数学ターミナル　線型代数の発想

ダイジェスト版　4

前回の復習　　類別(果物別)と対応(リンゴどうし,ミカンどうし)

	Aセット	Bセット
単価	リンゴ 100円/個 ミカン 50円/個	リンゴ 80円/個 ミカン 60円/個
	x_1個	x_2個

果物別に合計金額を計算するための表し方

$$\text{量の関係：}\begin{pmatrix} y_1\text{円} \\ y_2\text{円} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100\text{円}/\text{個} \\ 50\text{円}/\text{個} \end{pmatrix} x_1\text{個} + \begin{pmatrix} 80\text{円}/\text{個} \\ 60\text{円}/\text{個} \end{pmatrix} x_2\text{個}.$$

$$\text{数の関係：}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 80 \\ 60 \end{pmatrix} x_2.$$

線型結合　　★ 本書 p.27

ベクトル量 × スカラー量 + ベクトル量 × スカラー量　　ベクトル × スカラー + ベクトル × スカラー

ねらい

スカラー積とマトリックスの意味と使い方

- スカラー積とスカラー倍とのちがいは何か?

- 比例の拡張

★ 今回のねらいは，ダイジェスト版 **2** p.5 旧法則保存の原理と関わっています.

$$\text{量の関係：}\begin{pmatrix} y_1\text{円} \\ y_2\text{円} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100\text{円/個} \\ 50\text{円/個} \end{pmatrix} x_1\text{個} + \begin{pmatrix} 80\text{円/個} \\ 60\text{円/個} \end{pmatrix} x_2\text{個}.$$

$$\text{数の関係：}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 80 \\ 60 \end{pmatrix} x_2.$$

第１成分(第１行),第２成分(第２行)を計算すると

$$\text{量の関係：}\begin{pmatrix} y_1\text{円} \\ y_2\text{円} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (100x_1 + 80x_2)\text{円} \\ (50x_1 + 60x_2)\text{円} \end{pmatrix},$$

$$\text{数の関係：}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100x_1 + 80x_2 \\ 50x_1 + 60x_2 \end{pmatrix}.$$

Q1　$+$を省略しないのに,$\times$を省略することができるのはなぜでしょうか?

$\boxed{\text{乗除先行}}$　乗法は（一つあたりいくら）$\times$（いくつ分）の意味があるから，
加法よりも結びつきが強い．

★ 本書 p.31

Stop!　$5\frac{1}{3}$ は $5+\frac{1}{3}$ と $5\times\frac{1}{3}$ とのどちらでしょうか?

$a\frac{b}{c}$ は $a+\frac{b}{c}$ と $a\times\frac{b}{c}$ とのどちらでしょうか?

$a=5$, $b=1$, $c=3$ の場合 ?

Q2　成分

$$\begin{aligned} y_1 &= 100x_1 + 80x_2, \\ y_2 &= 50x_1 + 60x_2 \end{aligned}$$

のそれぞれを一つの乗法で表すように工夫できないでしょうか?

（一つあたりいくら）×（いくつ分）を

(単価の組) × (個数の組)　　◀ 類別と対応

の形で

$$量の関係：y_1円 = \begin{pmatrix} 100円/個 & 80円/個 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1個 \\ x_2個 \end{pmatrix},$$

$$数の関係：y_1 = \begin{pmatrix} 100 & 80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

と表します．

★ 本書 p.31

問題 1　y_2円，y_2を(単価の組) × (個数の組)の形で表してください．

★ 20秒間 考えてわからなかったら，つぎのページを見よ．

$\boxed{\text{解}}$

$$\text{量の関係：} y_2\text{円} = \begin{pmatrix} 50\,\text{円}/\text{個} & 60\,\text{円}/\text{個} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\text{個} \\ x_2\text{個} \end{pmatrix},$$

$$\text{数の関係：} y_2 = \begin{pmatrix} 50 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{重要}}$ $\boxed{\text{スカラー積}}$

★ 本書 pp.30 – 31

$$\square = (\square \quad \square)\begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$$

スカラー量 = ヨコベクトル量 × タテベクトル量
スカラー = ヨコベクトル × タテベクトル

積はスカラー量またはスカラー.

