

数学オフィスアワー 現場で出会う微積分・線型代数
ダイジェスト版 9

連立1次方程式の解法—— 解を分数で表す方法

★ 本書 p.358

(あとで実験データ処理に活用)

準備

0を含む除法

Q1 $\frac{0}{5}$, $\frac{5}{0}$, $\frac{0}{0}$ の値を答えることができるでしょうか?

★ $\frac{5}{0} = 0$, $\frac{0}{0} = 1$, $\frac{0}{0} = 0$ は正しいかどうか?

$$\frac{0}{5} \quad \div$$

分数は除号（割算の演算記号）と同じ形です。
 分数の値は**除法**の**定義**に基づいて求めます。

除法の定義

$$a \div b = \square$$

とは

$$\square \times b = a$$

をみたす数を求める演算である。

問題 1

除法の定義にしたがって、つぎの分数の値を求めてください。

$$\frac{0}{5}, \quad \frac{5}{0}, \quad \frac{0}{0}.$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ \hline 5 \end{array} \quad 0 \div 5 = \square$$

とは

$$\square \times 5 = 0$$

をみたす数を求める
演算だから

$$\square = 0.$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ \hline 0 \end{array} \quad 5 \div 0 = \square$$

とは

$$\square \times 0 = 5$$

をみたす数を求める
演算だから

\square にあてはまる数は
存在しない.
不能

$$\begin{array}{r} 0 \\ \hline 0 \end{array} \quad 0 \div 0 = \square$$

とは

$$\square \times 0 = 0$$

をみたす数を求める
演算だから

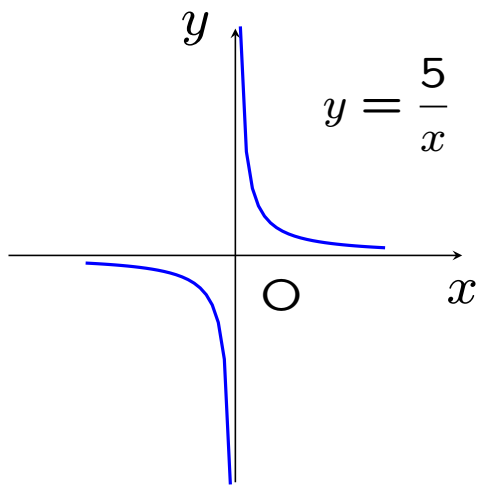
\square にはあらゆる数が
あてはまる.
不定

解は無数に存在する.

● 連立1次方程式の解を分数で表すと,

① 解が1組だけ存在する ② 解が存在しない ③ 解が無数に存在する
を判別することができます.

注意 $\frac{5}{0}$ (不能) と $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{x} = \pm\infty$ とのちがい



曲線 $y = \frac{5}{x}$ は y 軸と交わらないので,
 $x = 0$ とならない.

$\frac{5}{0} = \infty$
は正しくない.

基本

1 次方程式

★ 本書 p.359

$$5x = 4$$

の解の特徴を観察してください.

$$x = \frac{4}{5}.$$

分子：定数項 (右辺)

分母：係数 (左辺)

発展

2 元連立 1 次方程式

How はじめに「解の表し方」を練習します.

解法に必要な行列式 (マトリックスではない) の定義から始めます.

★ あとで「なぜこの方法で解けるのか」を理解します.

2次の行列式

★ 本書 p.360

記号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 定義 $= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$

斜めに掛けて引く

$$\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ & \diagdown \quad \diagup \\ & a_{21} \quad a_{22} \end{array}$$

例 $a_{11} = a, a_{12} = b, a_{21} = c, a_{22} = d$ のとき

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

注意 $\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$ は絶対値の記号ではありません.

クラメル

Cramerの方法

例1
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 10 \\ 3x_1 + 7x_2 = 9 \end{cases}$$

解の表し方

★ 本書 p.361

分子： x_1 の係数の上に定数項(右辺)

分子： x_2 の係数の上に定数項(右辺)

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 9 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}.$$

分母：係数(左辺)

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}.$$

分母：係数(左辺)

問題2

行列式を計算して, 未知数の値を求めてください.

