

数学ターミナル 線型代数の発想
ダイジェスト版 16

今回から後半に進みます.

これから,どんな内容を扱うのでしょうか?

前半 (ダイジェスト版 1–15) で連立 1 次方程式の解法に習熟したので,

後半で連立 1 次方程式とその解の姿を目で見えるように
します.

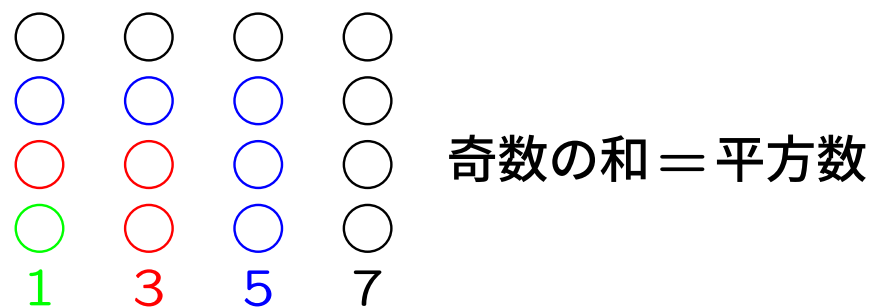
「解の姿を目で見る」とは?

連立 1 次方程式以外の単純な例を挙げてみます.

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

です. なぜ 15, 17 ではなく 16 になるのでしょうか?

$1 + 3 + 5 + 7$ の姿を見ると, 16 でないとおかしいことがわかります.



$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2.$$

主要項目

● 後半 (**ダイジェスト版 16–30**) は, どんな内容を扱うのでしょうか?

2 章 連立 1 次方程式の **図形的意味**

3 章 群・線型空間 「空間」とは「集合」

4 章 線型 **変換** 「式の変形」ではない.

5 章 固有値問題

★ 2 章の内容は, 3 章, 4 章, 5 章でも必要です.

★ 後半は前半 (**ダイジェスト版 1–15**) の復習も含みます.

数・式と図形との結びつき

● 1元1次方程式

★ 本書 p.139

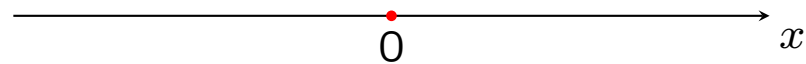
問題 1 $5x = 0$ の解集合を図で表してください.

★ 数直線は実数全体の集合 \mathbb{R} を表す図であることを思い出します.

★ 30 秒間 考えてわからなかったら, つぎのページを見よ.

解 $5x = 0$ の解は $x = 0$ だから、**解集合** は $\{0\}$ であり、要素が 1 個の集合です.

点という図形 $\overset{\text{対応}}{\longleftrightarrow}$ 数



問題 2 $0x = 0$ の解集合を図で表してください.

解 $0x = 0$ の解は**不定**だから、あらゆる実数が解です.

解集合は \mathbb{R} であり、数直線全体です.



問題 3 $0x = 3$ の解集合を求めてください.

解 解は存在しないから**不能**です.

解集合は空集合 \emptyset です.

注意 空集合は \emptyset または $\{ \}$ で表します.

$\{\emptyset\}$ は正しくありません. この記号では, 要素が \emptyset の意味になります.

