

数学オフィスアワー 現場で出会う微積分・線型代数
ダイジェスト版 5

前回

例 1 x と y との関係が
指数関数 $y = a^x$
で表せることを判断する方法

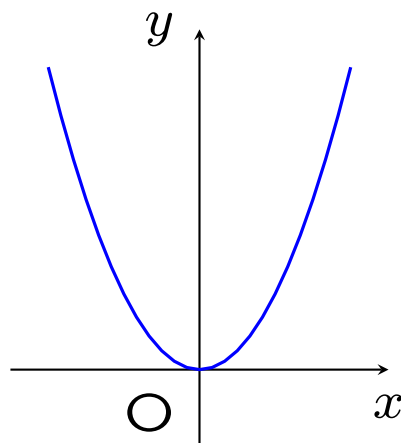
今回

例 2 x と y との関係が
べき関数 $y = x^n$ (n は定数)
で表せることを判断する方法

★ 本書 pp.77 – 79

簡単な例として $n = 2$ の場合を考えます.

$$y = x^2$$



Q1 この曲線が $y = x^2$ のグラフであることを確かめるには, どうすればいいでしょうか?

★ 原点を通る直線のグラフは, 確実に**正比例**を表します.

$$y = x^2$$

の両辺の常用対数は

$$\begin{aligned}\log_{10} y &= \log_{10} x^2 \\ &= 2 \log_{10} x\end{aligned}$$

だから

$$\underbrace{\log_{10} y}_Y = \underbrace{2}_a \underbrace{\log_{10} x}_X \quad \text{比例の式}$$

と表せます.

★ 本書 p.79

たて軸： $\log_{10} y$ の値
よこ軸： $\log_{10} x$ の値
原点を通る傾き 2 の直線のグラフ

$\Rightarrow y = x^2$ と判断する.

両対数方眼紙

★ 本書 p.80

問題 1

$\log_{10} y$ と $\log_{10} x$ との関係が原点を通る傾き $\frac{1}{5}$ の直線で表せるとき,
 x と y との関係を求めてください.

解 原点を通る直線のグラフで表せるから

$\log_{10} y$ は $\log_{10} x$ に比例し,

$$\log_{10} y = \frac{1}{5} \log_{10} x$$

の関係の成り立つことがわかります.

$$\frac{1}{5} \log_{10} x = \log_{10} x^{\frac{1}{5}}$$

だから

$$\log_{10} y = \log_{10} x^{\frac{1}{5}}$$

と表すと,

$$y = x^{\frac{1}{5}}$$

であることがわかります.

まとめ

線型数理の基本

★ 本書 p.87

曲線のグラフ	$y = \frac{C}{x}$ (C は定数) 反比例	$y = a^x$ (a は正の定数) 指数関数	$y = x^n$ (n は定数, $n \neq 1$) べき関数
比例を表す直線	$y = CX$ $\left(X = \frac{1}{x}\right)$	$\underbrace{\log_{10} y}_Y = \underbrace{(\log_{10} a)_c}_c x$ (c は比例定数)	$\underbrace{\log_{10} y}_Y = n \underbrace{\log_{10} x}_X$
方眼紙	等間隔方眼紙	片対数方眼紙	両対数方眼紙

自習

本書 pp.95 – 100 問題

参考 $y = x^{\frac{1}{2}}$ のグラフの描き方

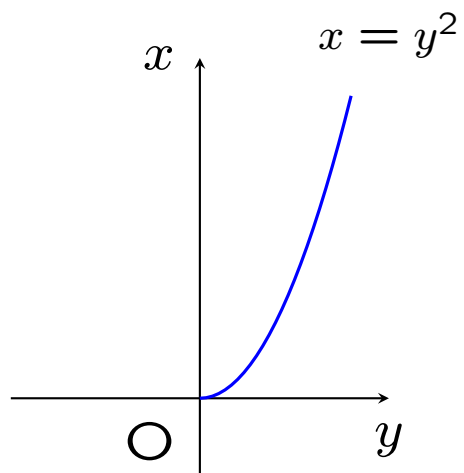
★ 本書 p.78

注意 $y = \sqrt{x}$ で $y \geq 0, x \geq 0$ (y は実数だから根号内は負でない).

