

数学オフィスアワー 現場で出会う微積分・線型代数
ダイジェスト版 8

マトリックスの乗法の注意

単位マトリックス

★ 本書 p.344

正方マトリックスで

対角成分 (最も左上から最も右下にかけての対角線方向の成分) が **1**,
非対角成分が **0**.

例

2×2 (2行2列) マトリックス

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3×3 (3行3列) マトリックス

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

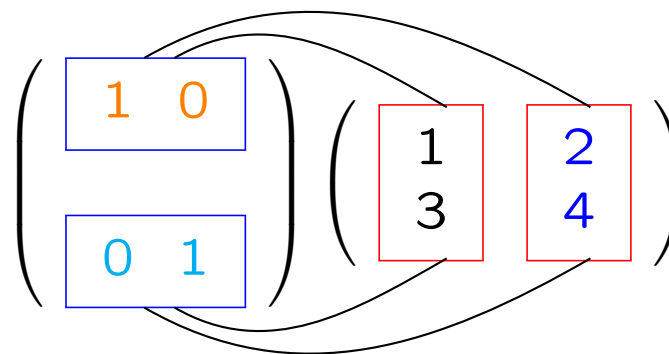
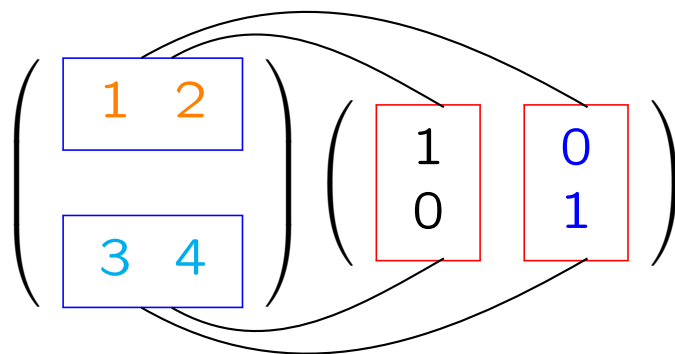
問題 1 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ を計算してください.

解

二つのマトリックスを掛ける計算
左側はヨコ方向の数の並び, 右側はタテ方向の数の並びと見ます.

四つのスカラー積をつくります.

★ 本書 pp.342 – 343



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \textcolor{red}{1} & \textcolor{blue}{0} \\ \textcolor{blue}{0} & \textcolor{red}{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 0 & 1 \times 0 + 2 \times 1 \\ 3 \times 1 + 4 \times 0 & 3 \times 0 + 4 \times 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \textcolor{red}{1} & \textcolor{blue}{0} \\ \textcolor{blue}{0} & \textcolor{red}{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 0 \times 3 & 1 \times 2 + 0 \times 4 \\ 0 \times 1 + 1 \times 3 & 0 \times 2 + 1 \times 4 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

単位マトリックス $\begin{pmatrix} \textcolor{red}{1} & \textcolor{blue}{0} \\ \textcolor{blue}{0} & \textcolor{red}{1} \end{pmatrix}$ は数の乗法の1のはたらきをします.

記号 $A\textcolor{red}{I} = \textcolor{red}{I}A = A$. $\textcolor{red}{I}$ の代わりに $\textcolor{red}{E}$ と表すこともあります.

★ 本書 p.344

零マトリックス すべての成分が0.

★ 本書 p.345

例

2×2 (2行2列) マトリックス

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3×3 (3行3列) マトリックス

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2×3 (2行3列) マトリックス

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3×2 (3行2列) マトリックス

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

記号 O (大文字のオウ)

