

数学オフィスアワー 現場で出会う微積分・線型代数
ダイジェスト版 6

前回

表1 物質I, IIの成分

成分 \ 物質	I	II
1	3 g/cm ³	2 g/cm ³
2	4 g/cm ³	5 g/cm ³

$$\text{線型結合} \begin{pmatrix} 3 \text{ g/cm}^3 \\ 4 \text{ g/cm}^3 \end{pmatrix} 2 \text{ cm}^3 + \begin{pmatrix} 2 \text{ g/cm}^3 \\ 5 \text{ g/cm}^3 \end{pmatrix} 3 \text{ cm}^3 = \begin{pmatrix} 12 \text{ g} \\ 23 \text{ g} \end{pmatrix}.$$

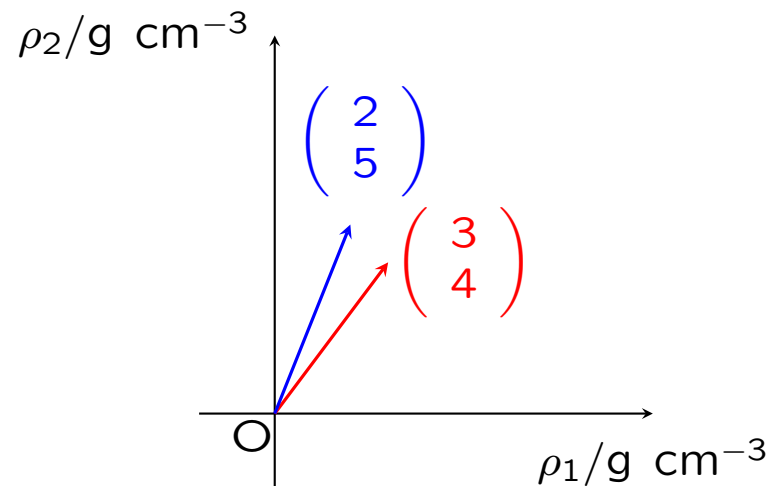
今回

線型独立・線型従属

線型独立・線型従属

★ 本書 pp.325 – 327

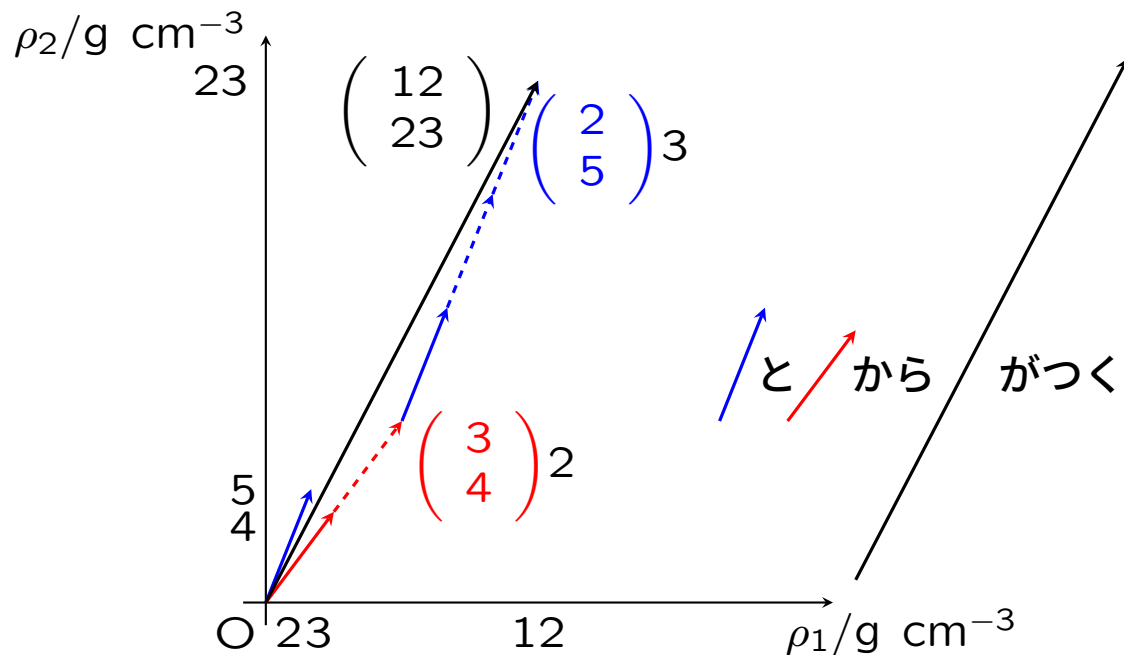
	物質I	物質II
成分1	$\left(3 \text{ g/cm}^3 \right)$	$\left(2 \text{ g/cm}^3 \right)$
成分2	$\left(4 \text{ g/cm}^3 \right)$	$\left(5 \text{ g/cm}^3 \right)$



線型独立 一方を拡大・縮小(**スカラー倍**)しても他方を表せません.
物質Iの成分組成は物質IIの成分組成と**無関係**です.