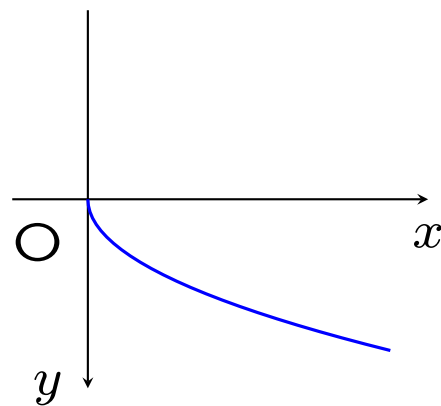
両辺を 2 乗すると

$$x = y^2$$

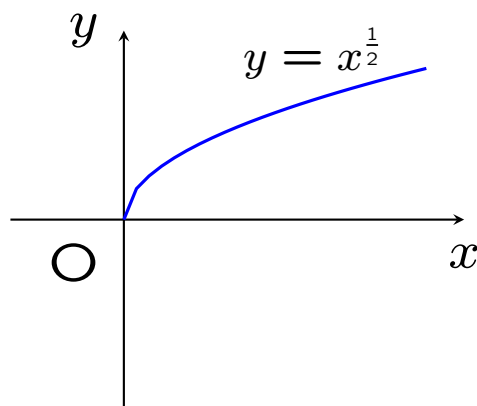
だから, よこ軸に y , たて軸に x をとると放物線のグラフになります.



→
90° 回転



↓ x 軸に関する折り返し



線型代数 — マトリックスで比例の関係を表す方法

ねらい

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ベクトル マトリックス ベクトル

記号 $y = Ax$ (比例の式の拡張)

のような表し方, 演算規則, 応用を理解します.

本書 p.315

導入

● なぜベクトルという概念(表し方)が必要なのか？

Q2 理系の学生5人は文系の学生3人よりも何人多いでしょうか？

★ 理系の学生の集合から文系の学生を引くことはできるのか？

★ 本書 p.317

① 「理系の学生5人の集合」と「文系の学生3人の集合」とに**類別**します.

理系の学生の集合 $\{\circ \circ \circ \circ \circ\}$
文系の学生の集合 $\{\circ \circ \circ\}$

$\{\circ \circ \circ \circ \circ\}$ に \circ は入っていないので, \circ を引くことはできません.

② 「理系の学生5人の集合」と「文系の学生3人の集合」との間で**1対1対応**させます.

$\circ \circ \circ \circ \circ - \circ \circ \circ = \circ \circ$

(理系5人) - (文系に対応した理系3人) = 文系に対応しなかった理系2人

重要 加法・減法は同種の概念の間で成り立ちます.

類別 (種類ごとに区別する) のために

$\begin{pmatrix} 8 \text{ 個} \\ 5 \text{ 個} \end{pmatrix}$ リンゴ
 ミカン

のように表します. つぎに, この表し方の例を挙げます.

ベクトル量の演算の意味

★ 本書 p.319 問 4.1 (改題)

表 1 物質 I, II の成分

成分 \ 物質	I	II
1	3 g/cm ³	2 g/cm ³
2	4 g/cm ³	5 g/cm ³

Q3 「単位体積あたり何 g」で表す量の名称は何でしょうか?

① **類別** 物質I, IIの成分の組 (密度の組)

$$\begin{array}{l} \text{成分1} \\ \text{成分2} \end{array} \quad \left(\begin{array}{c} 3 \text{ g/cm}^3 \\ 4 \text{ g/cm}^3 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{c} 2 \text{ g/cm}^3 \\ 5 \text{ g/cm}^3 \end{array} \right)$$

② (一つあたりいくら) × (いくら分) (掛ける順序はどちらでも正しいが, どちらかに決める)

$$\begin{array}{l} \text{成分1} \\ \text{成分2} \end{array} \quad \overbrace{\left(\begin{array}{c} 3 \text{ g/cm}^3 \\ 4 \text{ g/cm}^3 \end{array} \right) 2 \text{ cm}^3}^{\text{物質I}} \quad \overbrace{\left(\begin{array}{c} 2 \text{ g/cm}^3 \\ 5 \text{ g/cm}^3 \end{array} \right) 3 \text{ cm}^3}^{\text{物質II}}$$

$$\overbrace{\left(\begin{array}{c} 3 \text{ g/cm}^3 \\ 4 \text{ g/cm}^3 \end{array} \right) 2 \text{ cm}^3}^{\text{物質I}} + \overbrace{\left(\begin{array}{c} 2 \text{ g/cm}^3 \\ 5 \text{ g/cm}^3 \end{array} \right) 3 \text{ cm}^3}^{\text{物質II}} = \overbrace{\left(\begin{array}{c} 12 \text{ g} \\ 23 \text{ g} \end{array} \right)}^{\text{混合物}} \begin{array}{l} \text{成分1} \\ \text{成分2} \end{array}$$

成分1,2に**類別** (どちらの成分も密度)

成分ごとに含量が求まります.

