数学ターミナル　**線型代数の発想**

ダイジェスト版　**8**

連立１次方程式の解の特徴の判別 — 階数

★ 本書 1.5 節

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

１組の解

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 = 3 \\ 2x_1 + 6x_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 9 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

不能

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 = 6 \\ 2x_1 + 6x_2 = 4 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

不定

着眼点 $\boxed{0 \quad 0}$, $\boxed{0 \quad 0 \quad 0}$ があるかどうか?

$\boxed{\boxed{0x_1 + 0x_2} = -3}$ は成り立たないが, $\boxed{\boxed{0x_1 + 0x_2} = 0}$ は成り立つ.

$$\boxed{\begin{matrix}4&5\\3&2\end{matrix}} \to \cdots \to \boxed{\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}}$$

$$\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}$$

階段マトリックス　階数２

$$\boxed{\begin{matrix}3&9\\6&2\end{matrix}} \to \cdots \to \boxed{\begin{matrix}1&3\\0&0\end{matrix}}$$

０ ０ の行は数えない.

$$\begin{matrix}1&3\\0&0\end{matrix}$$

階数１

$$\boxed{\begin{matrix}4&5&6\\3&2&1\end{matrix}} \to \cdots \to \boxed{\begin{matrix}1&0&-1\\0&1&2\end{matrix}}$$

$$\begin{matrix}1&0&-1\\0&1&2\end{matrix}$$

階段マトリックス　階数２

$$\boxed{\begin{matrix}3&9&3\\2&6&1\end{matrix}} \to \cdots \to \boxed{\begin{matrix}1&3&2\\0&0&-3\end{matrix}}$$

$$\begin{matrix}1&3&2\\0&0&-3\end{matrix}$$

階段マトリックス　階数２

階数 (rank)

基本行操作で階段マトリックスに変形したとき $0\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0$ でない行が何行あるかを表す. $0\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0$ の行は数えない.

★ 本書 p.59

係数マトリックス　拡大係数マトリックス

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 2. \quad \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

問題 1

$$\begin{pmatrix} \boxed{\boxed{\begin{matrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{matrix}} \quad \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} \boxed{\boxed{\begin{matrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \quad \begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

の基本行操作について, 係数マトリックスの階数と拡大係数マトリックスの階数を記号で表してください.

★ 10 秒間 考えてわからなかったら, つぎのページを見よ.

$\boxed{解}$ 基本行操作で階段マトリックスに変形して,

係数マトリックス,拡大係数マトリックスに $0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0$ でない行が何行あるか

を数えます.

$$\begin{array}{cc} \text{係数マトリックス} & \text{拡大係数マトリックス} \\ \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = 1. & \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 3 & 9 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} = 2. \end{array}$$

$\boxed{\text{問題2}}$

$$\left(\boxed{\boxed{\begin{matrix}3 & 9\\ 2 & 6\end{matrix}}\quad \begin{matrix}6\\4\end{matrix}}\right) \to \cdots \to \left(\boxed{\boxed{\begin{matrix}1 & 3\\ 0 & 0\end{matrix}}\quad \begin{matrix}2\\0\end{matrix}}\right)$$

の基本行操作について，係数マトリックスの階数と拡大係数マトリックスの階数を記号で表してください．

★ 10秒間 考えてわからなかったら，つぎのページを見よ．

$\boxed{\text{解}}$　基本行操作で階段マトリックスに変形して,

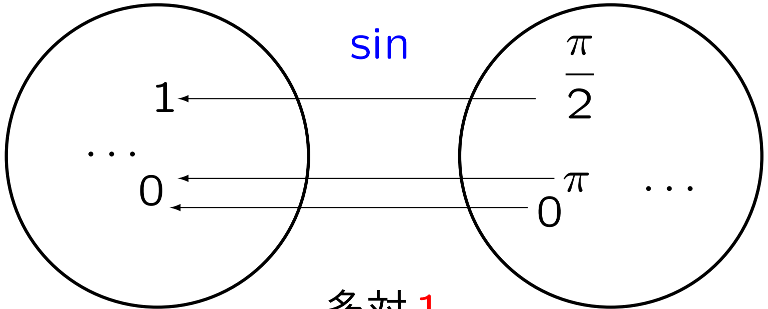
係数マトリックス,拡大係数マトリックスに $0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0$ でない行が何行あるかを数えます.