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 3 \text{ g/cm}^3 \\ 4 \text{ g/cm}^3 \end{pmatrix} 2 \text{ cm}^3}^{\text{物質 I}} + \overbrace{\begin{pmatrix} 2 \text{ g/cm}^3 \\ 5 \text{ g/cm}^3 \end{pmatrix} 3 \text{ cm}^3}^{\text{物質 II}} = \overbrace{\begin{pmatrix} 12 \text{ g} \\ 23 \text{ g} \end{pmatrix}}^{\text{混合物}} \begin{matrix} \text{成分 1} \\ \text{成分 2} \end{matrix}$$

本書 p.322



線型従属

三つのベクトル量は
線型独立ではありません。
混合物の成分組成は
I, IIの成分組成で
決まります。

二つのベクトル量で他のベクトル量をつくることできる。

線型独立

一つのベクトル(ベクトル量)が他のベクトル(ベクトル量)の線型結合で表せない.

線型従属

一つのベクトル(ベクトル量)が他のベクトル(ベクトル量)の線型結合で表せる.

問題 1 $\begin{pmatrix} 12 \\ 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} 2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} 3$ と表せます.

(1) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 12 \\ 23 \end{pmatrix}$ との線型結合で表せることを確かめてください.

(2) $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 12 \\ 23 \end{pmatrix}$ との線型結合で表せることを確かめてください.

解 (1)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} 2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} 3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 23 \end{pmatrix}$$

の左辺第2項を移項して

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} 2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} (-3) + \begin{pmatrix} 12 \\ 23 \end{pmatrix}$$

を $\frac{1}{2}$ 倍すると

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \left(-\frac{3}{2}\right) + \begin{pmatrix} 12 \\ 23 \end{pmatrix} \frac{1}{2}$$

と表せます.

(2)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} 2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} 3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 23 \end{pmatrix}$$

の左辺第1項を移項して

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} 3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} (-2) + \begin{pmatrix} 12 \\ 23 \end{pmatrix}$$

を $\frac{1}{3}$ 倍すると

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \left(-\frac{2}{3}\right) + \begin{pmatrix} 12 \\ 23 \end{pmatrix} \frac{1}{3}$$

と表せます.

線型独立性の判定

★ 本書 p.328

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} 2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} 3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 23 \end{pmatrix}$$


を

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} 2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} 3 + \begin{pmatrix} 12 \\ 23 \end{pmatrix} (-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



「すべての係数が0」でなくとも零ベクトルがつくれる.

線型従属と判断

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} 0 + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



「すべての係数が0」のとき**零ベクトル**がつかれる.

線型独立と判断

問題 2

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は線型独立と線型従属とのどちらでしょうか？

解

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} 0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} 0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$


「すべての係数が0」のとき**零ベクトル**がつかれる.

線型独立と判断

問題3 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ は線型独立と線型従属とのどちら
 でしょうか？

解
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} 2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} 3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} 4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

の右辺を移項すると

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} 2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} 3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} 4 + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} (-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

↑ ↑ ↑ ↑
「すべての係数が0」でなくとも零ベクトルがつくれる.

線型従属と判断

マトリクス量の表す意味と使い方

★ 本書 pp.330 – 334

matrix

例

方阵

↓ ↓

四並
角び

マトリクス $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$
数の並び

正方形, 長方形.

マトリクス量 $\begin{pmatrix} 3本/セット & 2本/セット \\ 5個/セット & 4個/セット \end{pmatrix}$
量の並び

表1

品目	詰合	
	I	II
牛乳	3本/セット	2本/セット
バター	5個/セット	4個/セット

表2

成分	品目	
	牛乳	バター
1	0.5 mg/本	0.2 mg/個
2	0.3 mg/本	0.6 mg/個

/... 「... あたり」 per

本/セット 「セットあたり何本」

基本 (一つあたりいくら)×(いくら分)

注意 (いくら分)×(一つあたりいくら)も正しいが,どちらかに決めます. ★ 本書 p.316,p.330

ステップ1 1品目

比例の関係

量の関係式 $\overbrace{6\text{本}}^y = \overbrace{3\text{本/セット}}^a \times \overbrace{2\text{セット}}^x$. y, a, x は量を表します.

数の関係式 $\overbrace{6}^y = \overbrace{3}^a \times \overbrace{2}^x$. y, a, x は数を表します.