スカラー量は「組でない量」　スカラーは「組でない数」

注意 $\boxed{\text{スカラー倍}}$

例

$$\begin{pmatrix} 100\ x_1 \\ 50\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix} x_1.$$

スカラーは「倍率を表す数（組でない数）」

Q3　二つの成分

$$\begin{aligned} y_1 &= 100x_1 + 80x_2, \\ y_2 &= \ 50x_1 + 60x_2 \end{aligned}$$

をまとめて一つの乗法で表すように工夫できないでしょうか**?**

二つのスカラー積

$$\text{量の関係：} y_1\text{円} = \begin{pmatrix} 100\,\text{円}/\text{個} & 80\,\text{円}/\text{個} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\text{個} \\ x_2\text{個} \end{pmatrix},$$

$$\text{量の関係：} y_2\text{円} = \begin{pmatrix} 50\,\text{円}/\text{個} & 60\,\text{円}/\text{個} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\text{個} \\ x_2\text{個} \end{pmatrix}$$

をまとめて

$$\begin{pmatrix} y_1\text{円} \\ y_2\text{円} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100\,\text{円}/\text{個} & 80\,\text{円}/\text{個} \\ 50\,\text{円}/\text{個} & 60\,\text{円}/\text{個} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\text{個} \\ x_2\text{個} \end{pmatrix}$$

と表します.

$\boxed{\text{問題２}}$　二つのスカラー積

$$\text{数の関係：}\ y_1 = \begin{pmatrix} 100 & 80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$\text{数の関係：}\ y_2 = \begin{pmatrix} 50 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

をまとめて表してください．

★ 20秒間 考えてわからなかったら，つぎのページを見よ．

$\boxed{\text{解}}$ $$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 80 \\ 50 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{重要}}$ 右辺は

$$\begin{pmatrix} \boxed{100 \quad 80} \\ \\ \boxed{50 \quad 60} \end{pmatrix}$$

のようにヨコベクトルの並びと見て

$$\begin{pmatrix} \boxed{100 \quad 80} \end{pmatrix} \text{ と } \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}} \end{pmatrix} \text{ とのスカラー積 } 100 \times x_1 + 80 \times x_2,$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{50 \quad 60} \end{pmatrix} \text{ と } \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}} \end{pmatrix} \text{ とのスカラー積 } 50 \times x_1 + 60 \times x_2$$

を計算して，これらの値を第１行，第２行に並べたタテベクトルをつくる．　★ 本書 p.32

$$\text{量の関係：}\begin{pmatrix} y_1\text{円} \\ y_2\text{円} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100\,\text{円}/\text{個} & 80\,\text{円}/\text{個} \\ 50\,\text{円}/\text{個} & 60\,\text{円}/\text{個} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\text{個} \\ x_2\text{個} \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{タテベクトル量} = \text{マトリックス量} \times \text{タテベクトル量}}$$

ベクトル量は「量の組」　ベクトルは「数の組」

マトリックス量は「量の並び」　マトリックスは「数の並び」

$$\text{数の関係：}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 80 \\ 50 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{タテベクトル} = \text{マトリックス} \times \text{タテベクトル}}$$

記号　$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$　手書き：$\mathbb{y} = A\mathbb{x}$

ベクトル量, ベクトル：太文字　マトリックス量, マトリックス：大文字

$$\begin{pmatrix} 100\,\text{円}/\text{個} & 80\,\text{円}/\text{個} \\ 50\,\text{円}/\text{個} & 60\,\text{円}/\text{個} \end{pmatrix}$$

のような「量の並び」をマトリックス量,

$$\begin{pmatrix} 100 & 80 \\ 50 & 60 \end{pmatrix}$$

のような「数の並び」をマトリックスといいます.

本来は「方陣」　「方」は「四角形（正方形, 長方形)」　「陣」は「並び」

$$\begin{array}{c} \text{第１行} \\ \text{第２行} \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{\qquad\qquad} \\ \boxed{\qquad\qquad} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} \text{第１列}\quad\text{第２列} \\ \begin{pmatrix} \boxed{\;} & \boxed{\;} \end{pmatrix} \end{array}$$

★ 本書 p.31[注意3]

$$\begin{pmatrix} y_1\text{円} \\ y_2\text{円} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100\,\text{円}/\text{個} & 80\,\text{円}/\text{個} \\ 50\,\text{円}/\text{個} & 60\,\text{円}/\text{個} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\text{個} \\ x_2\text{個} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 80 \\ 50 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

を記号で

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} \quad (\text{手書き：} \mathbb{y} = A\mathbb{x})$$