$$\begin{array}{cc} \text{係数マトリックス} & \text{拡大係数マトリックス} \\ \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = 1. & \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} = 1. \end{array}$$

$\boxed{\text{関数記号}}$

★ 本書 p.60

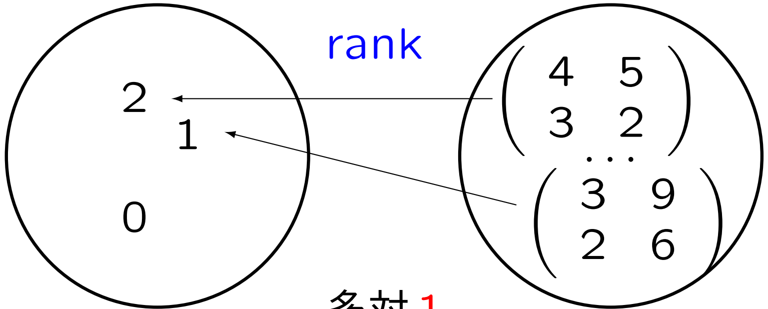
値域（出力の集合 Y） 定義域（入力の集合 X）



多対 1

例 $\sin\frac{\pi}{2}, \sin\frac{5\pi}{2}, \cdots = 1.$

値域（出力の集合 Y） 定義域（入力の集合 X）



多対 1

例 $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \cdots = 2.$

基本行操作で ０ ０でない行を数えるはたらき

まとめ

	係数マトリックス	拡大係数マトリックス	解
(1)	$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 2.$	$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2.$	1 組
(2)	$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = 1.$	$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 3 & 9 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} = 2.$	不能
(3)	$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = 1.$	$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} = 1.$	不定

ポイント１　解の存在

拡大係数マトリックスの階数
＝ 係数マトリックスの階数
のとき解は存在する．
(1), (3)

ポイント２　解の個数

拡大係数マトリックスの階数
＝ 実質的な方程式の個数
＝ 未知数の個数．(1) 解は 1 個．

拡大係数マトリックスの階数
＝ 実質的な方程式の個数
＜ 未知数の個数．(3) 解は無数．
1　3　2　の 1 行だけ．
方程式は $1x_1 + 3x_2 = 2$ だけ．

★ 本書 pp.60 – 61

Q　階数は解そのものとも関係あるでしょうか ？

例　掃き出し法で

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 9x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 1x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ 1x_1 + 0x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 1x_5 = 0 \end{cases}$$

を解いて，係数マトリックスの階数と拡大係数マトリックスの階数を求めてください．

★ 本書 p.68

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & 2 & -9 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{①と③の交換} \begin{pmatrix} {\color{red}1} & 0 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -9 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

◀ 3を1に書き換えるには?
丸数字は直前の式の番号.

$$\xrightarrow{② - ① \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ {\color{red}0} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -9 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

◀ 2を0に書き換えるには?
丸数字は直前の式の番号.

$$\xrightarrow{③ - ① \times 3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & {\color{red}1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {\color{red}0} & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

◀ 3を0に書き換えるには?
丸数字は直前の式の番号.

$$\xrightarrow{③ - ② \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {\color{red}0} & 0 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

◀ 2を0に書き換えるには?
丸数字は直前の式の番号.

$$\begin{array}{ccccc} {\color{red}1} & & {\color{red}0} & & {\color{red}0} \\ \downarrow & & \uparrow & & \uparrow \\ {\color{red}0} & & {\color{red}1} & & {\color{red}0} \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & & \uparrow \\ {\color{red}0} & & {\color{red}0} & \rightarrow & {\color{red}1} \end{array}$$

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -9 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -6 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 3. \quad \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -9 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

$$\text{拡大係数マトリックスの階数} = \text{係数マトリックスの階数}$$

だから解は存在します.

$$\begin{aligned}\text{拡大係数マトリックスの階数} &= \text{実質的な方程式の個数} \\ &< \text{未知数の個数}\end{aligned}$$

だから解は無数に存在します(不定).

