

数学オフィスアワー 現場で出会う微積分・線型代数
ダイジェスト版 10

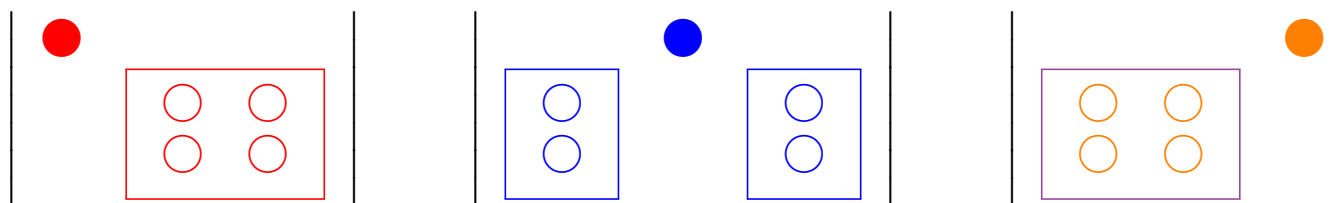
前回 行列式の定義

今回 行列式の性質

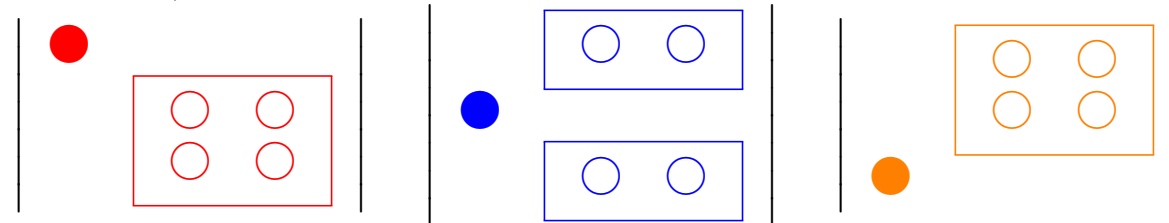
★ 数の特徴によって、行列式の定義ではなく、性質を活用すると簡単に計算できる例があります。

行展開と列展開

行展開 $\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{vmatrix} \stackrel{\text{定義}}{=} +\bullet \begin{vmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{vmatrix} -\bullet \begin{vmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{vmatrix} +\bullet \begin{vmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{vmatrix}.$



列展開 $\begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} = +\bullet \begin{vmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{vmatrix} -\bullet \begin{vmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{vmatrix} +\bullet \begin{vmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{vmatrix}.$ ★ 本書 p.365 問 5.3



Q1 どんなときに行展開と列展開とのどちらを使うのでしょうか？

例 行展開 $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}$

計算の手間が省ける.

例 列展開 $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

計算の手間が省ける.

行列式を簡単に計算する工夫

簡単のために,2次または3次の行列式で練習します.

導入

Q2 203×197 を暗算してください.

★ 中学数学の知識で暗算できます.

$$\begin{aligned} & 203 \times 197 \\ &= (200 + 3)(200 - 3) \\ &= 200^2 - 3^2 \\ &= 39991. \end{aligned}$$

なぜ中学数学で

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

を学んだのかを考えましょう.

この計算とは異なりますが, **行列式**の**性質**を活用すると, **行列式**を簡単に計算することができます.

行列式の性質

★ 本書 p.371

性質 1 $\begin{vmatrix} a+e & b+f \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ c & d \end{vmatrix}.$

Why $\begin{vmatrix} a+e & b+f \\ c & d \end{vmatrix} = (a+e)d - (b+f)c$
 $= ad + ed - bc - fc$
 $= (ad - bc) + (ed - fc)$
 $= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ c & d \end{vmatrix}.$

自習 $\begin{vmatrix} a+e & b \\ c+f & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}$ を確かめてください.

例 $\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -6 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (-2)+2 & 7 \\ (-6)+6 & 5 \end{vmatrix} = 0.$

性質2 $\begin{vmatrix} a & bs \\ c & ds \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}_s \quad (s \neq 0).$ ★ 本書 p.372

Why

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & bs \\ c & ds \end{vmatrix} &= ad_s - b_sc \\ &= (ad - bc)_s \\ &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}_s. \end{aligned}$$

自習1

 $\begin{vmatrix} as & bs \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}_s$ を確かめてください.

問題1

 $\begin{vmatrix} as & b \\ c & ds \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}_s$ を確かめてください.

★ 左辺と右辺を計算して、両者が一致しないことを示す.

解

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a\textcolor{blue}{s} & b \\ c & d\textcolor{blue}{s} \end{vmatrix} &= a\textcolor{blue}{s} \cdot d\textcolor{blue}{s} - bc \\ &= ad\textcolor{blue}{s}^2 - bc.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \textcolor{blue}{s} &= (ad - bc)\textcolor{blue}{s} \\ &= ad\textcolor{blue}{s} - bc\textcolor{blue}{s}.\end{aligned}$$

注意 $\begin{vmatrix} a\textcolor{blue}{s} & b \\ c & d\textcolor{blue}{s} \end{vmatrix}$ は性質2ではありません.

問題2 性質2を活用して, $\begin{vmatrix} 32 & 64 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ を計算してください.