まとめ

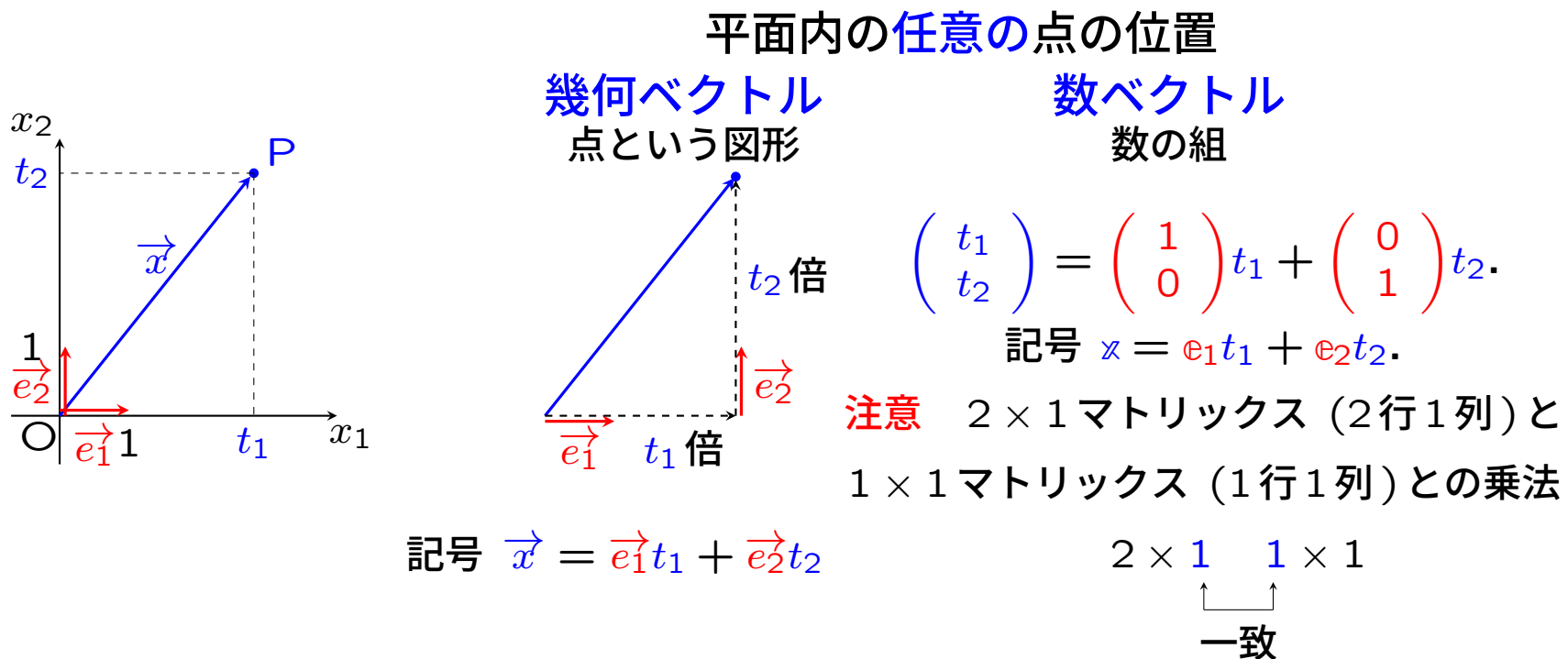
1元1次方程式	解集合	解集合を表す図形
$5x = 0$	$\{0\}$	点
$0x = 0$	\mathbb{R}	直線
$0x = 3$	$\{ \}$	存在しない.

2元連立1次方程式の図形的意味を理解するための準備

(1) 平面の表し方

★ 本書 p.141 問2.1

「平面内のあらゆる点の位置がどのように表せるか」



線型結合

★ 本書 pp.139 – 140

線型従属

一つのベクトルが他のベクトルの線型結合で表せます.

$\vec{x}, \vec{e}_1, \vec{e}_2$.

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \underset{\uparrow}{1} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \underset{\uparrow}{(-t_1)} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \underset{\uparrow}{(-t_2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

「すべての係数が0」 **でなくとも零ベクトル**が出来ます.