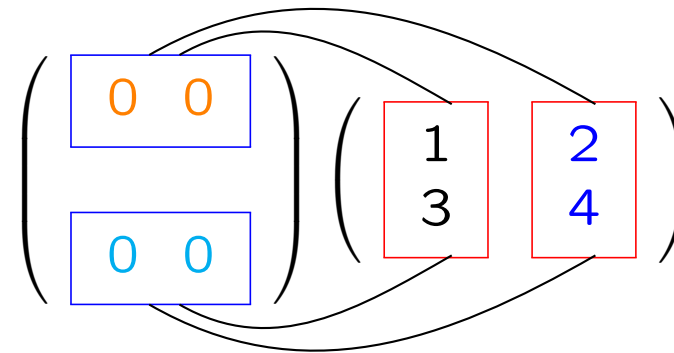
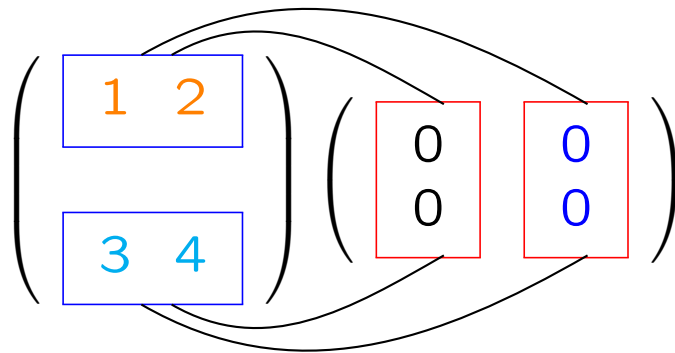
問題 2 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ を計算してください.

解

二つのマトリックスを掛ける計算
左側はヨコ方向の数の並び, 右側はタテ方向の数の並びと見ます.

四つのスカラー積をつくります.

★ 本書 pp.342 – 343



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 0 + 2 \times 0 & 1 \times 0 + 2 \times 0 \\ 3 \times 0 + 4 \times 0 & 3 \times 0 + 4 \times 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 1 + 0 \times 3 & 0 \times 2 + 0 \times 4 \\ 0 \times 1 + 0 \times 3 & 0 \times 2 + 0 \times 4 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

記号 $AO = OA = O$.

問題 3

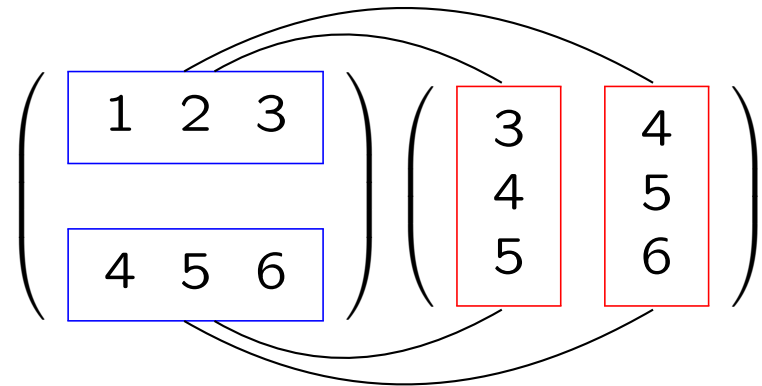
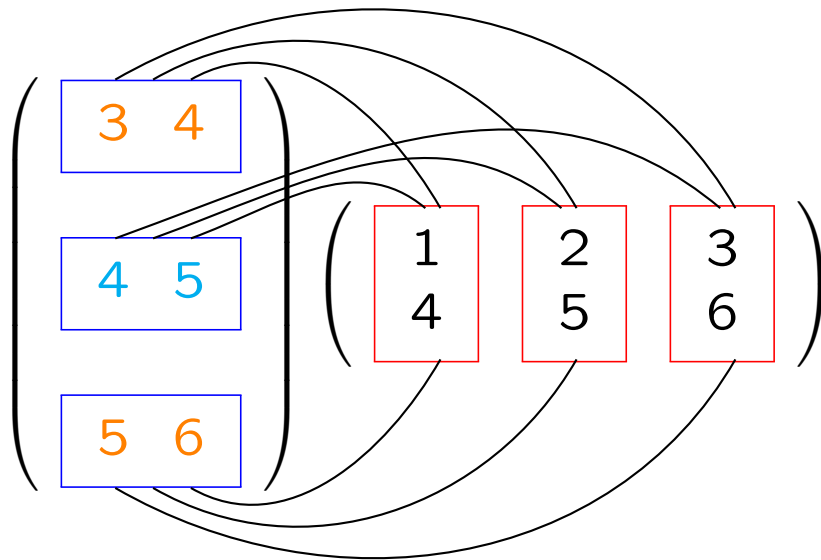
$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ を
計算してください.

解

二つのマトリックスを掛ける計算

左側はヨコ方向の数の並び, 右側はタテ方向の数の並びと見ます.