解 分母は x_1 と x_2 とのどちらでも同じです.

$$\begin{aligned} \text{分母} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} &= 2 \times 7 - 5 \times 3 \\ &= -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 \text{ の分子} \begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} &= 10 \times 7 - 5 \times 9 \\ &= 25. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 \text{ の分子} \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} &= 2 \times 9 - 10 \times 3 \\ &= -12. \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{25}{-1}.$$

$$x_2 = \frac{-12}{-1}.$$

$$\begin{cases} x_1 = -25 \\ x_2 = 12 \end{cases}$$

例 2
$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 = 3 \\ 3x_1 - 9x_2 = 1 \end{cases}$$

解の表し方

★ 本書 p.361

分子： x_1 の係数の上に定数項 (右辺)

分子： x_2 の係数の上に定数項 (右辺)

$$x_1 = \frac{\begin{array}{c|c} \downarrow & \\ \hline 3 & -6 \\ 1 & -9 \\ \hline 2 & -6 \\ 3 & -9 \\ \uparrow & \\ \text{分母：係数 (左辺)} & \end{array}}{\begin{array}{c|c} \downarrow & \\ \hline 2 & -6 \\ 3 & -9 \\ \hline 2 & -6 \\ 3 & -9 \\ \uparrow & \\ \text{分母：係数 (左辺)} & \end{array}}.$$

$$x_2 = \frac{\begin{array}{c|c} \downarrow & \\ \hline 2 & 3 \\ 3 & 1 \\ \hline 2 & -6 \\ 3 & -9 \\ \hline 2 & -6 \\ 3 & -9 \\ \uparrow & \\ \text{分母：係数 (左辺)} & \end{array}}{\begin{array}{c|c} \downarrow & \\ \hline 2 & -6 \\ 3 & -9 \\ \hline 2 & -6 \\ 3 & -9 \\ \uparrow & \\ \text{分母：係数 (左辺)} & \end{array}}.$$

問題 3

行列式を計算して, 未知数の値を求めてください.

解 分母は x_1 と x_2 とのどちらでも同じです.

$$\begin{aligned} \text{分母} \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} &= 2 \times (-9) - (-6) \times 3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 \text{ の分子} \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -9 \end{vmatrix} &= 3 \times (-9) - (-6) \times 1 \\ &= -21. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 \text{ の分子} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} &= 2 \times 1 - 3 \times 3 \\ &= -7. \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-21}{0}.$$

$$x_2 = \frac{-7}{0}.$$

解は**存在しません**.

例3
$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 7 \\ 8x_1 + 10x_2 = 14 \end{cases}$$

解の表し方

★ 本書 p.361

分子： x_1 の係数の上に定数項(右辺)

分子： x_2 の係数の上に定数項(右辺)

$$x_1 = \frac{\begin{array}{c|c} 7 & 5 \\ \hline 14 & 10 \end{array}}{\begin{array}{c|c} 4 & 5 \\ \hline 8 & 10 \end{array}}.$$

↓
↑
分母：係数(左辺)

$$x_2 = \frac{\begin{array}{c|c} 4 & 7 \\ \hline 8 & 14 \end{array}}{\begin{array}{c|c} 4 & 5 \\ \hline 8 & 10 \end{array}}.$$

↓
↑
分母：係数(左辺)

問題4

行列式を計算して, 未知数の値を求めてください.

解 分母は x_1 と x_2 とのどちらでも同じです.

$$\begin{aligned} \text{分母} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} &= 4 \times 10 - 5 \times 8 \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 \text{ の分子} \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 14 & 10 \end{vmatrix} &= 7 \times 10 - 5 \times 14 \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 \text{ の分子} \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 14 \end{vmatrix} &= 4 \times 14 - 7 \times 8 \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{0}{0}.$$

$$x_2 = \frac{0}{0}.$$

解は**無数に存在**します.