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 1x_5 = 0 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 3x_4 + 1x_5 = 0 \end{cases}$$

だから

$$\begin{cases} x_1 = 3x_3 - 2x_4 - 1x_5 \\ x_2 = 0 \\ x_5 = 3x_4 \end{cases}$$

★ どの未知数に任意の実数を代入するといいかを考える.

解は

$$\begin{cases} x_1 = 3s - 2t - 1 \cdot 3t \\ \quad\;\; = 3s - 5t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = s \\ x_4 = t \\ x_5 = 3t \end{cases}$$

です.

重要　(未知数の個数) − (拡大係数マトリックスの階数) = 任意の実数の個数.

方程式の個数

$$5 - 3 = 2.$$

階数によって任意の実数の個数が決まるから,階数は解そのものにも関係あります.

★ ダイジェスト版 **24** p.23 で次元定理に発展します.

$\boxed{\text{連立1次方程式の幾何の見方}}$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

は線型結合

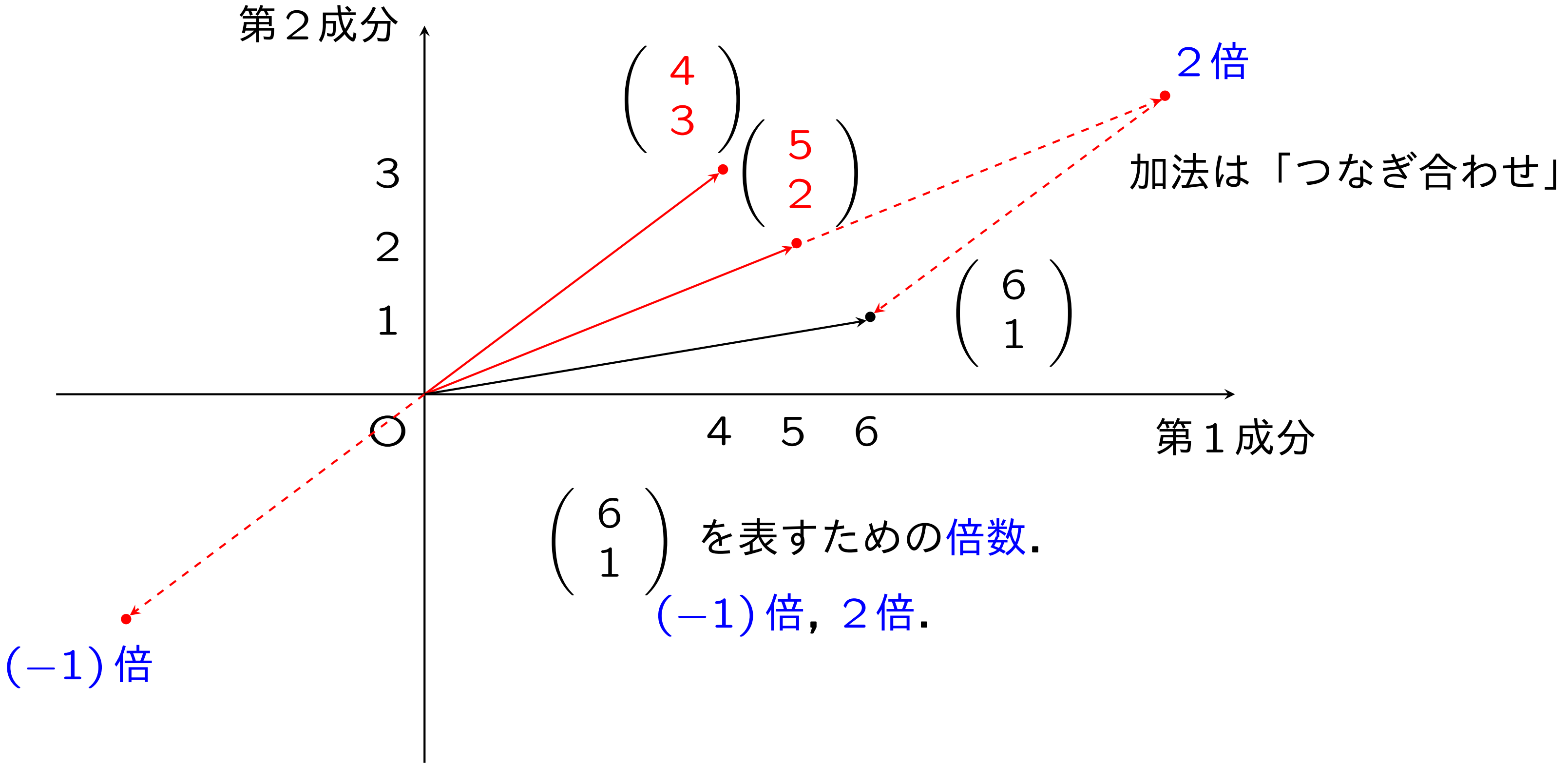
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で表すと