ヨコベクトルとタテベクトルのスカラー積をつくります. ★ 本書 pp.342 – 343



$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 1 + 4 \times 4 & 3 \times 2 + 4 \times 5 & 3 \times 3 + 4 \times 6 \\ 4 \times 1 + 5 \times 4 & 4 \times 2 + 5 \times 5 & 4 \times 3 + 5 \times 6 \\ 5 \times 1 + 6 \times 4 & 5 \times 2 + 6 \times 5 & 5 \times 3 + 6 \times 6 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 19 & 26 & 33 \\ 24 & 33 & 42 \\ 29 & 40 & 51 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 & 1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 \\ 4 \times 3 + 5 \times 4 + 6 \times 5 & 4 \times 4 + 5 \times 5 + 6 \times 6 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 26 & 32 \\ 62 & 77 \end{pmatrix}.$$

重要

一般に, マトリックスの乗法は**非可換**です.

★ 本書 p.345

$AB \neq BA$. 例外の一つ $AI = IA = A$ (I は単位マトリックス).

第1列 第2列 第1列 第2列 第3列

第1行 $\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$ 第1行

第2行 $\begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}$ 第2行

第3行 $\begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}$

3×2 2×3

一致しているからスカラー積が定義できる.

第1列 第2列 第3列 第1列 第2列

第1行 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 第1行

第2行 $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ 第2行

第3行 $\begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}$ 第3行

2×3 3×2

一致しているからスカラー積が定義できる.

第1列 第2列 第3列

第1行 $\begin{pmatrix} 19 & 26 & 33 \end{pmatrix}$

第2行 $\begin{pmatrix} 24 & 33 & 42 \end{pmatrix}$

第3行 $\begin{pmatrix} 29 & 40 & 51 \end{pmatrix}$

3×3

第1列 第2列

第1行 $\begin{pmatrix} 26 & 32 \end{pmatrix}$

第2行 $\begin{pmatrix} 62 & 77 \end{pmatrix}$

2×2

問題 4

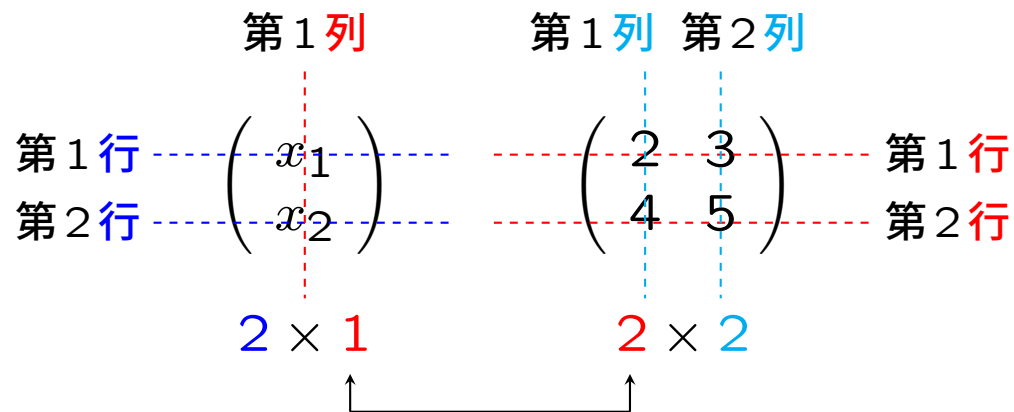
つぎの乗法は定義可以吗？

★ 本書 p.346 問 4.16(改題)

$$(1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$

解 (1)



一致していないからスカラー積が定義できない.

