

数学オフィスアワー 現場で出会う微積分・線型代数
ダイジェスト版 1

線型性 (比例) に基づいた現象の解析方法

マトリックス (カレンダーのような数の並び) の意味と使い方

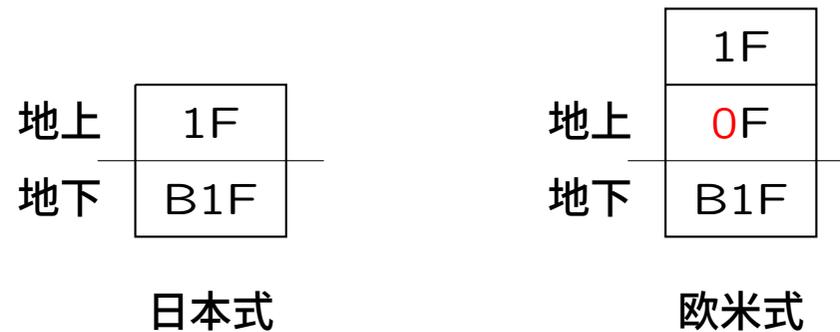
ねらい

- ① 数学の文法 (ルール) : 科学論文を作成・読解するための基礎
- ② 数と図形の感覚 : 実験データなどの処理法の基礎

導入

	建物	
地上	1F	+1
地下	B1F	-1

Q1 0はどこに行ったのでしょうか？



この科目も準備段階の章を「第0話」として出発します。

● 自然数を $0, 1, 2, \dots$ とする流儀もあります。

Q2 $0, 1, 2, \dots$ と $100 \dots 00$ とで3点の使い方のちがいに気がつきましたか？

0, 1, 2, ... カンマ, ピリオド 3個

100...00 3点リーダー

数学の文法

中学・高校数学では、**数学の文法**を十分に学びませんが、

「数学は記号の科学」

だから、**記号**(文字)の**使い分け**で**意味のちがい**を表します。 ★ 本書 pp.4 – 6

単語を知っていても文法が身につけていないと読解, 作文ができません。

問題 1 ピリオドの用法を思い出せるだけ挙げてください。

解

ピリオドの用法

★ 本書 p.4

① 小数点 3.14

② 略号 p.4 pageの略 pp.4 – 6 pagesの略

③ IP アドレス (区切り)

④ 文末の数式
 $x = 2$ のとき

$$2x = 4$$

ではなく

$x = 2$ のとき

$$2x = 4.$$

が正しい書き方です。式も文だから、式が文末の場合にピリオドが必要です。

文字の使い分け

★ 本書 p.6

重要 同じアルファベットでも、**字体で意味のちがい**を読み取ります。

① ローマン体（立体） 関数 \tan 単位 kg

② イタリック体（斜体） 数 $a = 3$. 量 $t = 5 \text{ s}$.

2 m （メートル） $2 m$ （質量 m の2倍, mass の頭文字）

問題2 \tan の意味を教えてください。

★ 30秒間 考えてわからなかったら、つぎのページを見よ。

解 $tan = t \times a \times n.$ 立体文字 tan は正接 (タンジェント) を表します.

③ ボールド体 (太文字)

線型代数ではベクトルを使いますから, その記号を覚えます.

$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$ 「数の組」をベクトル (数ベクトル) といいます.

$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$ 括弧内の b は 2, 5 などの数を表すので, 斜体の細文字で書きます.

$\mathbf{b}_c = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} 3.$ スカラー (倍率) はイタリック体 (斜体) の細文字で表します.

● 左辺の \mathbf{b} は見にくいかもしれませんが, ボールド体 (太文字) で書いています.

注意 b と b とのちがい.

Q 関数の値を表す $f(x)$ の f は立体と斜体とのどちらか？

A $y = f(x)$
斜体 斜体 立体 斜体 立体

注意 関数の名称 \cos, \sin, \tan, \log などは立体で表します.