線型結合の結合係数 x_1, x_2 を求める問題

であることがわかります.

★ 本書 p.62



$\boxed{\text{用語}}$　● 数ベクトル　（数の組）　● 幾何ベクトル　（点という図形）

作図のため矢印を描く.

★ ダイジェスト版 **3** p.13，本書 p.26，p.55

$\boxed{\textbf{問題3}}$

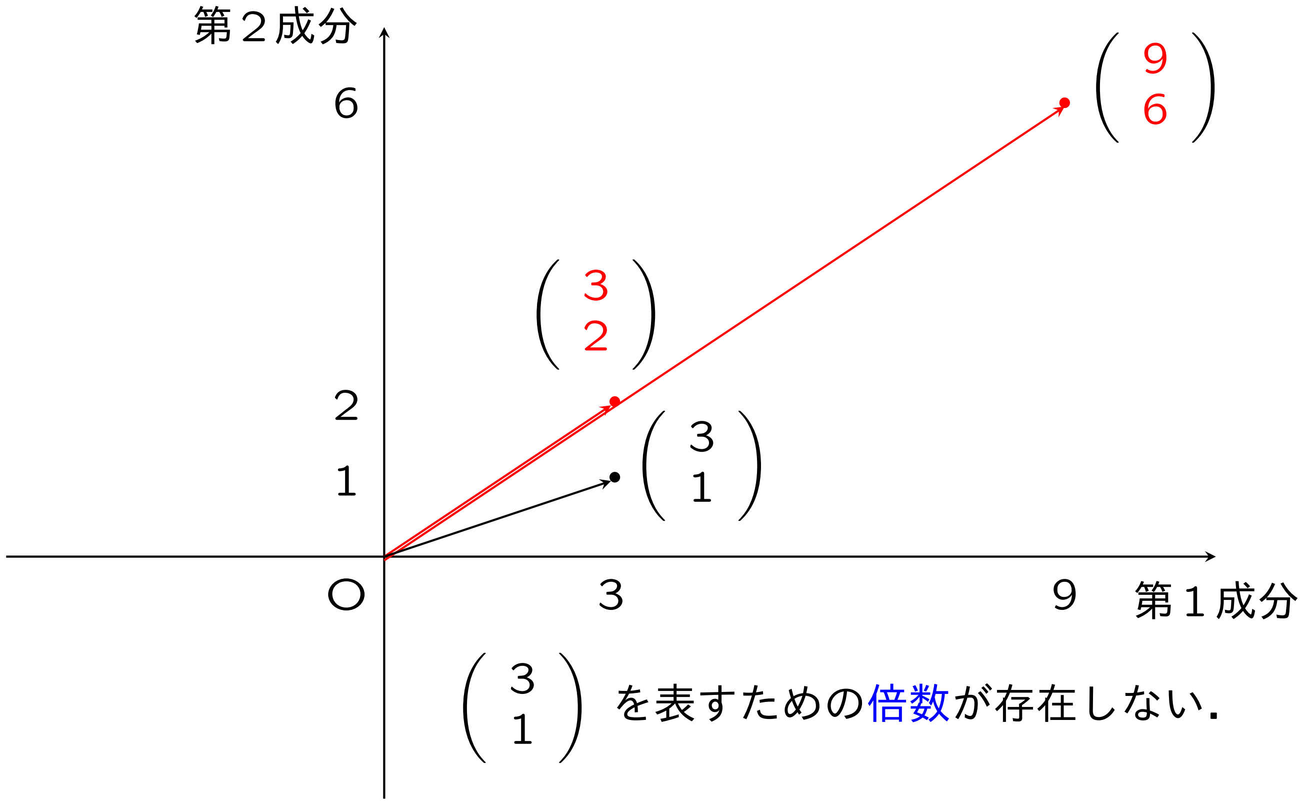
$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 = 3 \\ 2x_1 + 6x_2 = 1 \end{cases}$$

