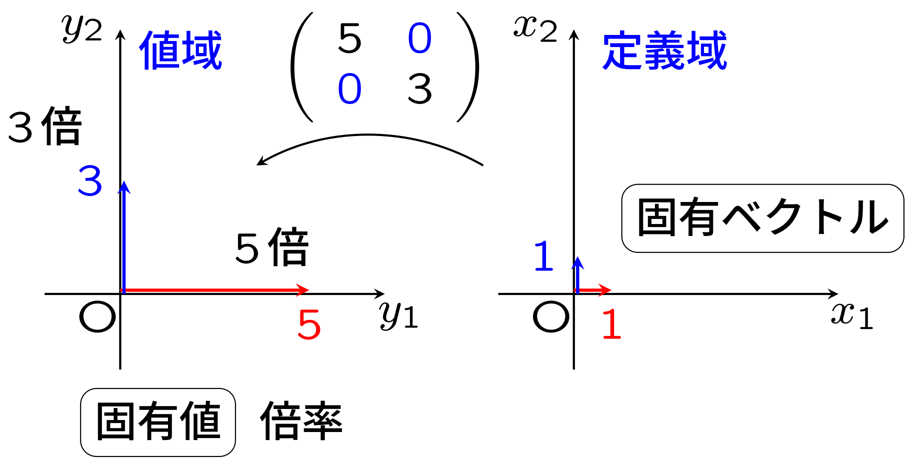
記号 $\mathbb{y} = A \mathbb{x}.$ 比例の形

同じ方向

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

同じ方向



重要 座標軸の方向の幾何ベクトルは, 対角マトリックスで方向を変えません.

対角マトリックスでない場合

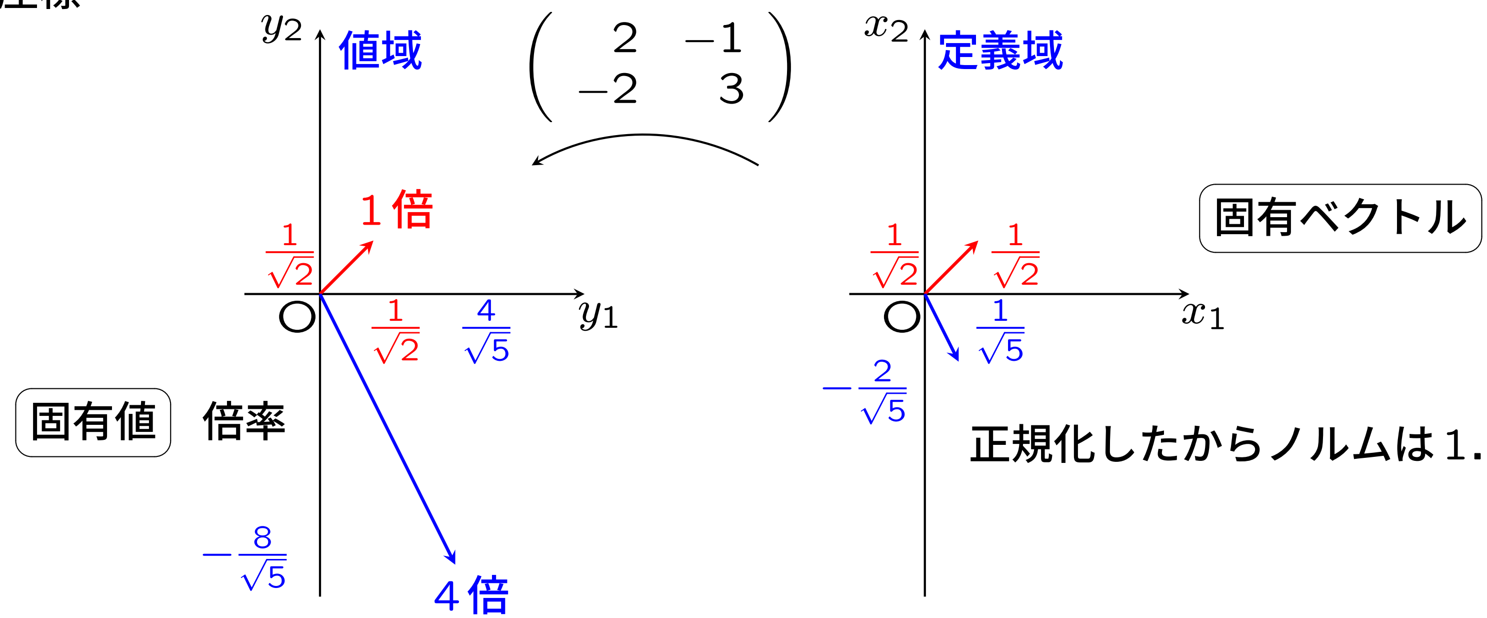
例
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