Q2 解は具体的にどのような値でしょうか？

第2式

$$8x_1 + 10x_2 = 14$$

の両辺に $\frac{1}{2}$ を掛けるとわかるように, 第1式

$$4x_1 + 5x_2 = 7$$

と一致します. 実質的な方程式は第1式だけしかないから

★ 本書 p.364

$$x_1 = t \quad (t \text{ は任意の実数})$$

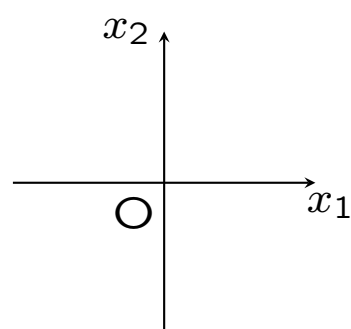
とおくと

$$x_2 = \frac{7 - 4t}{5}$$

となります.

例 $t = 0$ を選ぶと $x_1 = 0, x_2 = \frac{7}{5}$. $t = 1$ を選ぶと $x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{5}$.

問題5 $4x_1 + 5x_2 = 7$ のグラフを描いてください.



よこ軸： x_1 ，たて軸： x_2 .

- ★ $x_2 = \dots$ に書き換え**ない**で，この方程式のままグラフを描きます.
- x_1 を含む項を右辺に移項するとき

$$x_2 = -\frac{4}{5}x_1 + \frac{7}{5}$$

の符号をまちがうおそれがあります.

- 係数が分数になるので，整数よりも扱いにくくなります.

もとの**方程式は無傷のまま**直線を描く.

解 直線上のすべての点が方程式 $4x_1 + 5x_2 = 7$ を満たします.

$$4x_1 + 5x_2 = 7$$

の「 $4x_1$ 」を手で隠す (「 $x_1 = 0$ のときを考える」という意味) と

$$5x_2 = 7$$

から暗算で直ちに

$$x_2 = \frac{7}{5}$$

とわかります.

$$4x_1 + 5x_2 = 7$$

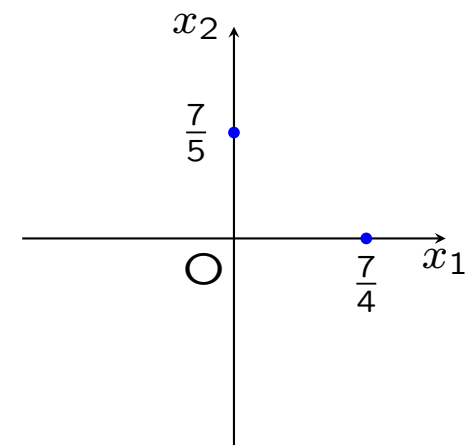
の「 $5x_2$ 」を手で隠す (「 $x_2 = 0$ のときを考える」という意味) と

$$4x_1 = 7$$

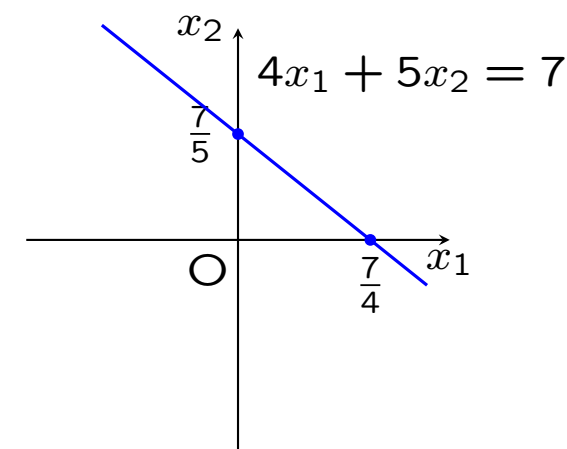
から暗算で直ちに

$$x_1 = \frac{7}{4}$$

とわかります.



2点を通る直線を引く.