線型独立

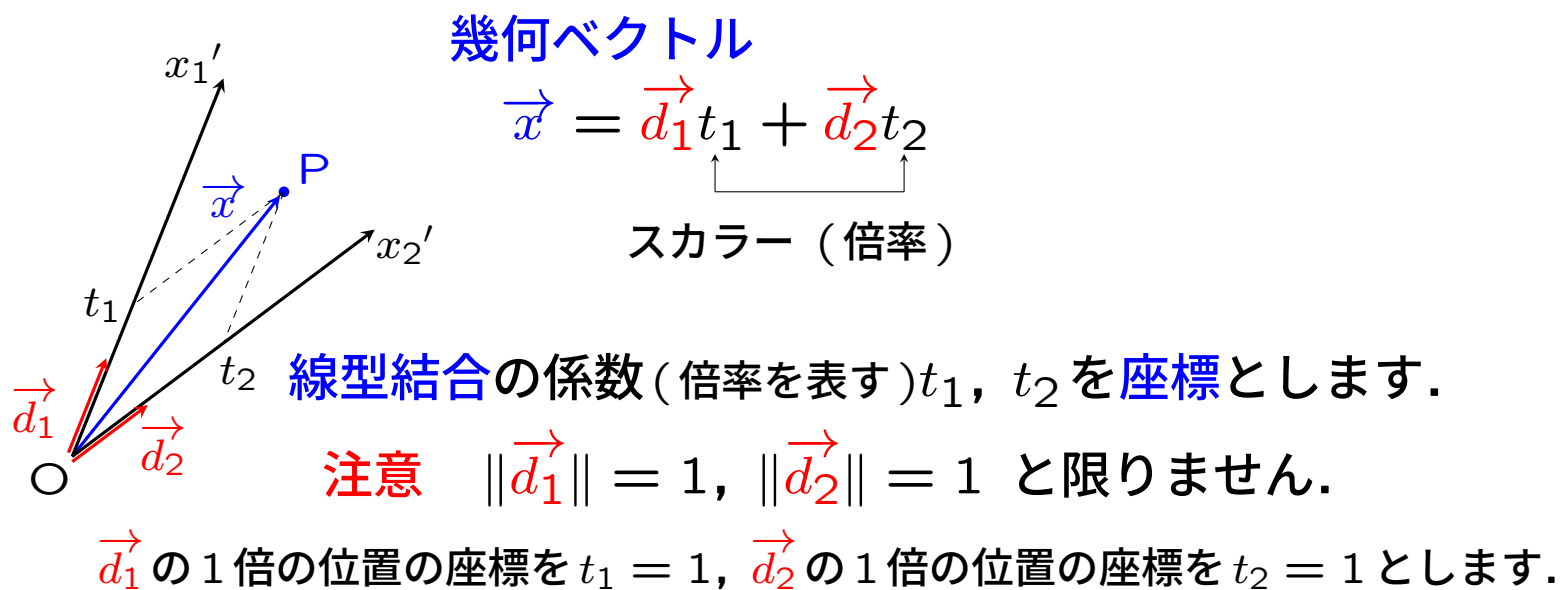
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で表せません.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \underset{\uparrow}{\square} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \underset{\uparrow}{\square} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

「すべての係数が0」 のとき **零ベクトル**が出来ます.

斜交座標

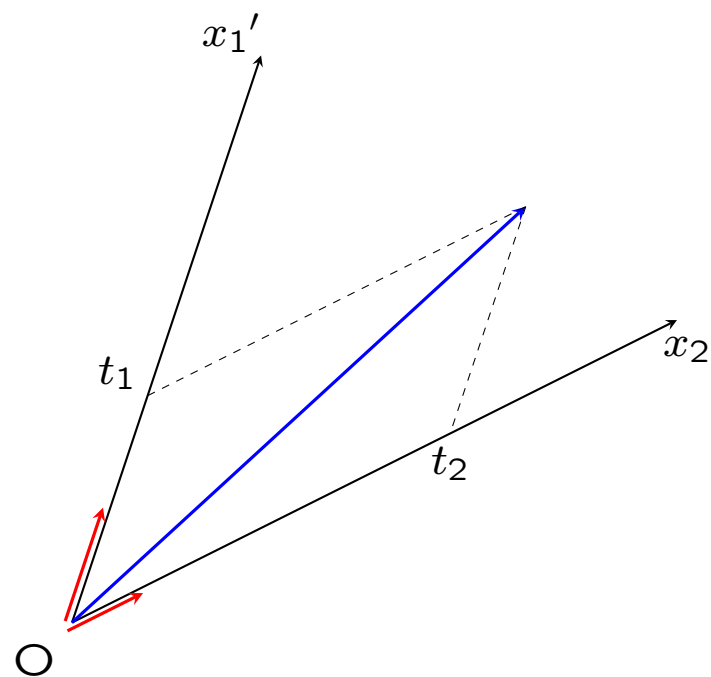
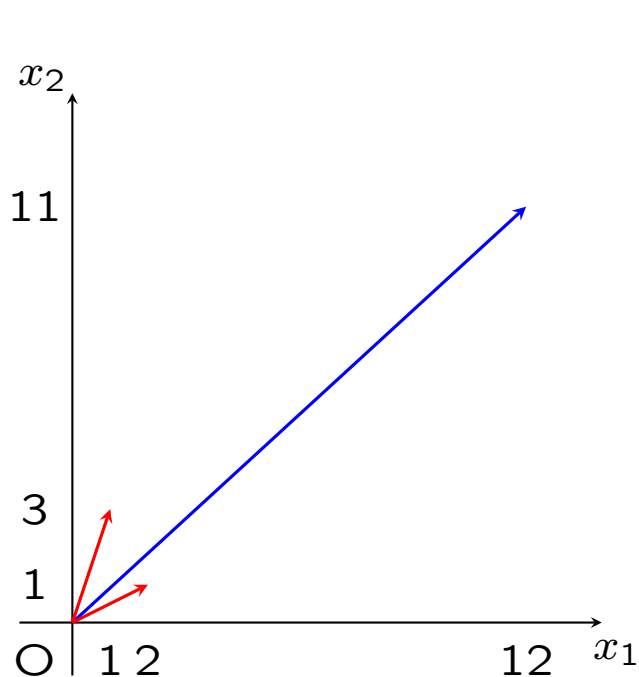
★ 本書 p.139