記号 $\quad \mathbb{y} \quad = \quad A \quad \mathbb{x}.$ $\qquad$ 比例の形

$$\overbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}^{\text{同じ方向}} 1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}}_{\text{同じ方向}} 4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

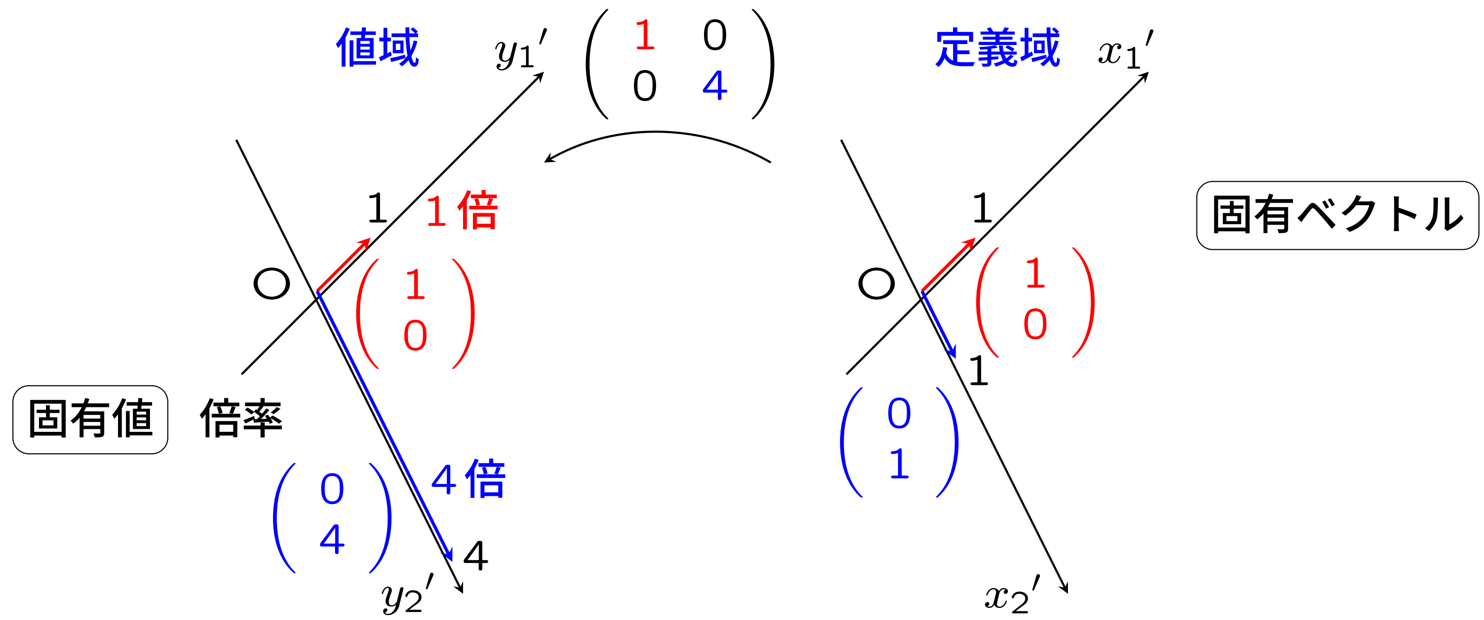
旧座標



y_2
値域
$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$
x_2
定義域
1倍
$\frac{1}{\sqrt{2}}$
O
y_1
$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{4}{\sqrt{5}}$
固有値
倍率
$-\frac{8}{\sqrt{5}}$
4倍
固有ベクトル
$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$
O
x_1
$\frac{1}{\sqrt{5}}$
$-\frac{2}{\sqrt{5}}$
正規化したからノルムは1.