Why クラメル Cramerの方法で解が求まる理由

★ 本書 p.363

例1
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 10 & \text{①} \\ 3x_1 + 7x_2 = 9 & \text{②} \end{cases}$$

x_2 を消去するために, ① $\times 7 -$ ② $\times 5$ をつくります.

$$\begin{array}{r} 7 \times 2x_1 + 7 \times 5x_2 = 10 \times 7 \\ -) \quad 5 \times 3x_1 + 5 \times 7x_2 = 5 \times 9 \\ \hline \end{array}$$

$$(2 \times 7 - 5 \times 3)x_1 = 10 \times 7 - 5 \times 9$$

$$x_1 = \frac{10 \times 7 - 5 \times 9}{2 \times 7 - 5 \times 3}$$

一致

一致

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 10 & 5 \\ 9 & 7 \\ \hline 2 & 5 \\ 3 & 7 \\ \hline \end{array}$$

自習

x_2 も確かめてください.

発展 3元連立1次方程式

2次の行列式 $\begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix}$ $\stackrel{\text{定義}}{=} +\bullet \times \bullet - \bullet \times \bullet$.

3次の行列式 $\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{vmatrix}$ $\stackrel{\text{定義}}{=} +\bullet \begin{vmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{vmatrix} - \bullet \begin{vmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{vmatrix} + \bullet \begin{vmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{vmatrix}$.

$\begin{vmatrix} \bullet & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{matrix}} & \\ & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & \bullet & \\ & \boxed{\begin{matrix} \circ \\ \circ \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \circ \\ \circ \end{matrix}} \\ & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & \bullet \\ & \boxed{\begin{matrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{matrix}} & \\ & & \end{vmatrix}$ ★ 本書 p.365

ク ラ メ ー ル

Cramerの方法

例
$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 7 \\ -1x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

解の表し方

★ 本書 p.367

分子： x_1 の係数の上に定数項

$$x_1 = \frac{\begin{array}{c|ccc} & \downarrow & & & \\ 4 & 2 & 3 & \\ 7 & 5 & 4 & \\ 5 & 3 & 2 & \\ \hline 1 & 2 & 3 & \\ 2 & 5 & 4 & \\ -1 & 3 & 2 & \\ \hline & \uparrow & & \\ & \text{分母：係数} & & \end{array}}{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{array}}.$$

分子： x_2 の係数の上に定数項

$$x_2 = \frac{\begin{array}{c|ccc} & & \downarrow & & \\ 1 & 4 & 3 & \\ 2 & 7 & 4 & \\ -1 & 5 & 2 & \\ \hline 1 & 2 & 3 & \\ 2 & 5 & 4 & \\ -1 & 3 & 2 & \\ \hline & & \uparrow & \\ & & \text{分母：係数} & \end{array}}{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{array}}.$$

分子： x_3 の係数の上に定数項

$$x_3 = \frac{\begin{array}{c|ccc} & & & \downarrow & \\ 1 & 2 & 4 & \\ 2 & 5 & 7 & \\ -1 & 3 & 5 & \\ \hline 1 & 2 & 3 & \\ 2 & 5 & 4 & \\ -1 & 3 & 2 & \\ \hline & & & \uparrow & \\ & & & \text{分母：係数} & \end{array}}{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{array}}.$$

問題 6

分母, x_1 の分子, x_2 の分子, x_3 の分子の行列式を計算して,
解を求めてください.

$$\text{分母} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$x_1 \text{ の分子} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$x_2 \text{ の分子} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$x_3 \text{ の分子} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

解 分母

$$\begin{aligned} & +1 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times (-2) - 2 \times 8 + 3 \times 11 \\ &= 15. \end{aligned}$$

x_1 の分子

$$\begin{aligned} & +4 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 4 \times (-2) - 2 \times (-6) + 3 \times (-4) \\ &= -8. \end{aligned}$$

x_2 の分子

$$\begin{aligned} & +1 \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times (-6) - 4 \times 8 + 3 \times 17 \\ &= 13. \end{aligned}$$

x_3 の分子

$$\begin{aligned} & +1 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times 4 - 2 \times 17 + 4 \times 11 \\ &= 14. \end{aligned}$$

解

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{8}{15} \\ x_2 = \frac{13}{15} \\ x_3 = \frac{14}{15} \end{cases}$$

自習 計算練習 本書 pp.362 – 369

次回のための予習 行列式の性質 本書 pp.371 – 377