$$x_1 \times 2 + ? \times 4.$$

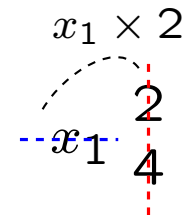
$$x_2 \times 2 + ? \times 4.$$

$$x_1 \times 3 + ? \times 5.$$

$$x_2 \times 3 + ? \times 5.$$

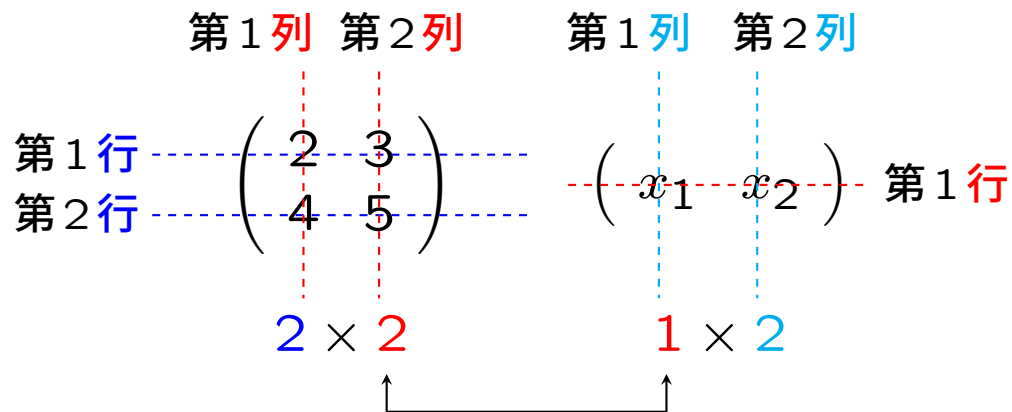
左側ではヨコ方向に数が1個しかないが,
ヨコ方向の数の並びと見ます.

右側はタテ方向の数の並びと見ます.



4に掛ける数が左側にありません.

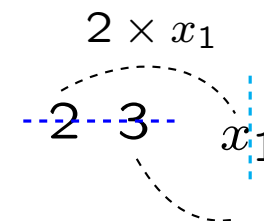
解 (2)



一致していないからスカラー積が定義できない.

$$\begin{aligned} 2 \times x_1 + 3 \times ? \\ 4 \times x_1 + 5 \times ? \\ 2 \times x_2 + 3 \times ? \\ 4 \times x_2 + 5 \times ? \end{aligned}$$

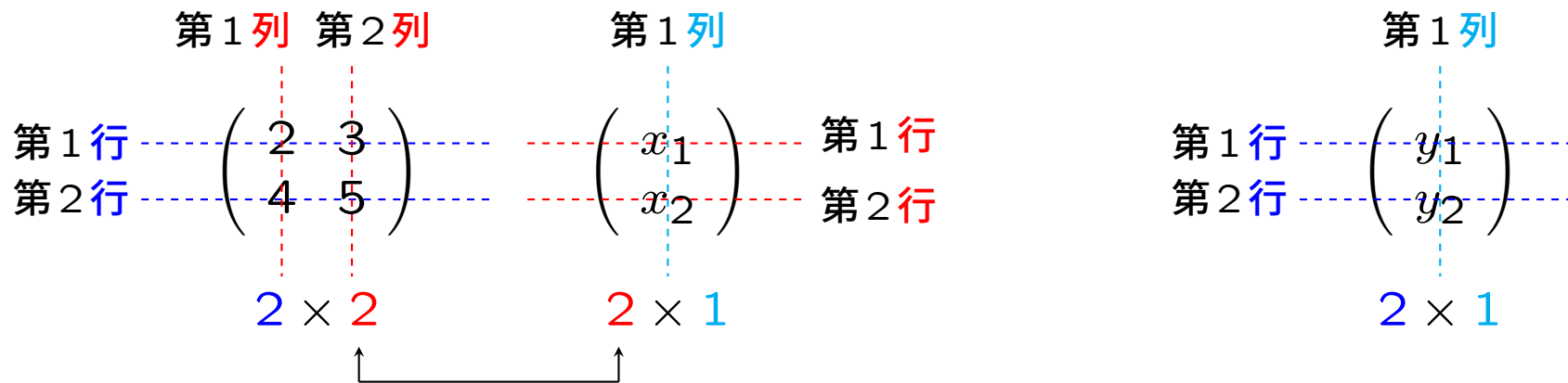
左側はヨコ方向の数の並びと見ます.
右側ではタテ方向に数が1個しかないが,
タテ方向の数の並びと見ます.



3を掛ける数が右側にありません.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

記号 比例 $y = Ax$.



$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 + 5x_2 \end{pmatrix}.$$

問題4(1)で $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ は定義できないことがわかりました.

転置 行と列とを入れ換える操作

★ 本書 pp.351 – 352

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ の転置マトリックスは $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ です.

問題5 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ を計算して, $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ と比べて
ください.

解

1×2

2×2

積は 1×2 マトリックス.



一致しているからスカラー積が定義できる.

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

◀ 二つのスカラー積をつくれます.

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 & 4x_1 + 5x_2 \end{pmatrix}. \quad \text{◀ 記号 } y' = x' {}^t A \text{ 転置 (transpose)}$$

2×2 2×1 積は 2×1 マトリックス.



