

数学オフィスアワー 現場で出会う微積分・線型代数
ダイジェスト版 15

前回まで

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} t_1 \\ -3t_1 \end{pmatrix}}_{\text{固有ベクトル}} = \underbrace{\begin{pmatrix} t_1 \\ -3t_1 \end{pmatrix}}_{\text{固有ベクトル}} \underbrace{1}_{\text{固有値}}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} t_2 \\ -t_2 \end{pmatrix}}_{\text{固有ベクトル}} = \underbrace{\begin{pmatrix} t_2 \\ -t_2 \end{pmatrix}}_{\text{固有ベクトル}} \underbrace{3}_{\text{固有値}}$$

をまとめて

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ -3t_1 & -t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ -3t_1 & -t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

記号 $AU = U\Lambda$

と表します.

$$A = U\Lambda U^{-1}. \quad \blacktriangleleft AU = U\Lambda \text{ の両辺に右から } U^{-1} \text{ を掛ける.}$$

$$\begin{aligned} A^n &= U\Lambda \underbrace{U^{-1}U}_I \Lambda \underbrace{U^{-1}U}_I \Lambda U^{-1} \dots U\Lambda \underbrace{U^{-1}U}_I \Lambda \underbrace{U^{-1}U}_I \Lambda U^{-1} \\ &= U\Lambda^n U^{-1}. \end{aligned}$$

今回 $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}^n$ の計算

U の逆マトリックス U^{-1} の求め方

★ 本書 pp.456 – 457

U, Λ^n, U^{-1} の積の計算

★ 本書 pp.457 – 458

$U = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ -3t_1 & -t_2 \end{pmatrix}$ の逆マトリックスを

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ -3t_1 & -t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

です.

問題 1 左辺のマトリックスの積を求めて, x_{11} , x_{21} , x_{12} , x_{22} について連立方程式を立ててください.

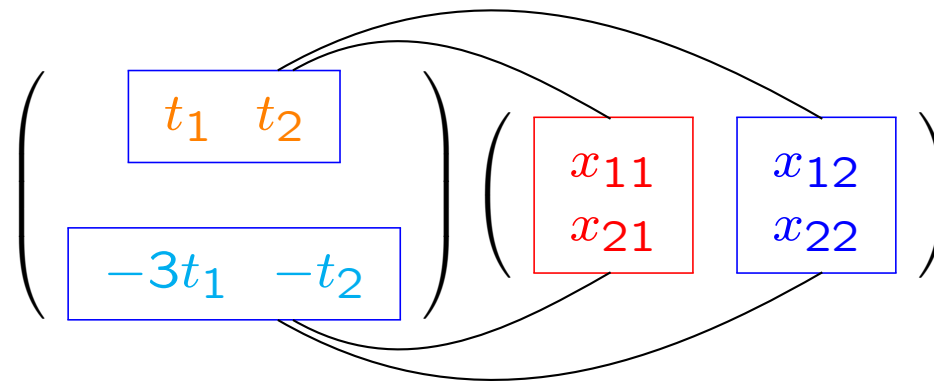
解

二つのマトリックスを掛ける計算

左側はヨコ方向の数の並びと見ます. 右側はタテ方向の数の並びと見ます.

四つのスカラー積をつくります.

★ 本書 pp.342 – 343



$$\begin{pmatrix} t_1 \times x_{11} + t_2 \times x_{21} & t_1 \times x_{12} + t_2 \times x_{22} \\ -3t_1 \times x_{11} + (-t_2) \times x_{21} & -3t_1 \times x_{12} + (-t_2) \times x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

x_{11} , x_{21} , x_{12} , x_{22} に関する連立方程式

$$\begin{cases} t_1 x_{11} + t_2 x_{21} = 1 \\ -3t_1 x_{11} - t_2 x_{21} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t_1 x_{12} + t_2 x_{22} = 0 \\ -3t_1 x_{12} - t_2 x_{22} = 1 \end{cases}$$

重要

どちらの連立方程式も**同じ係数**であることに着目します.

問題2

Cramerの方法で x_{11} , x_{21} , x_{12} , x_{22} を求めてください.

★ 同じ係数だから x_{11} , x_{21} , x_{12} , x_{22} の**分母は同じ**である.

解

$$\begin{aligned}x_{11} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & t_2 \\ 0 & -t_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t_1 & t_2 \\ -3t_1 & -t_2 \end{vmatrix}} \\&= \frac{-t_2}{2t_1t_2} \\&= -\frac{1}{2t_1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_{21} &= \frac{\begin{vmatrix} t_1 & 1 \\ -3t_1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t_1 & t_2 \\ -3t_1 & -t_2 \end{vmatrix}} \\&= \frac{3t_1}{2t_1t_2} \\&= \frac{3}{2t_2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_{12} &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & t_2 \\ 1 & -t_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t_1 & t_2 \\ -3t_1 & -t_2 \end{vmatrix}} \\&= \frac{-t_2}{2t_1t_2} \\&= -\frac{1}{2t_1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_{22} &= \frac{\begin{vmatrix} t_1 & 0 \\ -3t_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t_1 & t_2 \\ -3t_1 & -t_2 \end{vmatrix}} \\&= \frac{t_1}{2t_1t_2} \\&= \frac{1}{2t_2}.\end{aligned}$$

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t_1} & -\frac{1}{2t_1} \\ \frac{3}{2t_2} & \frac{1}{2t_2} \end{pmatrix}.$$

$t_1 \neq 0, t_2 \neq 0$ に注意.