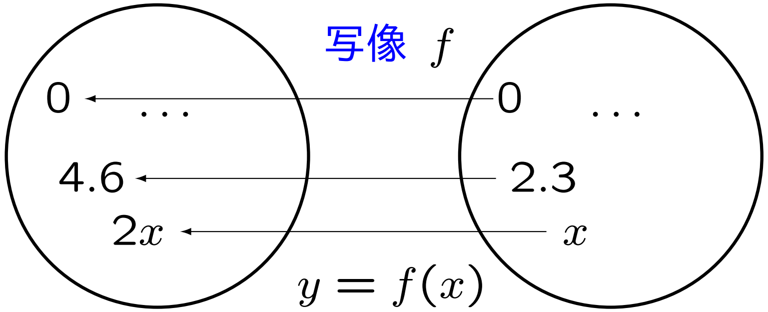
と表すと，比例

$$y = ax$$

を拡張した形であることがわかります．

★ 本書 p.24, p.32　ダイジェスト版 **3** p.6

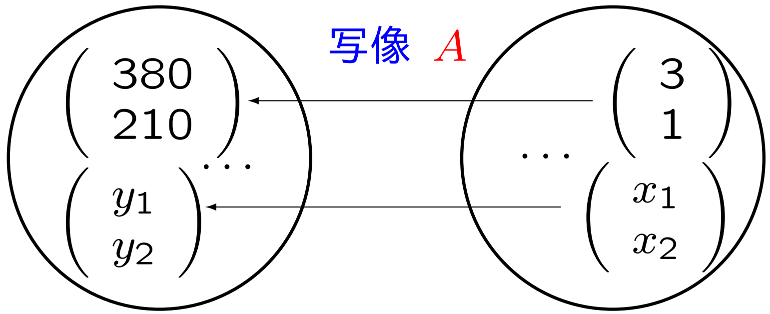
値域（出力の集合 Y）　定義域（入力の集合 X）



出力　　入力

この例では，比例 $y = 2x$.

値域（出力の集合 Y）　定義域（入力の集合 X）



数の組の集合に拡張

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 80 \\ 50 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

比例の拡張 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$（手書きでは $\mathbb{y} = A\mathbb{x}$）.

旧法則保存の原理

★ 本書 p.34　ダイジェスト版 **2** p.5

$\boxed{\text{乗法の拡張}}$

$$100\,\text{円}/\text{個} \times 2\,\text{個} = 200\,\text{円}.$$
$$\downarrow$$
$$\begin{pmatrix} 100\,\text{円}/\text{個} & 80\,\text{円}/\text{個} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\,\text{個} \\ 3\,\text{個} \end{pmatrix} = 440\,\text{円}.$$
$$\downarrow$$
$$\begin{pmatrix} 100\,\text{円}/\text{個} & 80\,\text{円}/\text{個} \\ 50\,\text{円}/\text{個} & 60\,\text{円}/\text{個} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\,\text{個} \\ 3\,\text{個} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 440\,\text{円} \\ 280\,\text{円} \end{pmatrix}.$$

スカラー量 × スカラー量 ＝ スカラー量

↓

ヨコベクトル量 × タテベクトル量 ＝ スカラー量

$\boxed{\text{スカラー積}}$

↓

マトリックス量 × タテベクトル量 ＝ タテベクトル量

$\boxed{\text{問題３}}$ $\begin{pmatrix} 100 & 80 \\ 50 & 60 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ を計算してください．

$$\begin{pmatrix} 100 & 80 \\ 50 & 60 \end{pmatrix}$$

をヨコベクトルの並びと見る．

$$\begin{pmatrix} \boxed{100 \quad 80} \\ \\ \boxed{50 \quad 60} \end{pmatrix}$$

$\left(\boxed{100 \quad 80}\right)$ と $\left(\boxed{\begin{matrix} 4 \\ 6 \end{matrix}}\right)$ とのスカラー積，

$\left(\boxed{50 \quad 60}\right)$ と $\left(\boxed{\begin{matrix} 4 \\ 6 \end{matrix}}\right)$ とのスカラー積

を計算して，これらの値を第１行，第２行に並べたタテベクトルをつくる．

★ ２分間 考えてわからなかったら，つぎのページを見よ．

$\boxed{解}$

$$\begin{pmatrix} \boxed{100 \quad 80} \\ \\ \boxed{50 \quad 60} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 4 \\ 6 \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \times 4 + 80 \times 6 \\ 50 \times 4 + 60 \times 6 \end{pmatrix} \qquad \blacktriangleleft \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} 2.$$

$$= \begin{pmatrix} 880 \\ 560 \end{pmatrix}. \qquad \blacktriangleleft \begin{pmatrix} 880 \\ 560 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 440 \\ 280 \end{pmatrix} 2.$$

比例 入力を２倍すると出力は２倍になることを確かめることができます.

$\boxed{\text{次回のための予習}}$

線型性　本書 p.33, pp.38 – 39

合成写像　本書 p.42