$$\begin{pmatrix} 3 \text{ g/cm}^3 \\ 4 \text{ g/cm}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ g/cm}^3.$$

$$\begin{array}{c} \text{ベクトル量} \\ \text{(量の組)} \end{array} = \begin{array}{c} \text{ベクトル} \\ \text{(数の組)} \end{array} \times \text{単位量}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \text{ g/cm}^3 \\ 4 \text{ g/cm}^3 \end{pmatrix} 2 \text{ cm}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} 2 \right\} \cancel{\text{g/cm}^3} \times \cancel{\text{cm}^3}.$$

$$\begin{array}{cc} \text{ベクトル量} & \text{スカラー量} \\ \text{(量の組)} & \text{(組でない)} \end{array} \quad \begin{array}{cc} \text{ベクトル} & \text{スカラー} \\ \text{(数の組)} & \text{(倍率)} \end{array}$$

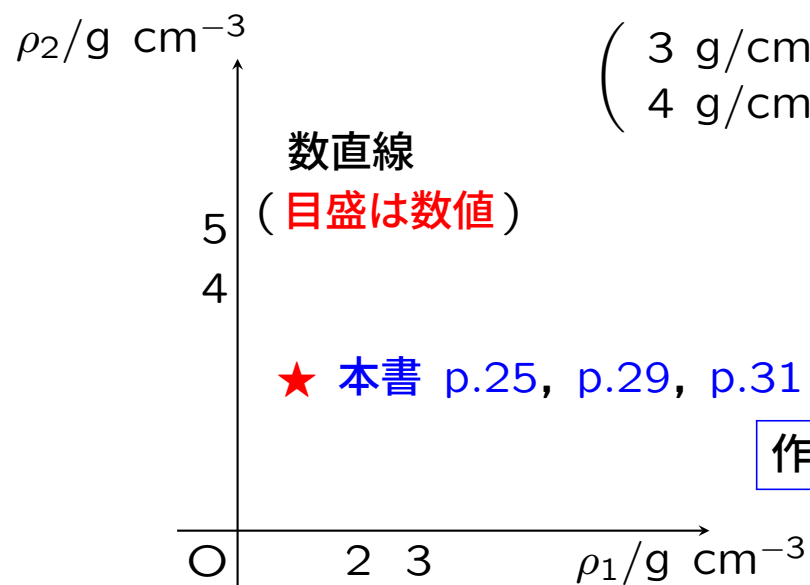
$$\text{線型結合} \begin{pmatrix} 3 \text{ g/cm}^3 \\ 4 \text{ g/cm}^3 \end{pmatrix} 2 \text{ cm}^3 + \begin{pmatrix} 2 \text{ g/cm}^3 \\ 5 \text{ g/cm}^3 \end{pmatrix} 3 \text{ cm}^3 = \begin{pmatrix} 12 \text{ g} \\ 23 \text{ g} \end{pmatrix}.$$

ベクトル量 掛ける スカラー量 + ベクトル量 掛ける スカラー量 +... ★ 本書 p.321

線型結合を図で表す方法

記号 密度 ギリシア文字 ρ (p ではない) ベクトル量 $\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 3 \text{ g/cm}^3 \\ &= 3 \text{ g cm}^{-3}. \end{aligned} \quad \rho_1/\text{g cm}^{-3} = 3.$$