ステップ2 2種類の詰合の中の1品目

比例の関係が成り立つかどうか？

表 1

詰合 品目	I	II
	II	I
牛乳	3本 / セット	2本 / セット
バター	5個 / セット	4個 / セット

例 I：3セット，II：2セットのときの牛乳の本数

★ 本書 p.332

$$\overbrace{3\text{本/セット} \times 3\text{セット}}^{\text{I}} + \overbrace{2\text{本/セット} \times 2\text{セット}}^{\text{II}} = 13\text{本} \quad \blacktriangleleft \text{本/セット} \times \text{セット} = \text{本.}$$

を一つの乗法で表すように工夫すると比例の関係が成り立ちます。

(一つあたりいくら) × (いくつ分) を

(セットあたり何本の組) × (何セットの組)

◀ 「セットあたり何本の組」と
「何セットの組」とに**類別**.

の形で

$$\text{量の関係式 } \overbrace{13 \text{ 本}}^y = \overbrace{\left(\begin{array}{cc} 3 \text{ 本/セット} & 2 \text{ 本/セット} \end{array} \right)}^{a'} \overbrace{\left(\begin{array}{c} 3 \text{ セット} \\ 2 \text{ セット} \end{array} \right)}^x, \quad y, a', x \text{ は量.}$$

$$\text{数の関係式 } \overbrace{13}^y = \overbrace{\left(\begin{array}{cc} 3 & 2 \end{array} \right)}^{a'} \overbrace{\left(\begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \right)}^x \quad y, a', x \text{ は数.}$$

と表します.

★ 本書 p.6, p.320, ダイジェスト版1 pp.8 – 9

ヨコベクトル量とタテベクトル量とを区別するとき, ヨコベクトル量にプライム (') を打ちます.

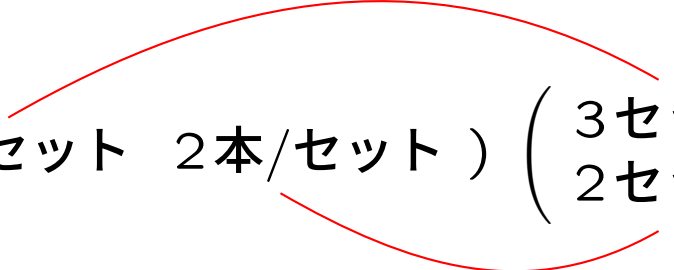
ヨコベクトルとタテベクトルとを区別するとき, ヨコベクトルにプライム (') を打ちます.

ヨコベクトル量 \times タテベクトル量 = スカラー量,

ヨコベクトル \times タテベクトル = スカラー

をスカラー積 (積がスカラー量またはスカラー) といいます.

対応させて掛ける.


$$\left(\begin{array}{cc} 3 \text{本/セット} & 2 \text{本/セット} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 3 \text{セット} \\ 2 \text{セット} \end{array} \right)$$

対応させて掛ける.

◀ 「セットあたり何本の組」と
「何セットの組」とに類別.

問題 4

$\left(\begin{array}{cc} 3 \text{本/セット} & 2 \text{本/セット} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 6 \text{セット} \\ 4 \text{セット} \end{array} \right)$ を計算してください.

解

$$\begin{aligned} & (3\text{本/セット} \quad 2\text{本/セット}) \begin{pmatrix} 6\text{セット} \\ 4\text{セット} \end{pmatrix} \\ = & 3\text{本/セット} \times 6\text{セット} + 2\text{本/セット} \times 4\text{セット} \\ = & 18\text{本} + 8\text{本} \\ = & 26\text{本}. \end{aligned}$$

比例

		一つあたりいくら α'	いくら分 \times
y	=		
13本	=	$(3\text{本/セット} \quad 2\text{本/セット})$	$\begin{pmatrix} 3\text{セット} \\ 2\text{セット} \end{pmatrix}$
\downarrow 2倍			2倍 \downarrow
26本	=	$(3\text{本/セット} \quad 2\text{本/セット})$	$\begin{pmatrix} 6\text{セット} \\ 4\text{セット} \end{pmatrix}$

ステップ3

2種類の詰合の中の2品目

比例の関係が成り立つかどうか？

例

I：3セット，II：2セットのときの牛乳の本数とバターの個数

表 1		
詰合 品目	I	II
	牛乳 3本 / セット	2本 / セット
バター	5個 / セット	4個 / セット

$(3\text{本/セット} \quad 2\text{本/セット}) \begin{pmatrix} 3\text{セット} \\ 2\text{セット} \end{pmatrix}$ を

$\underbrace{\begin{pmatrix} 3\text{本/セット} & 2\text{本/セット} \\ 5\text{個/セット} & 4\text{個/セット} \end{pmatrix}}_{\text{表 1 のとおりの並べ方}} \begin{pmatrix} 3\text{セット} \\ 2\text{セット} \end{pmatrix}$

に拡張します.

