数学ターミナル　線型代数の発想

ダイジェスト版　30

前回　対角化の応用 —— マトリックスの n 乗の求め方

座標軸の選び方 —— 対角マトリックスで方向を変えない幾何ベクトルの方向の座標軸

今回　対角化の応用と座標軸の選び方

—— ２次方程式をみたす点全体の描く図形を見抜く方法

Q1　x_1x_2 平面 (よこ軸：x_1, たて軸：x_2) で

$$5{x_1}^2 - 6x_1x_2 + 5{x_2}^2 = 4$$

が表す図形を描けるでしょうか ?　★ 本書 pp.308 – 310

この図形を見抜くために工夫します.

手順１　２次方程式を**対称マトリックス**で表す.

$$5{x_1}^2 - 6x_1x_2 + 5{x_2}^2 = 4$$

を

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \diamondsuit & \spadesuit \\ \spadesuit & \heartsuit \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4$$

に書き換えます.

問題１　この対称マトリックスを求めてください.

★ マトリックスの成分 $\diamondsuit$, $\spadesuit$, $\heartsuit$ にあてはまる数を求める.

$$\begin{pmatrix} \diamondsuit & \spadesuit \\ \spadesuit & \heartsuit \end{pmatrix}$$

対称マトリックスは$\spadesuit$が同じ値.

注意　本問では$\diamondsuit$と$\heartsuit$も同じ値であるが, 本書 p.309 の例題では異なる値である.

$\boxed{\text{解}}$ $$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4.$$

★ 本書 p.308

確認

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5x_1 \\ 5x_2 \end{pmatrix} = 5{x_1}^2 + 5{x_2}^2.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3x_2 \\ -3x_1 \end{pmatrix} = -3x_1x_2 - 3x_1x_2.$$

+)

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 5{x_1}^2 - 6x_1x_2 + 5{x_2}^2.$$

$\boxed{\text{方針}}$ $$\begin{pmatrix} x_1' & x_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \spadesuit & 0 \\ 0 & \clubsuit \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = 4$$

対角マトリックス

に書き換える.

◀ ${x_1}'{x_2}'$ を含まないように座標軸を選び直すと左辺が $\spadesuit({x_1}')^2 + \clubsuit({x_2}')^2$ になる.

手順２ $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求める.

問題２　２組の固有値・固有ベクトルを求め,

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}}_{\text{固有ベクトル}} = \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}}_{\text{固有ベクトル}} \underbrace{\lambda_1}_{\text{固有値}}, \quad \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}_{\text{固有ベクトル}} = \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}_{\text{固有ベクトル}} \underbrace{\lambda_2}_{\text{固有値}}$$

をまとめて

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

のように表してください.

★ 固有ベクトルは正規化すると単位ベクトル (ノルムは 1) になって便利である.

$\boxed{\text{解}}$ $$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\text{固有ベクトル}} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\text{固有ベクトル}} \underbrace{\lambda}_{\text{固有値}}.$$

左辺のマトリックスと数ベクトルとの積を計算し，右辺を移項して整理すると

$$\begin{pmatrix} (5-\lambda)x_1 - 3x_2 \\ -3x_1 + (5-\lambda)x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるから，**Cramer の方法**で連立方程式

$$\begin{cases} (5-\lambda)x_1 & - & 3x_2 & = & 0 \\ -3x_1 & + & (5-\lambda)x_2 & = & 0 \end{cases}$$

を解きます．

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 5-\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix}}.$$

分母$=0$のとき，非自明解（$x_1 = 0, x_2 = 0$でない解）が求まるから

$$(5-\lambda)(5-\lambda) - (-3)^2 = 0$$

をλについて解きます．

$$\lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0.$$ 固有方程式（特性方程式）

$$(\lambda - 2)(\lambda - 8) = 0.$$

だから固有値は

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 8$$

です．

$$\begin{cases} (5-\lambda)x_1 & - & 3x_2 & = 0 \\ -3x_1 & + & (5-\lambda)x_2 & = 0 \end{cases}$$

を x_1, x_2 について解いて，解ベクトルを求めます．

$\lambda_1 = 2$ のとき

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 = 0 \\ -3x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

だから

$$1x_1 - 1x_2 = 0.$$

解は

$$\begin{cases} x_1 = t_1 \\ x_2 = t_1 \end{cases}$$

(t_1 は 0 でない実数).

