

数学オフィスアワー 現場で出会う微積分・線型代数  
ダイジェスト版 11

## Cramerの方法の応用1

### 逆マトリックス — 逆数の発展

ねらい

$$\text{価格の組} = (\text{単価の並び}) \times (\text{個数の組})$$

$$\leftarrow \begin{array}{l} \text{タテベクトル量} \\ = \text{マトリックス量} \times \text{タテベクトル量} \end{array}$$

を

$$\text{個数の組} = \boxed{\phantom{000}} \times (\text{価格の組})$$

$$\leftarrow \begin{array}{l} \text{タテベクトル量} \\ = \text{マトリックス量} \times \text{タテベクトル量} \end{array}$$

に書き換える方法

$\boxed{\phantom{000}}$  の求め方：Cramerの方法を使います。

★ 本書 p.377

## 基本

### 1 品目の場合

$$\text{未知 } y = 5 \text{ 本/セット} \times \text{既知 } 3 \text{ セット.}$$

$$y = 15 \text{ 本.}$$

$$15 \text{ 本} = 5 \text{ 本/セット} \times \text{未知 } x.$$

$$x = \dots \text{ に書き換える.}$$

$$15 \text{ 本} = 5 \text{ 本/セット} \times x.$$



1 に書き換えるにはどうするか？

$$5 \text{ 本/セット} \times x = 15 \text{ 本.}$$

$$\underbrace{\frac{1}{5} \text{ セット/本} \times 5 \text{ 本/セット}}_1 \times x = \frac{1}{5} \text{ セット/本} \times 15 \text{ 本.}$$

$$x = 3 \text{ セット.}$$

左辺と右辺との入れ換え.

両辺に  $\frac{1}{5}$  セット/本 を掛ける.

$$1 \times x = x.$$

重要

逆数：ある数との積が1になる数. ★本書 p.380

## 発展

### 2品目の場合

★本書 p.378 表 4.3 (改題)

薬品 \ 詰合	I	II
HCl	5本/セット	6本/セット
H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	3本/セット	4本/セット

所望の本数を決めて、詰合を用意する場合

I：7セット，II：2セットのときの本数 HCl： $y_1$ ，H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>： $y_2$ ．

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\text{本/セット} & 6\text{本/セット} \\ 3\text{本/セット} & 4\text{本/セット} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7\text{セット} \\ 2\text{セット} \end{pmatrix} \cdot$$

未知  既知

## 問題 1

マトリックス量とタテベクトル量との乗法を計算して，

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{を求めてください.}$$

解

★本書 p.343

$$\begin{pmatrix} \boxed{5 \text{本/セット} \quad 6 \text{本/セット}} \\ \boxed{3 \text{本/セット} \quad 4 \text{本/セット}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{7 \text{セット}} \\ \boxed{2 \text{セット}} \end{pmatrix}$$

ヨコベクトル量の並びと見ます。

$$\begin{pmatrix} \boxed{5 \text{本/セット} \quad 6 \text{本/セット}} \end{pmatrix} \text{ と } \begin{pmatrix} \boxed{7 \text{セット}} \\ \boxed{2 \text{セット}} \end{pmatrix} \text{ とのスカラ乗積,}$$
$$\begin{pmatrix} \boxed{3 \text{本/セット} \quad 4 \text{本/セット}} \end{pmatrix} \text{ と } \begin{pmatrix} \boxed{7 \text{セット}} \\ \boxed{2 \text{セット}} \end{pmatrix} \text{ とのスカラ乗積}$$

を計算して、これらの量を第1行、第2行に並べたタテベクトル量

$$\begin{pmatrix} \boxed{5 \text{本/セット} \times 7 \text{セット} + 6 \text{本/セット} \times 2 \text{セット}} \\ \boxed{3 \text{本/セット} \times 7 \text{セット} + 4 \text{本/セット} \times 2 \text{セット}} \end{pmatrix}$$

をつくります。

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 \text{本} \\ 29 \text{本} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 47 \text{ 本} \\ 29 \text{ 本} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \text{ 本/セット} & 6 \text{ 本/セット} \\ 3 \text{ 本/セット} & 4 \text{ 本/セット} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