対角マトリックスで座標軸の方向の幾何ベクトルが方向を変えないように座標軸を選び直します.

新座標（固有ベクトルの方向の斜交座標）



重要　座標軸の方向の幾何ベクトルは,対角マトリックスで方向を変えません.

例 $$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}.$$

記号 $\mathbb{y}' = \Lambda \mathbb{x}'.$ **比例の形**

同じ方向

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}\, 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

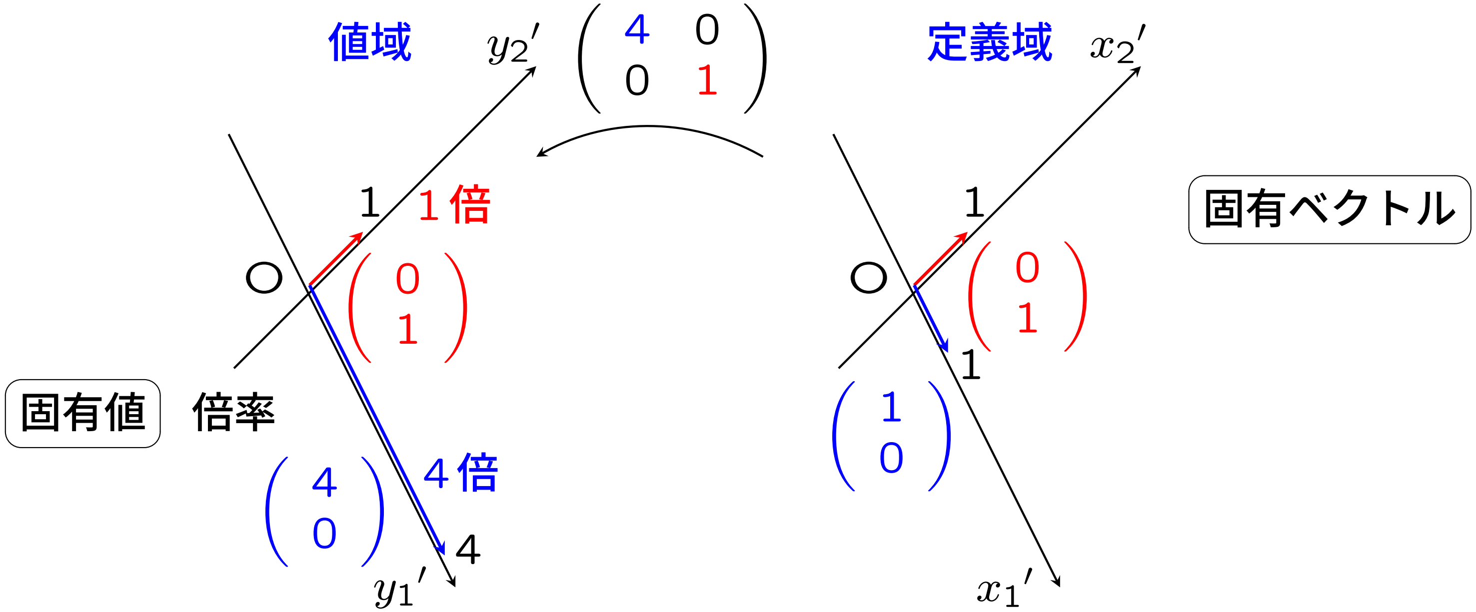
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}\, 4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

同じ方向

$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} 4$ に注意.

Q1 ２個の固有ベクトルのどちらの方向の座標軸を y_1' 軸とするのでしょうか ？

新座標（固有ベクトルの方向の斜交座標）



重要　座標軸の方向の幾何ベクトルは，対角マトリックスで方向を変えません．

問題6　$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のうつり先を確かめてください．

$\boxed{\text{解}}$

同じ方向

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 4} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} 1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