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t_1.$$

$\lambda_2 = 8$ のとき

$$\begin{cases} -3x_1 - 3x_2 = 0 \\ -3x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

だから

$$1x_1 + 1x_2 = 0.$$

解は

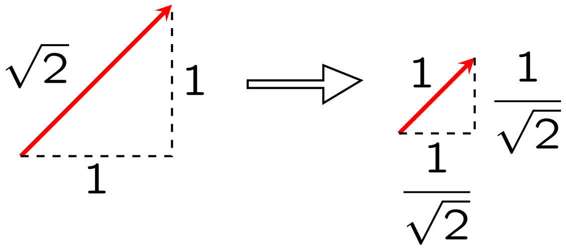
$$\begin{cases} x_1 = t_2 \\ x_2 = -t_2 \end{cases}$$

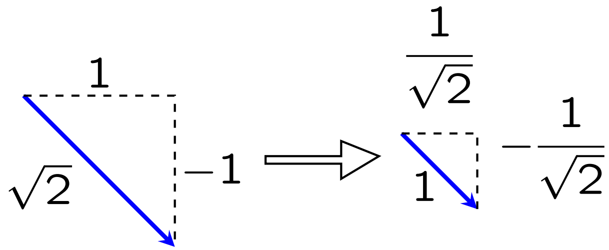
(t_2 は 0 でない実数).

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t_2.$$

正規化（ノルムを１にする操作）

★ 本書 p.287





正規化した**固有ベクトル**

$t_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を選んで　　$t_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を選んで

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{\text{固有ベクトル}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{\text{固有ベクトル}} \underbrace{2}_{\text{固有値}}, \quad \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{\text{固有ベクトル}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{\text{固有ベクトル}} \underbrace{8}_{\text{固有値}}$$

をまとめて

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

記号 $AU = U\Lambda$

のように表します.

手順3 $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ を対角マトリックスで表す.

問題3 A を U と Λ で表してください.

$\boxed{解}$

$$AU = U\Lambda$$

の両辺に右から U^{-1} を掛けると

$$AUU^{-1} = U\Lambda U^{-1}$$ ◀ U^{-1} は U の逆マトリックス.

だから

$$A = U\Lambda U^{-1}$$ ◀ $UU^{-1} = I$, $AI = A$. I は単位マトリックス.

となり,

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1}$$

です.

● つぎの手順に進む前に,マトリックス U の性質を調べます.

$$U = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathbb{u}_1 & \quad \mathbb{u}_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \end{array}$$

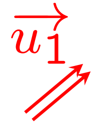
の性質

★ 本書 p.271

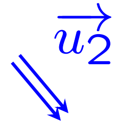
$\boxed{\text{問題4}}$ 内積 $\mathbb{u}_1 \cdot \mathbb{u}_1$, $\mathbb{u}_2 \cdot \mathbb{u}_2$, $\mathbb{u}_1 \cdot \mathbb{u}_2$ を求めてください.

$\boxed{解}$

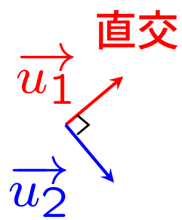
$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= 1.
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$



U の２個のタテベクトル $\mathbb{u}_1$，$\mathbb{u}_2$ は正規直交基底であることがわかります．

直交するタテベクトルを並べたマトリックスだから

U を直交マトリックス

といいます． ★ 本書 pp.274 – 275

$\boxed{\textbf{問題 5}}$ $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ の転置マトリックス ${}^tU$ を求め，
${}^tUU$ を計算してください．

★ 転置マトリックス　記号 ${}^tU$ または $U^{\star}$ 　transpose（転置）　★ 本書 p.272

$\boxed{解}$

$$U = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

の行(ヨコ)と列(タテ)とを入れ換えると

$${}^{t}U = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix}} \\ \\ \boxed{\begin{matrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

となります.

$$
\begin{aligned}
{}^tUU &= \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix}} \\ \\ \boxed{\begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

この式を見ると,

$$U\ {}^tU = I \quad (I \text{ は単位マトリックス})$$

が成り立つこともわかります．このように,マトリックス U には

転置マトリックス ${}^tU$ と逆マトリックス U^{-1} は等しい

という特徴があり,もとのマトリックスを転置すると逆マトリックスになります.

注意　どんなマトリックスも,この特徴を持つわけではありません.