Q1 座標はどのようにして求めるのでしょうか?

問題 4 直交座標系で $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix}$, $\mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表せるとき,
斜交座標系で \mathbf{x} の座標 t_1, t_2 を求めてください.

★ Cramer の方法で計算すること.



復習

Cramer の方法を忘れたとき

$$2x = 3$$

の解は

$$x = \frac{3}{2} \quad \frac{\text{定数項}}{\text{係数}}$$

であることを手がかりにして発展させます.

解

$x = d_1 t_1 + d_2 t_2$ は

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t_2$$

だから, 2元連立1次方程式

$$\begin{cases} 1t_1 + 2t_2 = 12 \\ 3t_1 + 1t_2 = 11 \end{cases}$$

を t_1, t_2 について解きます.

$$\begin{aligned}
 t_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 11 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} \\
 &= \frac{12 \times 1 - 2 \times 11}{1 \times 1 - 2 \times 3} \\
 &= \frac{-10}{-5} \\
 &= 2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} \\
 &= \frac{1 \times 11 - 12 \times 3}{1 \times 1 - 2 \times 3} \\
 &= \frac{-25}{-5} \\
 &= 5.
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} 2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} 5.$$

意味 $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ の2倍と $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の5倍とをつなぎ合わせると $\begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix}$ を表せます。

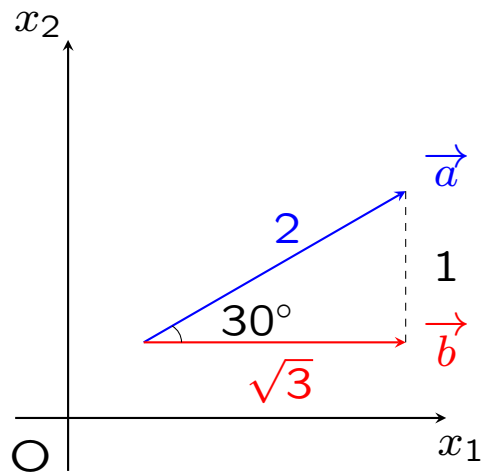
$\begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix}$ の x_1' 軸で測った座標は2, x_2' 軸で測った座標は5です。

(2) 直線の表し方

★ 本書 pp.140 – 145

「直線上のあらゆる点の位置がどのように表せるか」

準備 内積



幾何ベクトル

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos 30^\circ \\ \text{dot} \\ &= 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 3.\end{aligned}$$

数ベクトル

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{3} \times \sqrt{3} + 1 \times 0 \\ &= 3.\end{aligned}$$

$\vec{a} \perp \vec{b}$ のとき $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

「通る特定の点」と「方向」が同じ直線は1通りしかありません.