問題3 $U^{-1}U = I$ になることを確かめてください.

★ $UU^{-1} = I$ をみたく U^{-1} を求めたので, 検算するときは $U^{-1}U = I$ を確かめる.

$$U = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ -3t_1 & -t_2 \end{pmatrix}.$$

解

$$\begin{aligned} U^{-1}U &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t_1} & -\frac{1}{2t_1} \\ \frac{3}{2t_2} & \frac{1}{2t_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ -3t_1 & -t_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t_1} \times t_1 + \left(-\frac{1}{2t_1}\right) \times (-3t_1) & -\frac{1}{2t_1} \times t_2 + \left(-\frac{1}{2t_1}\right) \times (-t_2) \\ \frac{3}{2t_2} \times t_1 + \frac{1}{2t_2} \times (-3t_1) & \frac{3}{2t_2} \times t_2 + \frac{1}{2t_2} \times (-t_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

問題 4 $A^n = U \Lambda^n U^{-1}$ の右辺を計算してください.

$$\star U = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ -3t_1 & -t_2 \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, U^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t_1} & -\frac{1}{2t_1} \\ \frac{3}{2t_2} & \frac{1}{2t_2} \end{pmatrix}.$$

\star 結合法則が成り立つので, $(U \Lambda^n) U^{-1}$ と $U (\Lambda^n U^{-1})$ とのどちらでもよい.

解

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ -3t_1 & -t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t_1} & -\frac{1}{2t_1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2t_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t_1 & 3^n t_2 \\ -3t_1 & -3^n t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t_1} & -\frac{1}{2t_1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2t_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3^{n+1} - 1}{2} & \frac{3^n - 1}{2} \\ \frac{3 - 3^{n+1}}{2} & \frac{3 - 3^n}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

★ $n = 1$ を代入して $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ と一致することを確認よ.

Q1

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} t_1 \\ -3t_1 \end{pmatrix}}_{\text{固有ベクトル}} = \underbrace{\begin{pmatrix} t_1 \\ -3t_1 \end{pmatrix}}_{\text{固有ベクトル}} \underbrace{1}_{\text{固有値}}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} t_2 \\ -t_2 \end{pmatrix}}_{\text{固有ベクトル}} = \underbrace{\begin{pmatrix} t_2 \\ -t_2 \end{pmatrix}}_{\text{固有ベクトル}} \underbrace{3}_{\text{固有値}}$$

をまとめて

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ -3t_1 & -t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ -3t_1 & -t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

と表しましたが,固有ベクトルを並べる順序,固有値を並べる順序は決まっているのでしょうか？

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} t_2 \\ -t_2 \end{pmatrix}}_{\text{固有ベクトル}} = \underbrace{\begin{pmatrix} t_2 \\ -t_2 \end{pmatrix}}_{\text{固有ベクトル}} \overbrace{3}^{\text{固有値}}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} t_1 \\ -3t_1 \end{pmatrix}}_{\text{固有ベクトル}} = \underbrace{\begin{pmatrix} t_1 \\ -3t_1 \end{pmatrix}}_{\text{固有ベクトル}} \overbrace{1}^{\text{固有値}}$$

をまとめて

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_2 & t_1 \\ -t_2 & -3t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_2 & t_1 \\ -t_2 & -3t_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

記号 $AU = U\Lambda$

と表しても A^n を求めることができます.

★ 本書 p.455

$U = \begin{pmatrix} t_2 & t_1 \\ -t_2 & -3t_1 \end{pmatrix}$ の逆マトリックスを

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\begin{pmatrix} t_2 & t_1 \\ -t_2 & -3t_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

です.

問題5

左辺のマトリックスの積を求めて, x_{11} , x_{21} , x_{12} , x_{22} について連立方程式を立てて, Cramer の方法で解いてください.