手順4　２次方程式を対角マトリックスで表す.

$$5{x_1}^2 - 6x_1x_2 + 5{x_2}^2 = 4$$

を

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}}_{\text{対称マトリックス}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4$$

◀ 手順１

と書き換えたから

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}}_{\text{対角マトリックス}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4$$

◀ 手順３

記号 $U\Lambda U^{-1}$

と表せます.

$\boxed{\text{方針}}$ $\begin{pmatrix} x_1' & x_2' \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}}_{\text{対角マトリックス}} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = 4$ に書き換える.

◀ $x_1'x_2'$ を含まないように座標軸を選び直すと左辺が $2(x_1')^2 + 8(x_2')^2$ になる.

● つぎの手順に進んで図形を見抜いたあとで, 式の書き換えの意味を理解します.

手順5 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ と表す.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{U} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{問題6}}$ $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ はどのように表せるでしょうか ?

★ この式を $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \cdots$ に書き換える.

$\boxed{\text{解}}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \end{pmatrix}$$

の両辺に左から U^{-1} を掛けると

$$U^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = U^{-1} U \begin{pmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \end{pmatrix}. \quad ◀\ U^{-1}U = I \quad (I\ \text{は単位マトリックス}).$$

$$\begin{pmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{問題 7}}$ 手順４の２次方程式を $\begin{pmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \end{pmatrix}$ で表してください.

$$★ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4.$$

$\boxed{\text{解}}$

$$U^{-1} = {}^{t}U$$

に注意すると

$$\begin{pmatrix} {x_1}' \\ {x_2}' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{{}^{t}U} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

右辺：2×2 マトリックスと 2×1 マトリックスとの積

両辺を転置すると

$$\begin{pmatrix} {x_1}' & {x_2}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{U}.$$

◀ 乗法の順序に注意.

右辺：1×2 マトリックスと 2×2 マトリックスとの積

問題６で

$$\begin{pmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

だから

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4$$

は

$$\begin{pmatrix} x_1{}' & x_2{}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \end{pmatrix} = 4$$

と表せます．

$\boxed{\text{問題８}}$ 左辺を計算してください．

解

$$\begin{pmatrix} x_1{}' & x_2{}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1{}' & x_2{}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_1{}' \\ 8x_2{}' \end{pmatrix}$$
$$= 2(x_1{}')^2 + 8(x_2{}')^2.$$

問題９　２次方程式が表す図形は何でしょうか ？

★ $2(x_1{}')^2 + 8(x_2{}')^2 = 4.$

$\boxed{\text{解}}$

$$2(x_1{}')^2 + 8(x_2{}')^2 = 4$$

の両辺を４で割ると

$$\frac{(x_1{}')^2}{2} + 2(x_2{}')^2 = 1$$

となります．この式を

$$\frac{(x_1{}')^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{(x_2{}')^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1 \qquad \blacktriangleleft\ 2 = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}.$$

に書き換えると楕円であることがわかります.

Q2　$x_1{}'$軸, $x_2{}'$軸は,どのような座標軸でしょうか ？

　　これらの方向がわからないと,楕円を描くことができません.

${x_1}'$軸, ${x_2}'$軸の意味は, 手順５の

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} {x_1}' \\ {x_2}' \end{pmatrix}$$

で理解することができます.

$\boxed{\textbf{問題10}}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{U} \begin{pmatrix} {x_1}' \\ {x_2}' \end{pmatrix}$$

の左辺, 右辺を

$$\begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix} {x_1}' + \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix} {x_2}'$$

のように線型結合で表してください.

★ 本書 pp.291 – 292

$\boxed{解}$ 右辺は

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {x_1}' \\ {x_2}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}{x_1}' + \frac{1}{\sqrt{2}}{x_2}' \\ \frac{1}{\sqrt{2}}{x_1}' + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right){x_2}' \end{pmatrix}$$