参考

手書きの場合，ボード体（太文字）は *b* の代わりに *Ⓛ* のように書きます．

★ 本書 p.320 注釈欄

★ *a, c, d, e, x, y* などの書き方を練習してください．

問題3

つぎの等号の意味を読み取ってください。

$$\begin{array}{lll} \textcircled{1} 3 \times 8 = 24 & \textcircled{2} 3x = 6 & \textcircled{3} 2x + 5x = 7x \\ \textcircled{4} f(x) = x^2 & \textcircled{5} f(5) = 25 & \textcircled{6} y = f(x) \end{array}$$

★ どの式でも左辺と右辺とは等しいが、具体的な意味が異なる。

★ 30秒間 考えてわからなかったら、本書 p.5を見よ。

等号 2本の平行線の幅は永遠に等しいから $=$ と表します.

① $3 \times 8 = 24$ 計算結果

② $3x = 6$ 方程式 (x が特定の値のとき成り立つ等号)

③ $2x + 5x = 7x$ 恒等式 (x の値に関係なく成り立つ等号)

④ $f(x) = x^2$ 関数 f の定義 (線型代数で重要)

⑤ $f(5) = 25$ 関数値を計算した結果 (線型代数で重要)

⑥ $y = f(x)$ 「 x の値を入力すると y の値を出力する」という因果律

$\underbrace{d(m\vec{v})}_{\text{結果}} = \underbrace{m\vec{g} dt}_{\text{原因}}$

この式の等号は「運動量という勢いは力が時間をかけてはたらくと変化する」という因果律を表す.

数と図形の感覚

実験データから規則性を見出す方法

★ 本書 p.7

数学の問題は実験とは直接、関係ありませんが、
データの特徴を見出すときの頭のはたらかせ方の練習
になります。

例

$$\begin{aligned}1 + 2 + 1 &= 4. \\1 + 2 + 3 + 2 + 1 &= 9. \\1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 &= 16.\end{aligned}$$

▶ これらの等号は「計算結果」を表します。

問題 4 三つの式に共通の特徴を見出してください。

★ 30秒間 考えてわからなかったら、つぎのページを見よ。

解

$$\begin{aligned}1 + 2 + 1 &= 4. \\1 + 2 + 3 + 2 + 1 &= 9. \\1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 &= 16.\end{aligned}$$

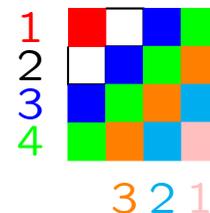
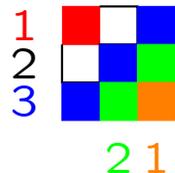
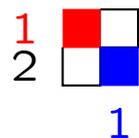
$$\left. \begin{array}{l}2^2 \\3^2 \\4^2\end{array} \right\} (\text{中央の数})^2$$

問題5 なぜ中央の数の2乗になるのでしょうか？

- ★ 三つの式の姿を描く.
- ★ 「なぜ」を考えることは、実験結果に対する考察にあたる.

解

「並べる」という発想



問題6

$1 + 2 + 3 + 4 + 5$ を中央の数3を使って計算してください。

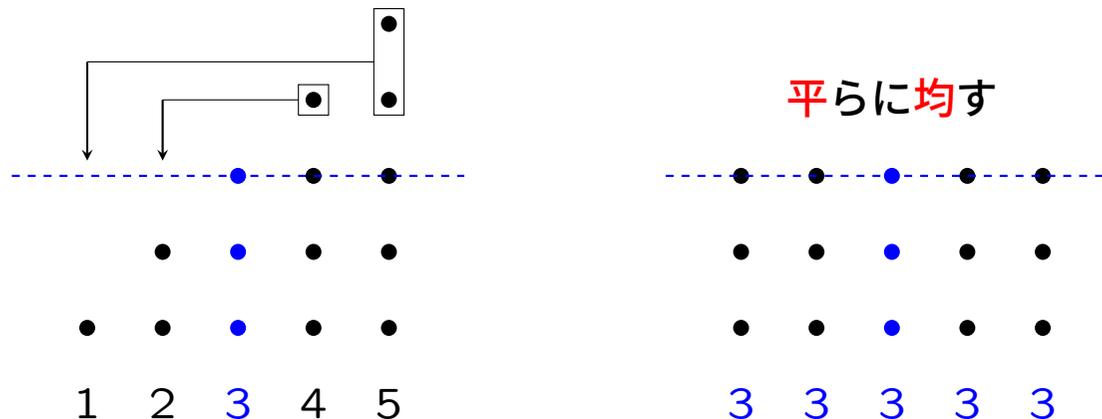
★ $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ の姿を描く。