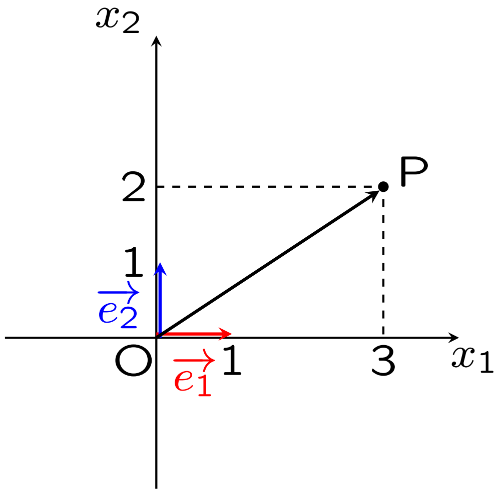
同じ方向

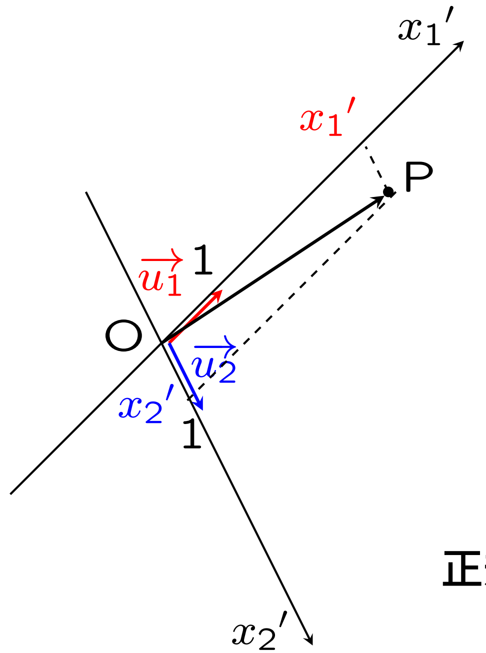
$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 4$ に注意.

Q2　斜交座標はどのように使うのでしょうか ?

問題７　直交座標系で $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ で表せる点Ｐの位置を，斜交座標系で表してください．

★ 本書 p.291





直交座標で表すと

$$\mathbb{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

正規化したからノルムは１である．

★ $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{e_1}x_1 + \overrightarrow{e_2}x_2 = \overrightarrow{u_1}{x_1}' + \overrightarrow{u_2}{x_2}'.$

$\boxed{\text{解}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{e_1} x_1 + \vec{e_2} x_2 = \vec{u_1} x_1{}' + \vec{u_2} x_2{}'$$

を数ベクトルで表すと

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{基底}} \underbrace{3}_{\text{座標}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{基底}} \underbrace{2}_{\text{座標}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{\text{基底}} \underbrace{x_1{}'}_{\text{座標}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}}_{\text{基底}} \underbrace{x_2{}'}_{\text{座標}}$$

となります（基底は座標軸方向のベクトル）.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}} x_1{}' + \dfrac{1}{\sqrt{5}} x_2{}' = 3 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} x_1{}' - \dfrac{2}{\sqrt{5}} x_2{}' = 2 \end{cases}$$

を $x_1{}'$, $x_2{}'$ について解きます.

$$
\begin{aligned}
{x_1}' &= \frac{8\sqrt{2}}{3}, \\
{x_2}' &= \frac{\sqrt{5}}{3}
\end{aligned}
$$

だから,斜交座標系で点Pは $\begin{pmatrix} \frac{8\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$ と表せます.

問題8

$$
\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} 2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} {x_1}' + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} {x_2}'
$$

の右辺をマトリックスと数ベクトルとの乗法で表してください.

★ 左辺は $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{解}}$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \end{pmatrix}.$$

記号 $\quad \mathbb{x} = U \mathbb{x}'.$

直交座標 斜交座標

U は固有ベクトルの並び.

$\boxed{\text{問題 9}}$ U の逆マトリックス $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}^{-1}$ で $\begin{pmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \end{pmatrix}$ を表してください.

$\boxed{\text{解}}$

$$\begin{pmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

記号 $\mathbb{x}' = U^{-1} \mathbb{x}.$

斜交座標　　直交座標

U^{-1} は固有ベクトルを並べたマトリックスの逆マトリックス.

$\boxed{\text{自習}}$

計算練習　本書 pp.297 – 301

$\boxed{\text{次回のための予習}}$

実対称マトリックスの固有値・固有ベクトル　本書 pp.305 – 306

対角化の応用　本書 pp.307 – 310