既知  未知

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \dots \text{ に書き換える.}$$

$$\begin{pmatrix} 47 \text{ 本} \\ 29 \text{ 本} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \text{ 本/セット} & 6 \text{ 本/セット} \\ 3 \text{ 本/セット} & 4 \text{ 本/セット} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

↓

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ に書き換えるにはどうするか ?}$$

$$\text{単位マトリックス} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

乗法の 1 と同じはたらき.

$$\begin{pmatrix} 5\text{本/セット} & 6\text{本/セット} \\ 3\text{本/セット} & 4\text{本/セット} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47\text{本} \\ 29\text{本} \end{pmatrix}.$$

左辺と右辺との入れ換え.

両辺に左から

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

を掛ける.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5\text{本/セット} & 6\text{本/セット} \\ 3\text{本/セット} & 4\text{本/セット} \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 47\text{本} \\ 29\text{本} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

**重要**

逆マトリックス量：あるマトリックス量との積が  
単位マトリックスになるマトリックス量

★ 本書 p.381

**注意** 逆マトリックス量は逆数を並べたマトリックス量ではありません.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \text{セット/本} & \frac{1}{6} \text{セット/本} \\ \frac{1}{3} \text{セット/本} & \frac{1}{4} \text{セット/本} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \text{本/セット} & 6 \text{本/セット} \\ 3 \text{本/セット} & 4 \text{本/セット} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Q1** どのようなマトリックス量を  $\begin{pmatrix} 5 \text{本/セット} & 6 \text{本/セット} \\ 3 \text{本/セット} & 4 \text{本/セット} \end{pmatrix}$  に掛けると  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  になるでしょうか？



## 逆マトリックス量の求め方

★本書 p.382

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5\text{本/セット} & 6\text{本/セット} \\ 3\text{本/セット} & 4\text{本/セット} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**手順 1**  $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5\text{本/セット} & 6\text{本/セット} \\ 3\text{本/セット} & 4\text{本/セット} \end{pmatrix}$  を求める.

**問題 2** マトリックス量どうしの乗法を計算してください.

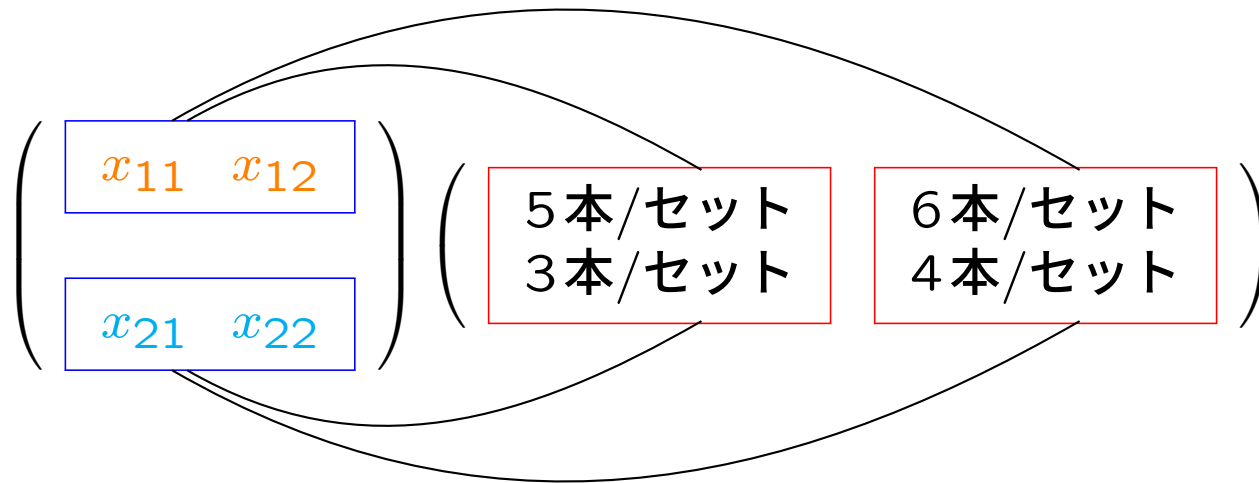
解

二つのマトリックス量を掛ける計算

左側はヨコ方向の量の並びと見ます. 右側はタテ方向の量の並びと見ます.