① どの点を通るか

② どの方向か $\left\{ \begin{array}{ll} \text{幾何ベクトル } \vec{d} \text{ に平行} & \text{直線のベクトル表示} \\ \text{幾何ベクトル } \vec{n} \text{ に垂直} & \text{直線の方程式} \end{array} \right.$

\vec{d} direction 方向 \vec{n} normal 垂直な

「通る特定の点」が

原点である直線の表し方

と

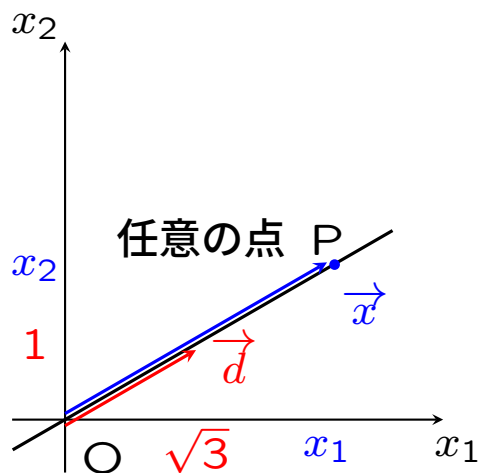
原点以外である直線の表し方

に進みます.

原点を通る直線

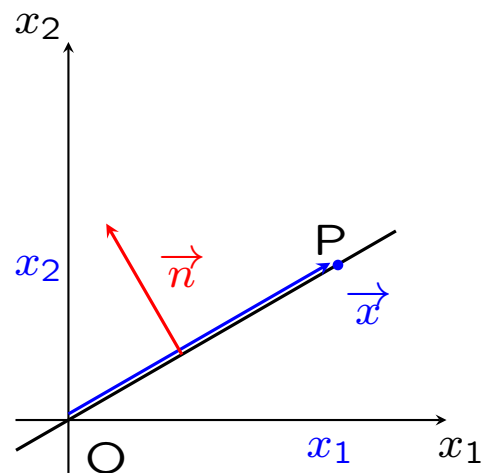
暗記するのではなく、図を描いて式で表せるように練習してください。

例



幾何ベクトル $\vec{x} = \vec{d}t$
(t は任意の実数).

数ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} t$.
直線のベクトル表示

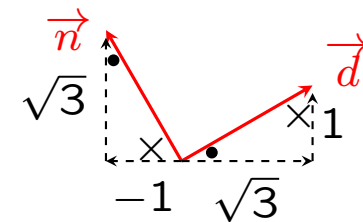


内積 $\vec{n} \cdot \vec{x} = 0$.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

$$-1x_1 + \sqrt{3}x_2 = 0.$$

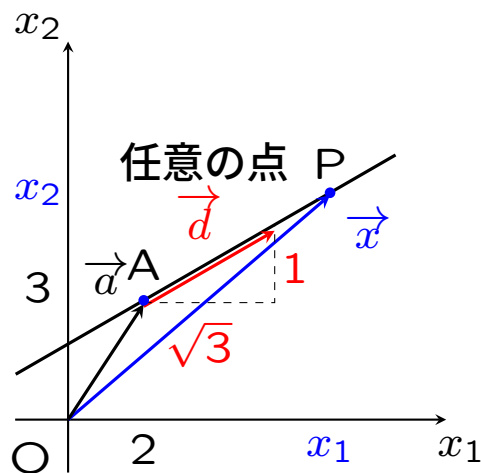
直線の方程式



原点以外の特定の点を通る直線

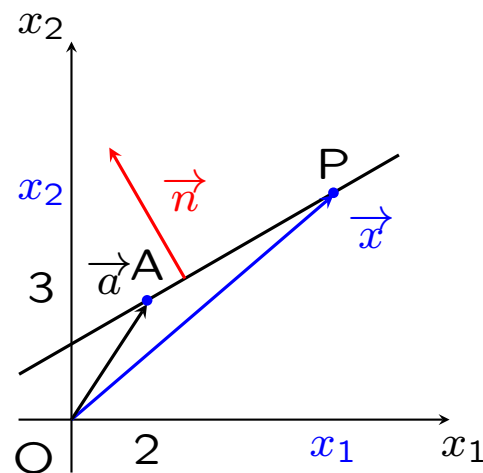
図を描いて式で表せるように練習してください。

例



幾何ベクトル $\vec{x} = \vec{a} + \vec{d}t$
(t は任意の実数).

数ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}t$.
直線のベクトル表示 通る点 平行な方向



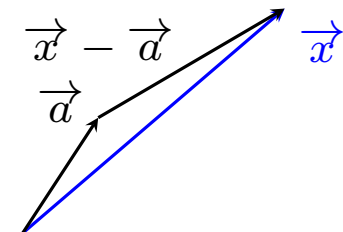
内積 $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 3 \end{pmatrix} = 0.$$

$$-1(x_1 - 2) + \sqrt{3}(x_2 - 3) = 0.$$

$$-1x_1 + \sqrt{3}x_2 = 3\sqrt{3} - 2.$$

直線の方程式



まとめ 2元1次方程式

★ 本書 p.143

直線の方程式の見方

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \uparrow \qquad \qquad \uparrow \\ -1x_1 + \sqrt{3}x_2 \end{array} = \begin{cases} 0 & (\text{原点を通る}) \\ 0 \text{ 以外} & (\text{原点を通らない}) \end{cases} \\ \text{係数 垂直な方向 } \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \uparrow \qquad \qquad \uparrow \\ -1(x_1 - 2) + \sqrt{3}(x_2 - 3) \end{array} = 0. \\ \text{通る点 } \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

直線の方程式の使い方

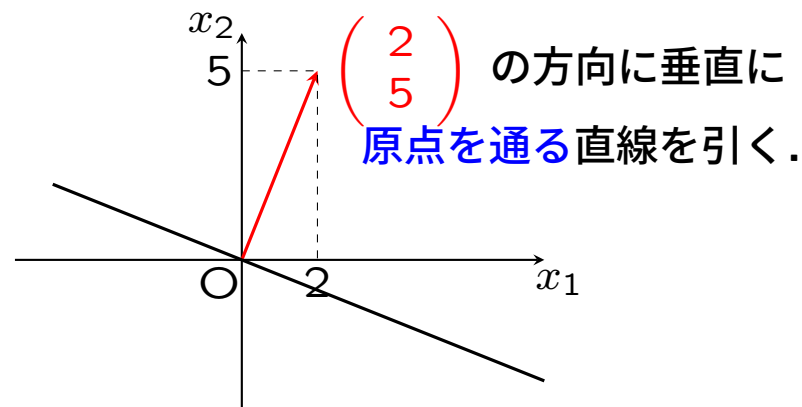
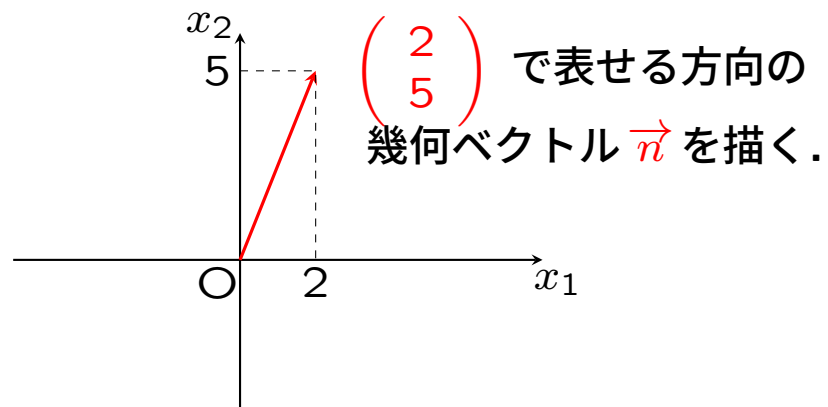
★ 本書 p.143 下から5行目

例 1 x_1x_2 平面内に直線 $2x_1 + 5x_2 = 0$ を引くとき

★ 中学数学とちがって $x_2 = \dots$ と書き換えない.