解

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 32 & 64 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 \cdot 32 & 2 \cdot 32 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} 32 \\ &= (1 \times 4 - 2 \times 3) \times 32 \\ &= -64.\end{aligned}$$

★ 定義どおりの

$$32 \times 4 - 64 \times 3$$

は

$$1 \times 4 - 2 \times 3$$

よりも計算しにくい.

性質3 行または列の交換で符号が変わる.

★ 本書 p.373

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}.$$

$$\begin{array}{l} \boxed{\text{Why}} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \\ = -(bc - ad) \\ = - \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}. \end{array}$$

$$\boxed{\text{問題3}} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} \quad \text{を確かめてください.}$$

解

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \stackrel{\text{定義}}{=} a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} &\stackrel{\text{定義}}{=} a \begin{vmatrix} h & i \\ e & f \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} g & i \\ d & f \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} g & h \\ d & e \end{vmatrix} \\ &= a \cdot \left(- \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} \right) - b \cdot \left(- \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} \right) + c \cdot \left(- \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \right) \\ &= - \left(a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \right) \\ &= - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

例
$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{行展開}} - \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

★ $1 \ 0 \ 0$ を第1行に移すと, 行展開が簡単になる.

性質3' 同じ行または列を含む行列式の値は0.

★ 本書 p.373

例

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Why

性質3を使うと

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

◀ 1行と3行との交換.

となります. 右辺を移項して

$$2 \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0 \quad \leftarrow \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

を2で割ります.

性質 4 $\begin{vmatrix} a & b + as \\ c & d + cs \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$

★ 本書 p.374

Why $\begin{vmatrix} a & b + as \\ c & d + cs \end{vmatrix} \stackrel{\text{性質 1}}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & as \\ c & cs \end{vmatrix}$

$\stackrel{\text{性質 2}}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} s$

$\stackrel{\text{性質 3'}}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$

問題 4 性質 4 を活用して,

$$\begin{vmatrix} 100 & 99 & 100 \\ 99 & 100 & 101 \\ 101 & 101 & 99 \end{vmatrix}$$

を計算してください.

解

多くの0, 1をつくる

$$\begin{vmatrix} 100 & 99 & 100 \\ 99 & 100 & 101 \\ 101 & 101 & 99 \end{vmatrix}$$

第1行+第2行
+第3行

300でくくる.

第2列-第1列
第3列-第1列

行展開

=

=

$$\begin{vmatrix} 300 & 300 & 300 \\ 99 & 100 & 101 \\ 101 & 101 & 99 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 99 & 100 & 101 \\ 101 & 101 & 99 \end{vmatrix} \times 300$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 99 & 1 & 2 \\ 101 & 0 & -2 \end{vmatrix} \times 300$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \times 300$$

$$\{1 \times (-2) - 2 \times 0\} \times 300 \\ = -600.$$

4 次の行列式

4 元連立 1 次方程式の解法に必要な行列式

★ 本書 p.366

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{vmatrix}$$

定義

$$= +\bullet \begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{vmatrix} - \bullet \begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{vmatrix} + \bullet \begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{vmatrix} - \bullet \begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} \bullet & \boxed{\begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{vmatrix}} \\ \bullet & \boxed{\begin{vmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{vmatrix}} \\ \bullet & \boxed{\begin{vmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{vmatrix}} \\ \bullet & \boxed{\begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{vmatrix}} \end{vmatrix}$$

右辺の 3 次の行列式を計算します.

問題5

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 6 \\ 3 & 8 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

を計算してください.

★ 4 次の行列式の定義にしたがって $\begin{vmatrix} \textcolor{red}{2} & \textcolor{blue}{4} & \textcolor{violet}{1} & \textcolor{orange}{6} \\ 3 & 8 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ を

$$\textcolor{red}{+2} \begin{vmatrix} \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{vmatrix} - \textcolor{blue}{4} \begin{vmatrix} \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{vmatrix} + \textcolor{violet}{+1} \begin{vmatrix} \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{vmatrix} - \textcolor{orange}{6} \begin{vmatrix} \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{vmatrix}$$

のように行展開する.

解

$$\begin{aligned}
 & +2 \begin{vmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 6 & -1 & 0 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ \color{red}{1} & -1 & 0 \\ \color{red}{0} & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 8 & 5 \\ \color{red}{1} & 6 & 0 \\ \color{red}{0} & 8 & 1 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 3 & 8 & 2 \\ \color{red}{1} & 6 & -1 \\ \color{red}{0} & 8 & 1 \end{vmatrix} \\
 = & 2 \left\{ 8 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} \right\} \quad \blacktriangleleft \text{行展開} \\
 & - 4 \left\{ 3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \color{red}{1} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \color{red}{0} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right\} \quad \blacktriangleleft \text{列展開} \\
 & + 1 \left\{ 3 \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} - \color{red}{1} \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + \color{red}{0} \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \right\} \quad \blacktriangleleft \text{列展開} \\
 & - 6 \left\{ 3 \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} - \color{red}{1} \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + \color{red}{0} \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} \right\} \quad \blacktriangleleft \text{列展開} \\
 = & 2 \times 50 - 4 \times 0 + 50 - 6 \times 50 \\
 = & -150.
 \end{aligned}$$

自習 計算練習 本書 pp.371 – 377

次回のための予習 Cramerの方法の応用

- 逆マトリックス 本書 pp.377 – 384
- 最小二乗法 本書 pp.384 – 389