四つのスカラー積をつくれます.

★ 本書 pp.342 – 343



$$\begin{pmatrix} 5\text{本/セット} \times x_{11} + 3\text{本/セット} \times x_{12} & 6\text{本/セット} \times x_{11} + 4\text{本/セット} \times x_{12} \\ 5\text{本/セット} \times x_{21} + 3\text{本/セット} \times x_{22} & 6\text{本/セット} \times x_{21} + 4\text{本/セット} \times x_{22} \end{pmatrix}$$

## 手順2

$$\begin{pmatrix} 5\text{本/セット} \times x_{11} + 3\text{本/セット} \times x_{12} & 6\text{本/セット} \times x_{11} + 4\text{本/セット} \times x_{12} \\ 5\text{本/セット} \times x_{21} + 3\text{本/セット} \times x_{22} & 6\text{本/セット} \times x_{21} + 4\text{本/セット} \times x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の左辺と右辺で成分どうしを比べて、連立方程式を立てる.

$$\begin{cases} 5\text{本/セット} \times x_{11} + 3\text{本/セット} \times x_{12} = 1 \\ 6\text{本/セット} \times x_{11} + 4\text{本/セット} \times x_{12} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5\text{本/セット} \times x_{21} + 3\text{本/セット} \times x_{22} = 0 \\ 6\text{本/セット} \times x_{21} + 4\text{本/セット} \times x_{22} = 1 \end{cases}$$

## 問題3

Cramerの方法で  $x_{11}$ ,  $x_{12}$ ,  $x_{21}$ ,  $x_{22}$  を求めてください.

★ どちらの連立方程式も係数は同じであることに着目せよ.

解

どの分母も同じ．分子には1, 0が並んでいる列があるから計算が簡単です．

$$\begin{cases} 5\text{本/セット} \times x_{11} + 3\text{本/セット} \times x_{12} = 1 \\ 6\text{本/セット} \times x_{11} + 4\text{本/セット} \times x_{12} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5\text{本/セット} \times x_{21} + 3\text{本/セット} \times x_{22} = 0 \\ 6\text{本/セット} \times x_{21} + 4\text{本/セット} \times x_{22} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_{11} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3\text{本/セット} \\ 0 & 4\text{本/セット} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5\text{本/セット} & 3\text{本/セット} \\ 6\text{本/セット} & 4\text{本/セット} \end{vmatrix}} \cdot & x_{12} &= \frac{\begin{vmatrix} 5\text{本/セット} & 1 \\ 6\text{本/セット} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5\text{本/セット} & 3\text{本/セット} \\ 6\text{本/セット} & 4\text{本/セット} \end{vmatrix}} \cdot \\ x_{21} &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3\text{本/セット} \\ 1 & 4\text{本/セット} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5\text{本/セット} & 3\text{本/セット} \\ 6\text{本/セット} & 4\text{本/セット} \end{vmatrix}} \cdot & x_{22} &= \frac{\begin{vmatrix} 5\text{本/セット} & 0 \\ 6\text{本/セット} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5\text{本/セット} & 3\text{本/セット} \\ 6\text{本/セット} & 4\text{本/セット} \end{vmatrix}} \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_{11} &= \frac{4 \text{ 本 / セット}}{2(\text{本 / セット})^2} & x_{12} &= \frac{-6 \text{ 本 / セット}}{2(\text{本 / セット})^2} \\
 &= 2 \text{ セット / 本.} & &= -3 \text{ セット / 本.} \\
 x_{21} &= \frac{-3 \text{ 本 / セット}}{2(\text{本 / セット})^2} & x_{22} &= \frac{5 \text{ 本 / セット}}{2(\text{本 / セット})^2} \\
 &= -\frac{3}{2} \text{ セット / 本.} & &= \frac{5}{2} \text{ セット / 本.}
 \end{aligned}$$