右辺の定数項が0だから「原点を通る」ことがわかり,

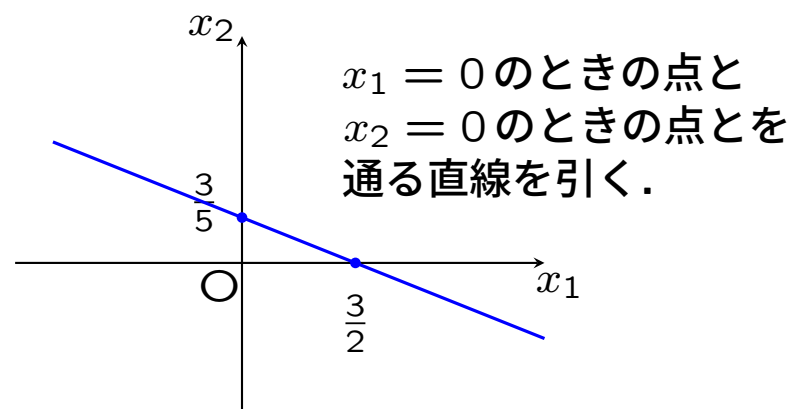
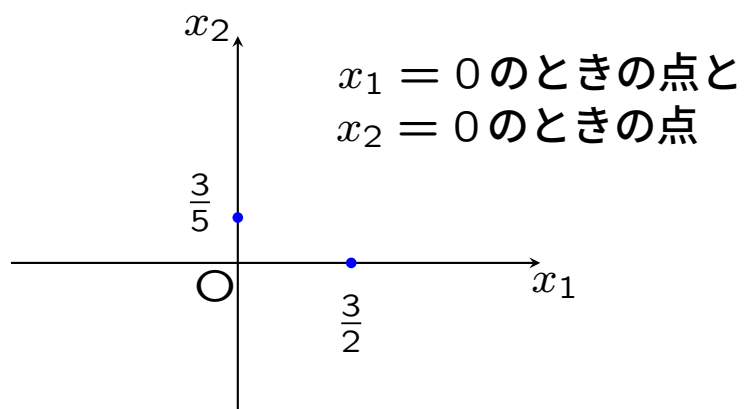
左辺の係数を成分とする数ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ で表せる方向に垂直と読み取る.



例2 x_1x_2 平面内に直線 $2x_1 + 5x_2 = 3$ を引くとき

★ 中学数学とちがって $x_2 = \dots$ と書き換えない.

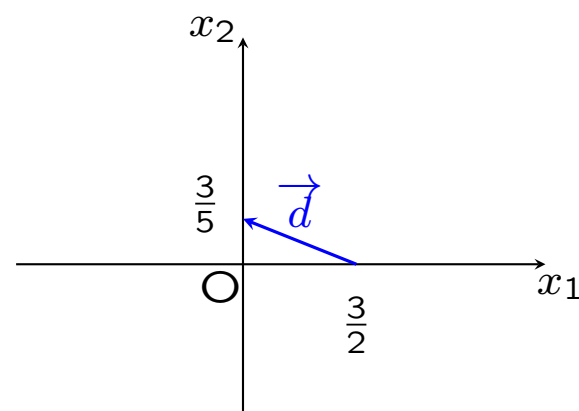
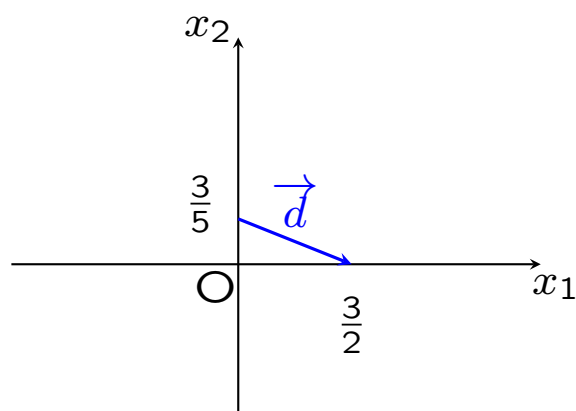
★ 本書 p.54 例題 1.4



問題5

この直線に平行な方向の幾何ベクトル \vec{d} を表す数ベクトル \mathbf{d} を
教えてください.