一致しているからスカラー積が定義できる.

$$\begin{pmatrix} \boxed{2 \ 3} \\ \boxed{4 \ 5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{x_1} \\ \boxed{x_2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 + 5x_2 \end{pmatrix} . \quad \blacktriangleleft \text{記号} \quad y = Ax$$

注意

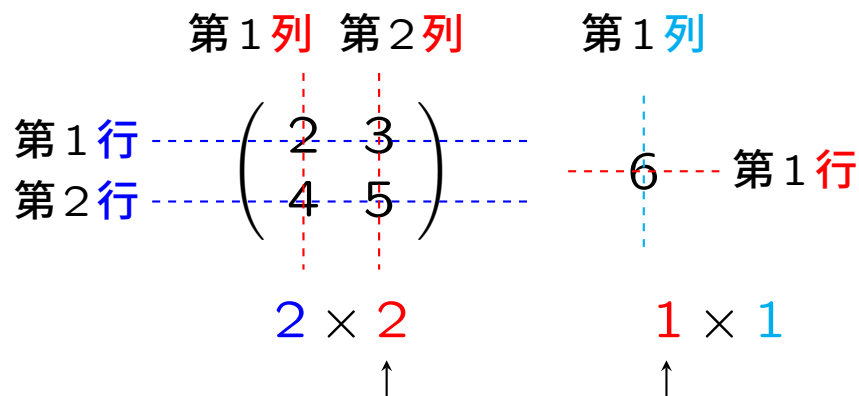
マトリックスのスカラー倍

★ 本書 pp.347 – 348

例

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} 6 \text{ は } \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ の略記とみなします.}$$

対角マトリックス

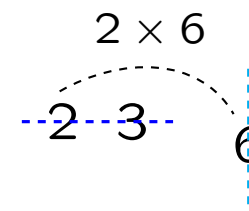


一致していないからスカラー積が定義できない.

$$2 \times 6 + 3 \times ?.$$

$$4 \times 6 + 5 \times ?.$$

左側はヨコ方向の数の並びと見ます.
右側ではタテ方向に数が1個しかないが,
タテ方向の数の並びと見ます.



3を掛ける数が右側にありません.

問題6

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ を計算してください.}$$

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

◀ 四つのスカラー積をつくれます.

$$= \begin{pmatrix} 2 \times 6 + 3 \times 0 & 2 \times 0 + 3 \times 6 \\ 4 \times 6 + 5 \times 0 & 4 \times 0 + 5 \times 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \times 6 & 3 \times 6 \\ 4 \times 6 & 5 \times 6 \end{pmatrix}$$

◀ すべての成分に6を掛ける計算であることがわかります.

$$= \begin{pmatrix} 12 & 18 \\ 24 & 30 \end{pmatrix}.$$

問題 7 $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$ を計算してください.

★ 計算結果を見て, マトリックスの乗法の重要な特徴に注意する.

解

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{pmatrix} \quad \blacktriangleleft \text{四つのスカラー積をつくれます。}$$

$$= \begin{pmatrix} (-3) \times 1 + 1 \times 3 & (-3) \times 4 + 1 \times 12 \\ 6 \times 1 + (-2) \times 3 & 6 \times 4 + (-2) \times 12 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

重要

ふつうの数の乗法とちがって,

$$A \neq O, B \neq O \text{ でも } AB = O$$

になる例があります.

★ 本書 pp.349 – 350

問題 8 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ を計算して, 各成分を和の記号 \sum で表してください.

★ 1 分間 考えてわからなかったら, [本書 pp.350 – 351](#) を見よ.

解

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12}} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{b_{11} \quad b_{12}} \\ \boxed{b_{21} \quad b_{22}} \end{pmatrix}$$

◀ 四つのスカラー積をつくります.

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \overset{(1,1) \text{ 成分}}{\sum_{k=1}^2 a_{1k}b_{k1}} & \overset{(1,2) \text{ 成分}}{\sum_{k=1}^2 a_{1k}b_{k2}} \\ \overset{(2,1) \text{ 成分}}{\sum_{k=1}^2 a_{2k}b_{k1}} & \overset{(2,2) \text{ 成分}}{\sum_{k=1}^2 a_{2k}b_{k2}} \end{pmatrix}.$$

自習

計算練習 本書 pp.344 – 350, pp.353 – 356, p.358, pp.360 – 361

次回のための予習

連立 1 次方程式の解法 本書 5.1 節, 5.2 節