解

$$\begin{pmatrix} t_2 x_{11} + t_1 x_{21} & t_2 x_{12} + t_1 x_{22} \\ -t_2 x_{11} - 3t_1 x_{21} & -t_2 x_{12} - 3t_1 x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

x_{11} , x_{21} , x_{12} , x_{22} に関する連立方程式

$$\begin{cases} t_2 x_{11} + t_1 x_{21} = 1 \\ -t_2 x_{11} - 3t_1 x_{21} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t_2 x_{12} + t_1 x_{22} = 0 \\ -t_2 x_{12} - 3t_1 x_{22} = 1 \end{cases}$$

重要

どちらの連立方程式も同じ係数であることに着目します.

$$\begin{aligned}
x_{11} &= \frac{\begin{vmatrix} \textcolor{red}{1} & t_1 \\ \textcolor{red}{0} & -3t_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t_2 & t_1 \\ -t_2 & -3t_1 \end{vmatrix}} \\
&= \frac{-3t_1}{-2t_1t_2} \\
&= \frac{3}{2t_2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{12} &= \frac{\begin{vmatrix} \textcolor{blue}{0} & t_1 \\ \textcolor{blue}{1} & -3t_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t_2 & t_1 \\ -t_2 & -3t_1 \end{vmatrix}} \\
&= \frac{-t_1}{-2t_1t_2} \\
&= \frac{1}{2t_2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{21} &= \frac{\begin{vmatrix} t_2 & \textcolor{red}{1} \\ -t_2 & \textcolor{red}{0} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t_2 & t_1 \\ -t_2 & -3t_1 \end{vmatrix}} \\
&= \frac{t_2}{-2t_1t_2} \\
&= -\frac{1}{2t_1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{22} &= \frac{\begin{vmatrix} t_2 & \textcolor{blue}{0} \\ -t_2 & \textcolor{blue}{1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t_2 & t_1 \\ -t_2 & -3t_1 \end{vmatrix}} \\
&= \frac{t_2}{-2t_1t_2} \\
&= -\frac{1}{2t_1}.
\end{aligned}$$

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2t_2} & \frac{1}{2t_2} \\ -\frac{1}{2t_1} & -\frac{1}{2t_1} \end{pmatrix}.$$

$t_1 \neq 0, t_2 \neq 0$ に注意.

問題 6 $A^n = U \Lambda^n U^{-1}$ の右辺を計算してください.

$$\star U = \begin{pmatrix} t_2 & t_1 \\ -t_2 & -3t_1 \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2t_2} & \frac{1}{2t_2} \\ -\frac{1}{2t_1} & -\frac{1}{2t_1} \end{pmatrix}.$$

\star 問題 4 と一致することを確認よ.

解

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} t_2 & t_1 \\ -t_2 & -3t_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2t_2} & \frac{1}{2t_2} \\ -\frac{1}{2t_1} & -\frac{1}{2t_1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3^n t_2 & t_1 \\ -3^n t_2 & -3t_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2t_2} & \frac{1}{2t_2} \\ -\frac{1}{2t_1} & -\frac{1}{2t_1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3^{n+1} - 1}{2} & \frac{3^n - 1}{2} \\ \frac{3 - 3^{n+1}}{2} & \frac{3 - 3^n}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Q2 どんな問題にマトリックスの n 乗を使うのでしょうか？

実例 人口の移動

★ 本書 p.443

ある年の

都市の人口の 80% と農村の人口の 15% が翌年の都市の人口,

都市の人口の 20% と農村の人口の 85% が翌年の農村の人口

になる数理モデル

問題 7 ある年の都市の人口を x_1 , 農村の人口を x_2 として, 翌年の都市の人口と農村の人口を式で表してください.

解

表 1

地域 \ 年	年	
	ある年	翌年
都市	x_1	$0.80x_1 + 0.15x_2$
農村	x_2	$0.20x_1 + 0.85x_2$

問題 8

ある年の都市の人口と農村の人口の組 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ と
翌年の都市の人口と農村の人口の組 $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ との
関係をマトリックスで表してください.

$$\star \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \spadesuit & \heartsuit \\ \clubsuit & \diamondsuit \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

解
$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.80 & 0.15 \\ 0.20 & 0.85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

式の見方 マトリックスは表として活用できます.

$$\begin{array}{c} \text{都市} \\ \text{農村} \end{array} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.80 & 0.15 \\ 0.20 & 0.85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{都市} \\ \text{農村} \end{array}$$

都市 → 都市 農村 → 都市
都市 → 農村 農村 → 農村

翌年の人口
ある年の人口

問題 9 ある年の都市の人口と農村の人口の組 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ と
 2年後の都市の人口と農村の人口の組 $\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{pmatrix}$ との
 関係をマトリックスで表してください.

解 翌年の都市の人口と農村の人口の組 $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ と
 2年後の都市の人口と農村の人口の組 $\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{pmatrix}$ との
 関係は

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.80 & 0.15 \\ 0.20 & 0.85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

だから

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.80 & 0.15 \\ 0.20 & 0.85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.80 & 0.15 \\ 0.20 & 0.85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \blacktriangleleft \text{問題8} \\ &= \begin{pmatrix} 0.80 & 0.15 \\ 0.20 & 0.85 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

問題 10 同様に, n 年後の都市の人口と農村の人口の組を表してください.

解 $\begin{pmatrix} 0.80 & 0.15 \\ 0.20 & 0.85 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

★ 計算の詳細 [本書 pp.443 – 445, pp.450 – 458](#)