を線型結合で表して,加法とスカラー倍を作図してください.

★ 30秒間 考えてわからなかったら, つぎのページを見よ.

$\boxed{\text{解}}$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ を表すための倍数が存在しない.

$\boxed{\text{問題 4}}$

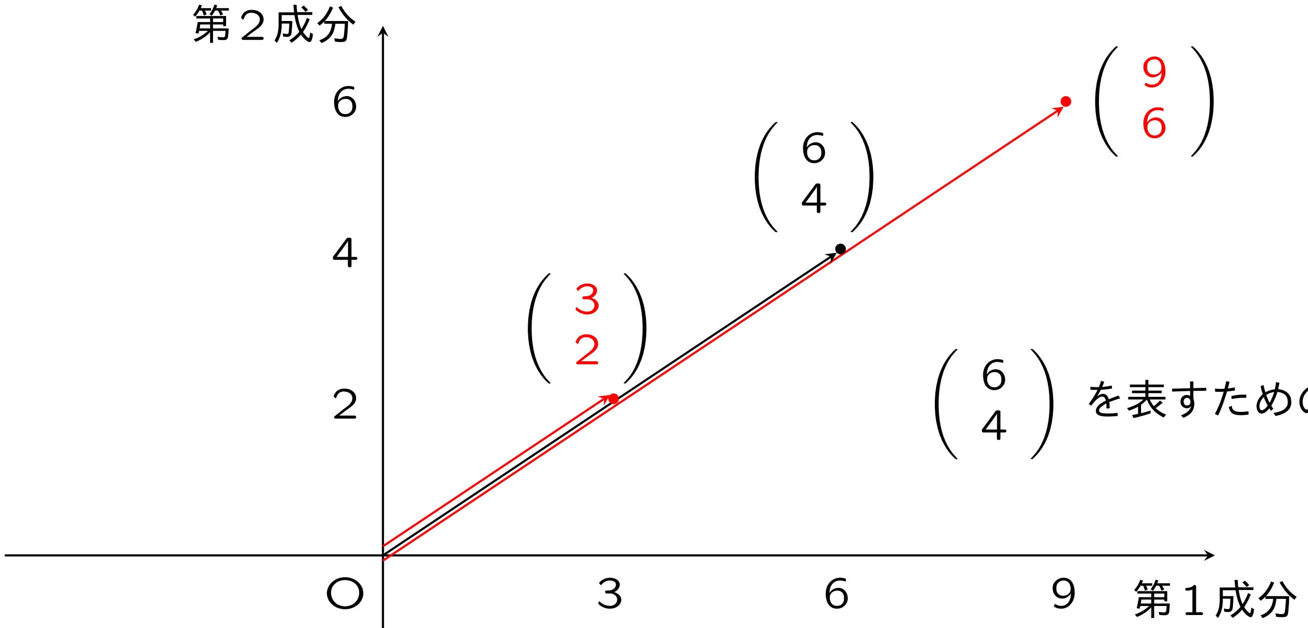
$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 = 6 \\ 2x_1 + 6x_2 = 4 \end{cases}$$

を線型結合で表して，加法とスカラー倍を作図してください．

★ 30秒間 考えてわからなかったら，つぎのページを見よ．

$\boxed{\text{解}}$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$



$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ を表すための倍数は１通りではない．

例１ $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ を -1 倍，$\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$ を１倍．　**例２** $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ を０倍，$\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$ を $\frac{2}{3}$ 倍．

$\boxed{\text{用語}}$ 線型一家 (**?**)　　★ 本書 p.62

姓	名	
線型	結合	$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.
線型	独立	$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ で表せない.
線型	従属	$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ で表せる.