★ 30秒間 考えてわからなかったら、つぎのページを見よ。

解

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

★ 本書 pp.7 – 8 注釈欄



平均 (中央の数) × 項数 = 合計.
 $3 \times 5 = 15.$

一般化 $1 + 2 + 3 + \dots + n$ 例 $1 + 2 + 3 + \dots + 10$

$$\underbrace{\frac{\text{最小} + \text{最大}}{2}}_{\text{中央の数} \times \text{項数}} \times n \quad \frac{1 + n}{2} \times n \quad \underbrace{\frac{1 + 10}{2}}_{5.5} \times 10 = 55.$$

平均の考え方

例 $a \geq 0, b \geq 0$ のとき $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

相加平均 相乗平均

問題7 数学的発想 「相」を含む熟語から共通の意味を見出してください.

★ 実験結果から共通の特徴を見出すときと頭のはたらかせ方は同じ.

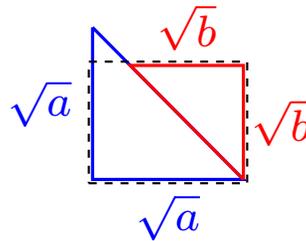
解

「互いの」 相互, 相談, 相関, 相似など.

Q3 $a \geq 0, b \geq 0$ のとき $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ が成り立つのはなぜでしょうか?

★ 式を書き換えて証明できたとしても, 何が納得できたことになるのか?

★ この不等式の姿を描く.



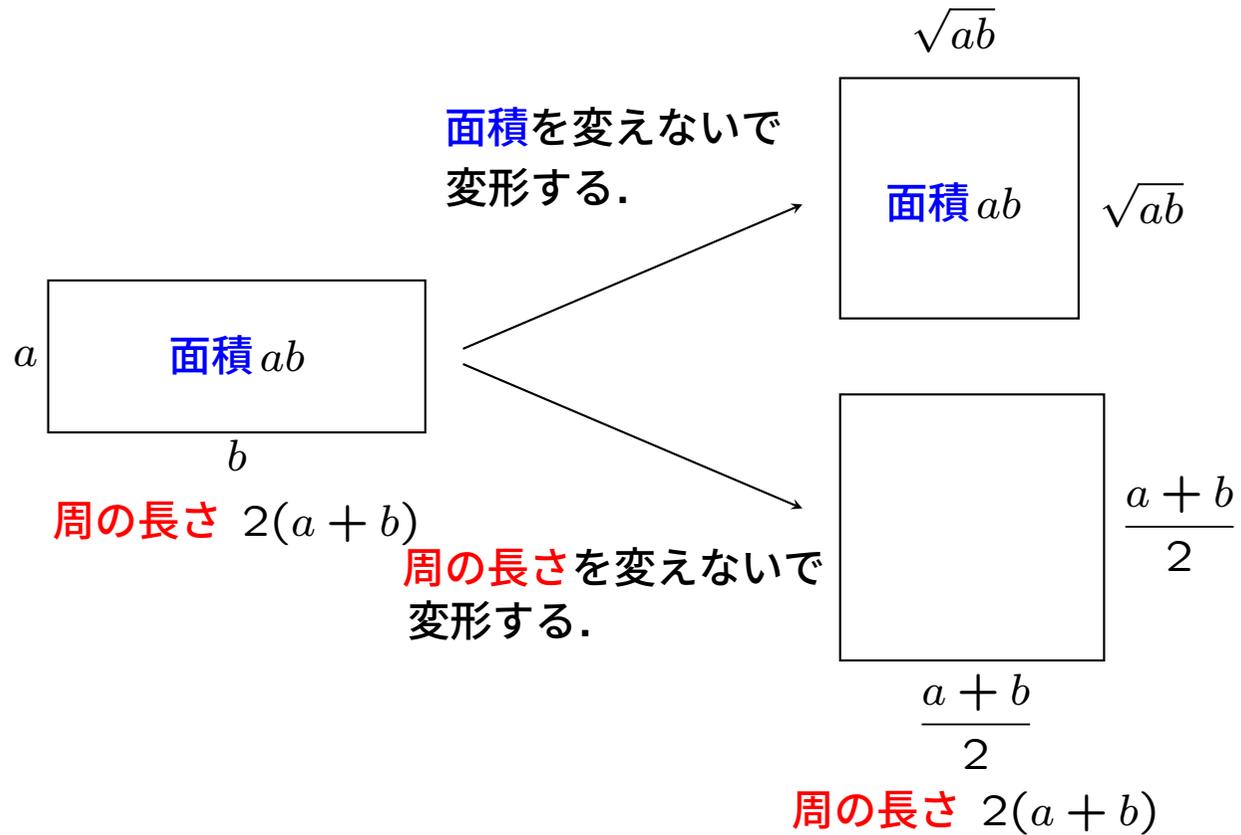
$$\text{面積 } \frac{1}{2}\sqrt{a}\sqrt{a} + \frac{1}{2}\sqrt{b}\sqrt{b} \geq \sqrt{a}\sqrt{b}.$$