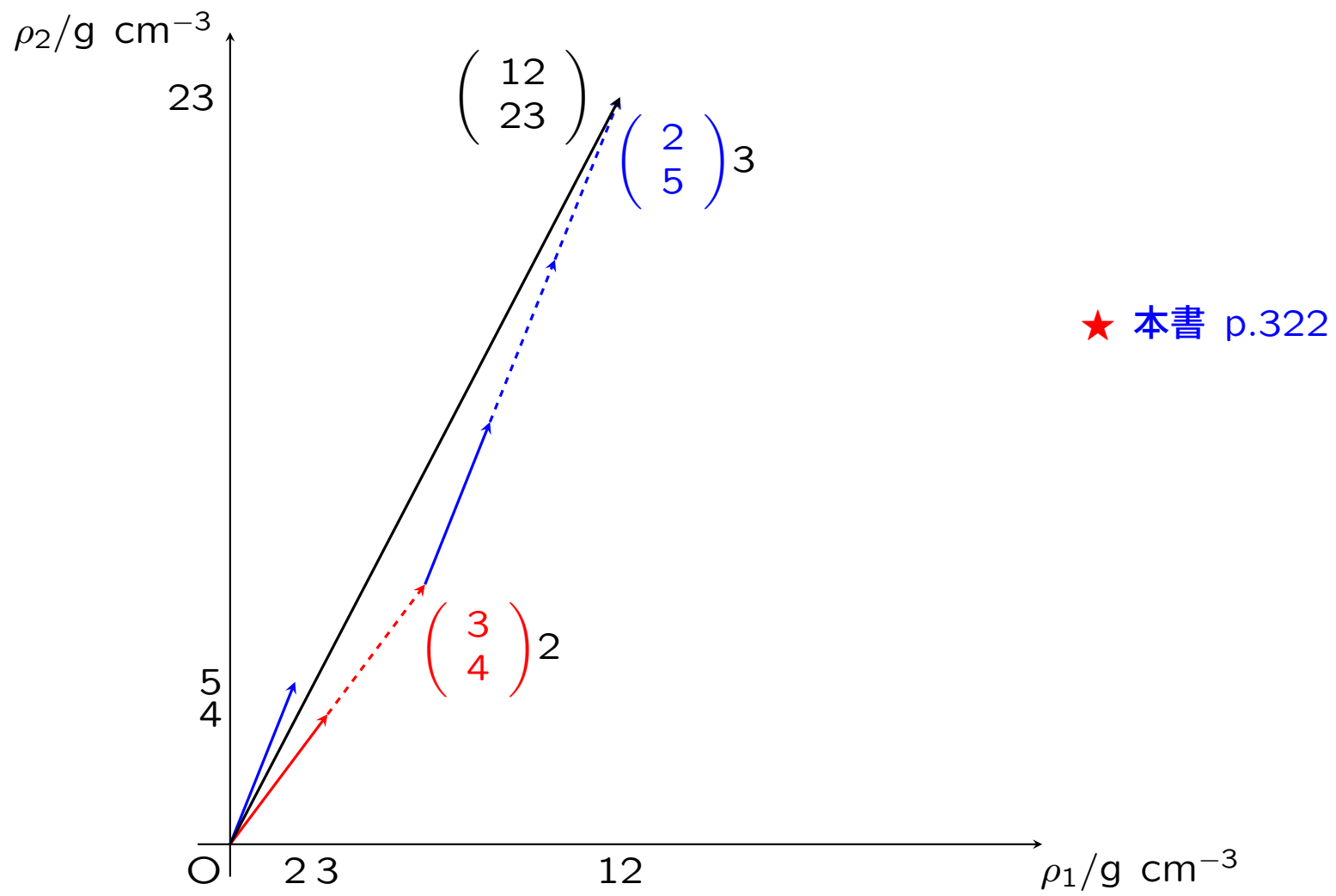


$$\begin{pmatrix} 3 \text{ g/cm}^3 \\ 4 \text{ g/cm}^3 \end{pmatrix} 2 \text{ cm}^3 + \begin{pmatrix} 2 \text{ g/cm}^3 \\ 5 \text{ g/cm}^3 \end{pmatrix} 3 \text{ cm}^3 = \begin{pmatrix} 12 \text{ g} \\ 23 \text{ g} \end{pmatrix}.$$

↓ g で割る.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} 2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} 3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

作図 ベクトル(数の組)のスカラール倍をつなぎ合わせる.



数ベクトル $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

a

\mathbb{a}

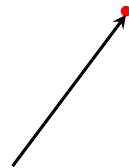
★ 本書 p.6, p.320

印刷 ボールド体

手書き

★ ダイジェスト版 1 pp.8 – 9

幾何ベクトル



\vec{a}

点という図形

作図のとき矢線を使う.

スカラー

倍率

c

細文字

注意 1 数ベクトルを \vec{a} , 幾何ベクトルを \mathbb{a} と表すこともあります.

注意 2 ベクトル量 $\begin{pmatrix} 3 \text{ g/cm}^3 \\ 4 \text{ g/cm}^3 \end{pmatrix}$ もボールド体で表します.

問題 2

$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}^3$ を記号で表してください.

解 $\mathbb{Q}_1 c_1 + \mathbb{Q}_2 c_2$

問題 3 この式を和の記号 \sum で表してください.

解 $\sum_{k=1}^2 \mathbb{Q}_k c_k$

番号, 回数を添字 (suffix) で表します. i, j, k, ℓ, m, n . ★ 本書 p.16

sum (和) の頭文字 s のギリシア文字 Σ

自習 ★ 本書 pp.317 – 325 問題

- 実際に式を書いて計算練習すること.
- 数ベクトルを表す記号

印刷 ボールド体 b c d e x y z

手書き b c d e x y z

★ これらの文字を紙に書いてください.

次回のための予習

線型独立性 [本書 pp.325 – 327](#)

マトリックスの意味と使い方 [本書 4.2 節](#)