線型独立性の判定

★ 本書 p.66

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \text{の解} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

線型独立

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}(-1) + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

線型独立　線型独立

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}(-1) + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

線型従属

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}(-1) + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}2 + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}(-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}0 + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

「すべての係数が0」でなくても零ベクトルがつくれる．「すべての係数が0」のとき零ベクトルになる．

線型従属　線型独立

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}(-1) + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} 2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{問題 5}}$ $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ で表せるでしょうか **?**

$\boxed{\text{解}}$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}(-1) + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}1$$

◀ 記号 $\mathbf{a}_1 c_1 + \mathbf{a}_2 c_2 = \mathbf{a}_3 c_3$.
手書きでは $\mathbb{a}_1 c_1 + \mathbb{a}_2 c_2 = \mathbb{a}_3 c_3$.

を

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}1 + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}1$$

◀ 記号 $\mathbf{a}_2 c_2 = \mathbf{a}_1(-c_1) + \mathbf{a}_3 c_3$.
手書きでは $\mathbb{a}_2 c_2 = \mathbb{a}_1(-c_1) + \mathbb{a}_3 c_3$.

に書き換えて$\dfrac{1}{2}$倍すると

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\frac{1}{2} + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}$$

◀ 記号 $\mathbf{a}_2 \dfrac{c_2}{2} = \mathbf{a}_1\left(-\dfrac{c_1}{2}\right) + \mathbf{a}_3 \dfrac{c_3}{2}$.
手書きでは $\mathbb{a}_2 \dfrac{c_2}{2} = \mathbb{a}_1\left(-\dfrac{c_1}{2}\right) + \mathbb{a}_3 \dfrac{c_3}{2}$.

と表せます.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} (-1) + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} 2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

問題 6 $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ で表せるでしょうか **?**

解

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}(-1) + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} 2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} 1$$

◀ 記号 $\mathbf{a}_1 c_1 + \mathbf{a}_2 c_2 = \mathbf{a}_3 c_3$.
手書きでは $\mathbb{a}_1 c_1 + \mathbb{a}_2 c_2 = \mathbb{a}_3 c_3$.

を

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}(-1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}(-2) + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} 1$$

◀ 記号 $\mathbf{a}_1 c_1 = \mathbf{a}_2(-c_2) + \mathbf{a}_3 c_3$.
手書きでは $\mathbb{a}_1 c_1 = \mathbb{a}_2(-c_2) + \mathbb{a}_3 c_3$.

に書き換えて(-1)倍すると

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} 2 + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}(-1)$$

◀ 記号 $\mathbf{a}_1(-c_1) = \mathbf{a}_2 c_2 + \mathbf{a}_3(-c_3)$.
手書きでは $\mathbb{a}_1(-c_1) = \mathbb{a}_2 c_2 + \mathbb{a}_3(-c_3)$.

と表せます.

線型独立性と階数との関係

★ 本書 pp.62 – 63

線型結合 $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$ 　　実質的な方程式 $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$

掃き出し法 $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 0 \quad -1} \\ \boxed{0 \quad 1 \quad 2} \end{pmatrix}$ 　拡大係数マトリックスの階数 2

　未知数の個数 2
= 実質的な方程式の個数 2
= 拡大係数マトリックスの階数 2

　結合係数の個数 2
= 線型独立なベクトルの個数 2

結合係数(未知数)が２個あるから実質的な方程式も２個ないと係数の値が求まらない.

結合係数 ２個

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} (-1) + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} 2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

線型独立なベクトル２個

結合係数 ２個

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \frac{1}{2} + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

線型独立なベクトル２個

結合係数 ２個

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} 2 + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} (-1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

線型独立なベクトル２個

質問

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} 2 + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} (-1) = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} 2 - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

のように表せますか ?

回答 これらの式の左辺は異なる演算を表します.