★ 本書 pp.333 – 335

$$\begin{pmatrix} \boxed{\text{3本/セット} \quad \text{2本/セット}} \\ \boxed{\text{5個/セット} \quad \text{4個/セット}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\text{3セット}} \\ \boxed{\text{2セット}} \end{pmatrix}$$

ヨコベクトル量の並びと見ます。

$$\begin{pmatrix} \boxed{\text{3本/セット} \quad \text{2本/セット}} \\ \boxed{\text{5個/セット} \quad \text{4個/セット}} \end{pmatrix} \text{ と } \begin{pmatrix} \boxed{\text{3セット}} \\ \boxed{\text{2セット}} \end{pmatrix} \text{ とのスカラー積,}$$
$$\begin{pmatrix} \boxed{\text{5個/セット} \quad \text{4個/セット}} \end{pmatrix} \text{ と } \begin{pmatrix} \boxed{\text{3セット}} \\ \boxed{\text{2セット}} \end{pmatrix} \text{ とのスカラー積}$$

を計算して,これらの量を第1行,第2行に並べたタテベクトル量をつくります。

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 3\text{本/セット} & 2\text{本/セット} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\text{セット} \\ 2\text{セット} \end{pmatrix} \\
 = & 3\text{本/セット} \times 3\text{セット} + 2\text{本/セット} \times 2\text{セット} \\
 = & 9\text{本} + 4\text{本} \\
 = & 13\text{本}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 5\text{個/セット} & 4\text{個/セット} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\text{セット} \\ 2\text{セット} \end{pmatrix} \\
 = & 5\text{個/セット} \times 3\text{セット} + 4\text{個/セット} \times 2\text{セット} \\
 = & 15\text{個} + 8\text{個} \\
 = & 23\text{個}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{3\text{本/セット} \quad 2\text{本/セット}} \\ \boxed{5\text{個/セット} \quad 4\text{個/セット}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{3\text{セット}} \\ \boxed{2\text{セット}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{13\text{本}} \\ \boxed{23\text{個}} \end{pmatrix}.$$

問題5

$\begin{pmatrix} 3\text{本/セット} & 2\text{本/セット} \\ 5\text{個/セット} & 4\text{個/セット} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9\text{セット} \\ 6\text{セット} \end{pmatrix}$ を計算してください.

解

$$\begin{pmatrix} \boxed{3\text{本/セット} \quad 2\text{本/セット}} \\ \boxed{5\text{個/セット} \quad 4\text{個/セット}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{9\text{セット}} \\ \boxed{6\text{セット}} \end{pmatrix}$$

ヨコベクトル量の並びと見ます。

ヨコベクトル量とタテベクトル量とのスカラー積を計算して、第1行と第2行に並べます。

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \boxed{3\text{本/セット} \quad 2\text{本/セット}} \\ \boxed{5\text{個/セット} \quad 4\text{個/セット}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{9\text{セット}} \\ \boxed{6\text{セット}} \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \boxed{3\text{本/セット}} \times 9\text{セット} + \boxed{2\text{本/セット}} \times 6\text{セット} \\ \boxed{5\text{個/セット}} \times 9\text{セット} + \boxed{4\text{個/セット}} \times 6\text{セット} \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \boxed{39\text{本}} \\ \boxed{69\text{個}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

比例

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{一つあたりいくら} & \text{いくら分} \\
 \begin{array}{c} y \\ \left(\begin{array}{c} 13 \text{本} \\ 23 \text{個} \end{array} \right) \end{array} & = & \begin{array}{c} A \\ \left(\begin{array}{cc} 3 \text{本/セット} & 2 \text{本/セット} \\ 5 \text{個/セット} & 4 \text{個/セット} \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} x \\ \left(\begin{array}{c} 3 \text{セット} \\ 2 \text{セット} \end{array} \right) \end{array} \\
 \downarrow \text{3倍} & & \text{3倍} \downarrow \\
 \left(\begin{array}{c} 39 \text{本} \\ 69 \text{個} \end{array} \right) & = & \left(\begin{array}{cc} 3 \text{本/セット} & 2 \text{本/セット} \\ 5 \text{個/セット} & 4 \text{個/セット} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 9 \text{セット} \\ 6 \text{セット} \end{array} \right)
 \end{array}$$

マトリックス量 $\begin{pmatrix} 3 \text{本/セット} & 2 \text{本/セット} \\ 5 \text{個/セット} & 4 \text{個/セット} \end{pmatrix}$, マトリックス $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ は
比例定数の拡張です.

ベクトル, ベクトル量は太文字, マトリックス, マトリックス量は大文字で表します.

x y A

	第1列	第2列
第1行	3本/セット	2本/セット
第2行	5個/セット	4個/セット

列
列はタテ.

自習 ★ 本書 pp.331 – 335 問題

- 実際に式を書いて計算練習すること.

次回のための予習

マトリックス量の加法 [本書 p.337](#)

マトリックス量の乗法 — 合成写像 [本書 p.339](#)