解



$$\vec{d} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \text{ または } \vec{d} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

問題6

$\vec{n} \cdot \vec{d} = 0$ を示してください.

解

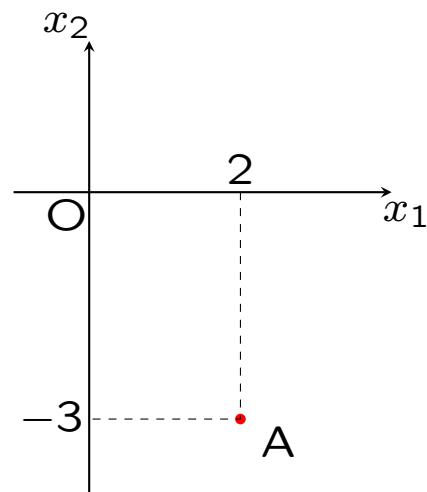
$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \vec{d} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \\ &= 2 \times \frac{3}{2} + 5 \times \left(-\frac{3}{5}\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

$\vec{n} \perp \vec{d}$ を確かめることができました.

点のベクトル表示

★ 本書 p.144

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$



点の方程式

★ 本書 pp.144 – 145

Q2 特定の点を一つの方程式で表せるでしょうか？

一つの方程式は直線を表し、直線上には無数の点が存在します。

発想 2直線の交点 $\xrightarrow{\text{翻訳}}$ 2元連立1次方程式の解

例 $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = -7 \\ -1x_1 + 1x_2 = -5 \end{cases}$ $\begin{matrix} \blacktriangleleft \text{直線の方程式} \\ \blacktriangleleft \text{直線の方程式} \end{matrix}$

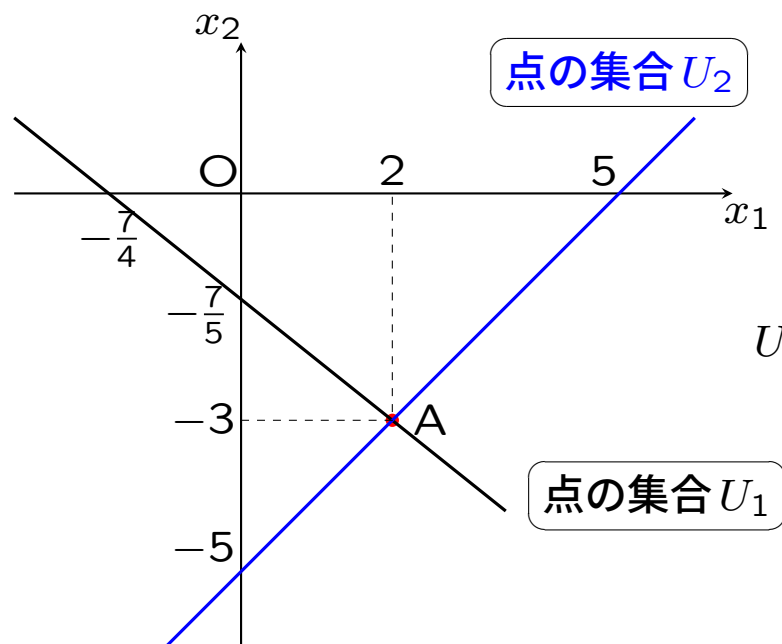
問題7 x_1x_2 平面に2直線を引いてください。

★ $x_2 = \dots$ と書き換えしないで、 $x_1 = 0$ のときの点と $x_2 = 0$ のときの点とを通るように直線を引く。

★ 本書 p.54 例題1.4, ダイジェスト版 16 p.21

解

直線は無数の点の集合です.



解集合 (要素は1個の解ベクトル)

$$U_1 \cap U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}.$$

積集合 (交わり)

cap(帽子) \cap

Cramerの方法で連立方程式を解くと, 点のベクトル表示が求まります.

重要

平面内の点の方程式は2直線を表す2元連立1次方程式です.

次回のための予習

斉次方程式と非斉次方程式との関係 [本書 pp.145 – 155](#)