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} 2 \underbrace{+}_{\text{ベクトルの加法}} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \underbrace{(-1)}_{\text{ベクトルのスカラー倍}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

◀ ベクトルの線型結合

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} 2 \underbrace{-}_{\text{ベクトルの減法}} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} 2 + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} (-1) \\
= \ & \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \cdot (-1) \\ 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} \\
= \ & \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} \\
= \ & \begin{pmatrix} 10 + (-4) \\ 4 + (-3) \end{pmatrix} \\
= \ & \begin{pmatrix} 10 - 4 \\ 4 - 3 \end{pmatrix} \\
= \ & \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \\
= \ & \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} 2 - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

◀ ベクトルのスカラー倍の計算結果

◀ 数の乗法の計算結果

◀ ベクトルの加法の計算結果

◀ 代数和 [減法 $10-4$ を加法 $10+(-4)$ で表す]

◀ ベクトルの減法

◀ 計算するとき, 最初の式を減法と考えてよい.

$\boxed{\text{重要}}$ ベクトルの線型結合は

ベクトルのスカラー倍の和（加法）

です.

$5-2$　演算記号　「引く」

$5+(-2)$　符号　「マイナス」(負の数)

$\boxed{\text{代数和}}$　正の数, 負の数の加法として捉える見方

$5+2$　$(+5)+(+2)$　正の数どうしの加法

$5-2$　と書いてあっても頭の中で　$(+5)+(-2)$　正の数と負の数との加法　と読む.

$-2-3$　$(-2)+(-3)$　負の数どうしの加法

$5+2$ は加法「5 足す 2」

$5-2$ を減法と見るとき「5 引く 2」

$-2-3$ を減法と見るとき「マイナス 2 引く 3」

符号 $+$, $-$ (数の正負)　演算記号 $+$, $-$ (加法, 減法)

質問　方程式の個数が未知数の個数よりも多い場合は，どのように考えるのか？

回答　つぎの連立１次方程式を掃き出し法で解いてください．

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 = 3 \\ 1x_1 - 1x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases}$$

★ 左半分を

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

に書き換えるように計算を進める．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ \boxed{1} & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

◀ 1を0に書き換えるには?
丸数字は直前の式の番号.

$$\xrightarrow{②-①} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ \boxed{2} & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

◀ 2を0に書き換えるには?
丸数字は直前の式の番号.
②,③の x_1 を消去.

$$\xrightarrow{③-①\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{-2} & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

◀ −2を1に書き換えるには?
丸数字は直前の式の番号.

$$\xrightarrow{②\times(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

◀ 1を0に書き換えるには?
丸数字は直前の式の番号.

$$\xrightarrow{①-②} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \end{pmatrix}$$

◀ 1を0に書き換えるには?
丸数字は直前の式の番号.

$$\xrightarrow{③-②} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

◀ ①,③の x_2 を消去.

①，② の解は

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

ですが，③ は

$$0x_1 + 0x_2 = -2$$

だから矛盾します．

①，②，③ をみたす x_1，x_2 の値は存在しません．

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 2. \quad \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = 3.$$

ポイント 1　解の存在

拡大係数マトリックスの階数

$\neq$ 係数マトリックスの階数

だから解は存在しない．

つぎの連立１次方程式を掃き出し法で解いてください．

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 = 3 \\ 1x_1 - 1x_2 = 1 \\ 1x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

★ 左半分を

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

に書き換えるように計算を進める．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ \boxed{1} & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

◀ 1 を 0 に書き換えるには?
丸数字は直前の式の番号.

$$\xrightarrow{②-①} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ \boxed{1} & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

◀ 1 を 0 に書き換えるには?
丸数字は直前の式の番号.
②,③の x_1 を消去.

$$\xrightarrow{③-①} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{-2} & -2 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

◀ −2 を 1 に書き換えるには?
丸数字は直前の式の番号.

$$\xrightarrow{②\times(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

◀ 1 を 0 に書き換えるには?
丸数字は直前の式の番号.

$$\xrightarrow{①-②} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-3} & -3 \end{pmatrix}$$

◀ −3 を 0 に書き換えるには?
丸数字は直前の式の番号.

$$\xrightarrow{③+②\times 3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

◀ ①,③の x_2 を消去.