直角二等辺三角形 直角二等辺三角形 長方形

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Q4 相加平均と相乗平均の大小関係はわかりましたが、それぞれの平均の表す意味は何でしょうか？

ここで、「平均」は「辺の長さを等しくする(正方形に変える)」という意味.



まとめ

規則性を見出す方法

共通の特徴 問題4

考察 Why? 問題5

一般化 問題6

応用 問題6

類例 Q3

★ 他分野でも同様の手続きで研究を進めるから、数学で練習しました。

★ 実験結果から共通の特徴を見出すときと頭のはたらかせ方は同じ。

発展 規則性を見出す方法

★ 本書 p.9

問題8 $\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \dots$ を求めてください.

★ 数学の感覚を身につけるために, 式の意味を図解してみる.

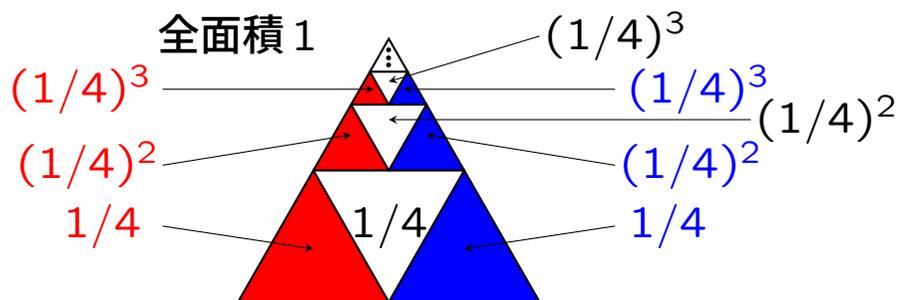
★ $+\dots+$ 3点リーダー

解 美術の感覚で $\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \dots$ の姿を描きます。
 相加・相乗平均で面積を調べたように、正三角形の内部に

$$\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \dots$$

の面積の領域が3通りできることに着目します。

$$\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \dots = \frac{1}{3}. \quad \blacktriangleleft \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$



参考 フラクタル(自己相似)

全体と部分が相似な図形 ★ 本書 p.12

(自分の中に自分の相似形を含む)

今回の講義に出た「相」を含む熟語：相加, 相乗, 相似.

次回のための予習

本書 0.4 節

量と数の概念