だから

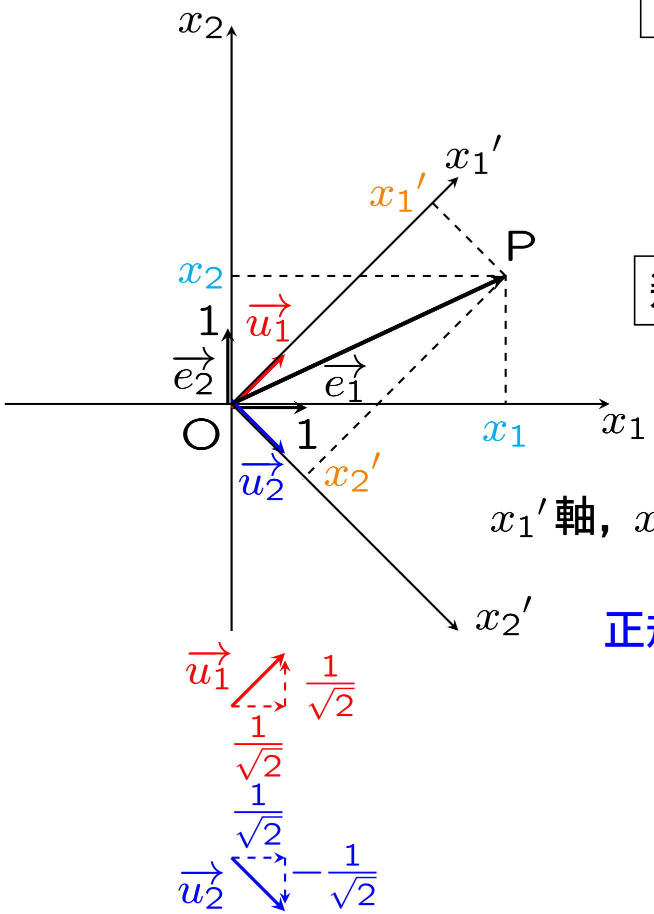
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{基底} \underbrace{x_1}_{座標} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{基底} \underbrace{x_2}_{座標} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{基底} \underbrace{{x_1}'}_{座標} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{基底} \underbrace{{x_2}'}_{座標}.$$

記号 $\mathbb{e}_1 x_1 + \mathbb{e}_2 x_2 = \mathbb{u}_1 {x_1}' + \mathbb{u}_2 {x_2}'.$

基底は座標軸方向のベクトル.

この式の意味を理解するために,幾何ベクトルを描いてみます.

点Ｐの位置



$\boxed{\text{数ベクトル}}$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} x_1' + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} x_2'.$$

x_1 軸，x_2 軸で測った表し方　　x_1' 軸，x_2' 軸で測った表し方

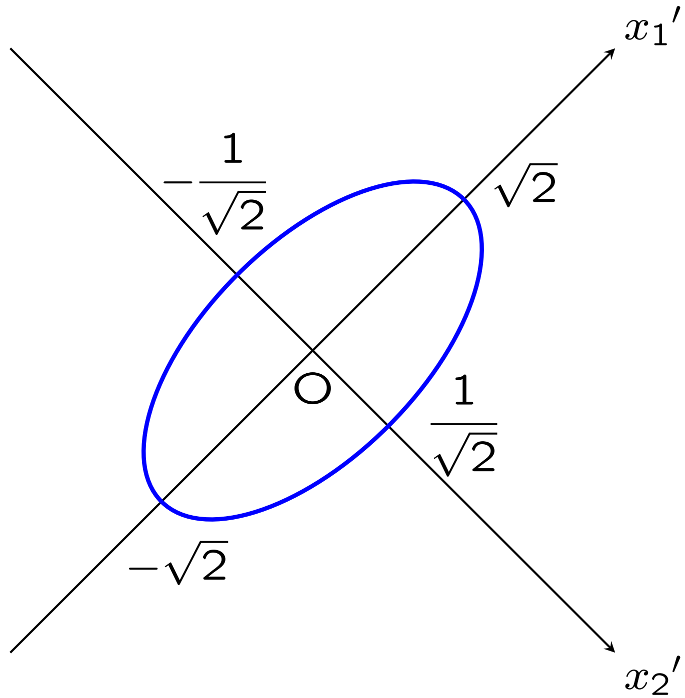
$\boxed{\text{幾何ベクトル}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{e_1} x_1 + \overrightarrow{e_2} x_2 = \overrightarrow{u_1} x_1' + \overrightarrow{u_2} x_2'.$$

x_1' 軸，x_2' 軸：固有ベクトルの方向の座標軸

正規化したからノルムは

$$\|\overrightarrow{u_1}\| = 1,$$
$$\|\overrightarrow{u_2}\| = 1.$$



$$\frac{(x_1{}')^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{(x_2{}')^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1.$$

進んだ探究　実対称マトリックスの固有値・固有ベクトル　★ 本書 pp.305 – 306