③ は

$$0x_1 + 0x_2 = 0$$

だから正しい式ですが，解を求めるときに使えません．

①，②，③ をみたす x_1，x_2 は

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

です．

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 2. \quad \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

ポイント１ 解の存在

拡大係数マトリックスの階数
= 係数マトリックスの階数
だから解は存在する．

ポイント２ 解の個数

もとの方程式の個数
> 未知数の個数．
(本問)

拡大係数マトリックスの階数
= 実質的な方程式の個数
= 未知数の個数．解は１個．

たねあかし

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 = 3 & \text{①} \\ 1x_1 - 1x_2 = 1 & \text{②} \\ 1x_1 - 2x_2 = 0 & \text{③} \end{cases}$$

$$\text{③} = \frac{1}{2} \times (\text{②} \times 3 - \text{①})$$

だから，①と②の二つの方程式しかありません．

③ はムダな方程式だったことがわかります．

つぎの連立1次方程式を掃き出し法で解いてください．

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 3 \\ 2x_1 + 0x_2 - 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + 1x_2 - 1x_3 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 5 \end{cases}$$

★ 左半分を

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

に書き換えるように計算を進める．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ \boxed{2} & 0 & -2 & -1 \\ \boxed{3} & 1 & -1 & 2 \\ \boxed{4} & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

◀ 2, 3, 4 を 0 に書き換えるには?
丸数字は直前の式の番号.

$$\xrightarrow[\text{④}-\text{①}\times 4]{\substack{\text{②}-\text{①}\times 2 \\ \text{③}-\text{①}\times 3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{-2} & -4 & -7 \\ 0 & -2 & -4 & -7 \\ 0 & -2 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

◀ −2 を 1 に書き換えるには?
丸数字は直前の式の番号.
②,③,④の x_1 を消去.

$$\xrightarrow{\text{②}\times\left(-\frac{1}{2}\right)} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{7}{2} \\ 0 & -2 & -4 & -7 \\ 0 & -2 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

◀ 1 を 0 に書き換えるには?
丸数字は直前の式の番号.

$$\xrightarrow{\text{①}-\text{②}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{7}{2} \\ 0 & \boxed{-2} & -4 & -7 \\ 0 & \boxed{-2} & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

◀ −2 を 0 に書き換えるには?
丸数字は直前の式の番号.

$$\xrightarrow[\text{④}+\text{②}\times 2]{\text{③}+\text{②}\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

◀ 丸数字は直前の式の番号.
①,③,④の x_2 を消去.

③, ④ は

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$$

だから正しい式ですが, 解を求めるときに使えません.

①, ②, ③, ④ をみたす x_1, x_2, x_3 は

$$\begin{cases} 1x_1 \quad\quad - 1x_3 = -\frac{1}{2} \\ \quad\quad 1x_2 + 2x_3 = \frac{7}{2} \end{cases}$$

を解けば求まります. $x_3 = t$ (t は任意の実数)とすると, 解は

$$\begin{cases} x_1 = t - \frac{1}{2} \\ x_2 = -2t + \frac{7}{2} \\ x_3 = t \end{cases}$$

です.

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2. \quad \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 2.$$

ポイント１　解の存在

拡大係数マトリックスの階数
＝ 係数マトリックスの階数
だから解は存在する．

ポイント２　解の個数

もとの方程式の個数
＞ 未知数の個数．
（本問）

拡大係数マトリックスの階数
＝ 実質的な方程式の個数
＜ 未知数の個数．解は無数．

たねあかし

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 3 & ① \\ 2x_1 + 0x_2 - 2x_3 = -1 & ② \\ 3x_1 + 1x_2 - 1x_3 = 2 & ③ \\ 4x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 5 & ④ \end{cases}$$

$$② = ③ - ①,$$

$$④ = ① + ③$$

だから，①と③の二つの方程式しかありません．

②，④はムダな方程式だったことがわかります．

$\boxed{\text{次回のための予習}}$

Cramerの方法　本書 1.6 節