逆マトリックス量  $\begin{pmatrix} 2 \text{ セット / 本} & -3 \text{ セット / 本} \\ -\frac{3}{2} \text{ セット / 本} & \frac{5}{2} \text{ セット / 本} \end{pmatrix}$

**注意** 分母の**行列式** (連立方程式の係数**行列式**) が 0 のとき  
逆マトリックス量は存在しません.

**問題 4**  $\begin{pmatrix} 2 \text{ セット / 本} & -3 \text{ セット / 本} \\ -\frac{3}{2} \text{ セット / 本} & \frac{5}{2} \text{ セット / 本} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 47 \text{ 本} \\ 29 \text{ 本} \end{pmatrix}$  を計算してください.

解

★本書 p.343

$$\begin{pmatrix} \boxed{2 \text{ セット/本} \quad -3 \text{ セット/本}} \\ \boxed{-\frac{3}{2} \text{ セット/本} \quad \frac{5}{2} \text{ セット/本}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{47 \text{ 本}} \\ \boxed{29 \text{ 本}} \end{pmatrix}$$

ヨコベクトル量の並びと見ます。

$$\begin{pmatrix} \boxed{2 \text{ セット/本} \quad -3 \text{ セット/本}} \end{pmatrix} \text{ と } \begin{pmatrix} \boxed{47 \text{ 本}} \\ \boxed{29 \text{ 本}} \end{pmatrix} \text{ とのスカラー積,}$$
$$\begin{pmatrix} \boxed{-\frac{3}{2} \text{ セット/本} \quad \frac{5}{2} \text{ セット/本}} \end{pmatrix} \text{ と } \begin{pmatrix} \boxed{47 \text{ 本}} \\ \boxed{29 \text{ 本}} \end{pmatrix} \text{ とのスカラー積}$$

を計算して、これらの量を第1行, 第2行に並べたタテベクトル量

$$\begin{pmatrix} \boxed{2 \text{ 本/セット} \times 47 \text{ 本} + (-3 \text{ 本/セット}) \times 29 \text{ 本}} \\ \boxed{-\frac{3}{2} \text{ 本/セット} \times 47 \text{ 本} + \frac{5}{2} \text{ 本/セット} \times 29 \text{ 本}} \end{pmatrix}$$

をつくります。

$$\begin{pmatrix} 2 \text{ セット/本} & -3 \text{ セット/本} \\ -\frac{3}{2} \text{ セット/本} & \frac{5}{2} \text{ セット/本} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 47 \text{ 本} \\ 29 \text{ 本} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \text{ セット} \\ 2 \text{ セット} \end{pmatrix} \cdot \leftarrow \text{逆算できたことが確認できる.}$$

## 逆マトリックス量の使い方

★本書 p.383

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\text{セット/本} & -3\text{セット/本} \\ -\frac{3}{2}\text{セット/本} & \frac{5}{2}\text{セット/本} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \clubsuit \text{本} \\ \spadesuit \text{本} \end{pmatrix}$$

どんな本数  $\clubsuit$  本,  $\spadesuit$  本 でも何セットかを求めることができます.

**記号** マトリックス量  $A$  の逆マトリックス量を  $A^{-1}$  と表します.

**注意**  $\frac{1}{A}$  のような分数は定義できません.  $A^{-1}$  は分数とは関係ありません.

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I. \quad \blacktriangleleft \text{可換}$$

$I$  は単位マトリックスを表します. ★本書 p.344, ダイジェスト版 8 p.5

**自習**  $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 5\text{本/セット} & 6\text{本/セット} \\ 3\text{本/セット} & 4\text{本/セット} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\text{セット/本} & -3\text{セット/本} \\ -\frac{3}{2}\text{セット/本} & \frac{5}{2}\text{セット/本} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$   
を確かめる. ★本書 p.381

## Cramerの方法の応用2

最小二乗法 — 実験データ処理

★本書 p.384

**Q2** 実験データが図1のように分布したとき, 測定していない $x$ の値から $y$ の値を予測するためにはどうすればいいでしょうか ?

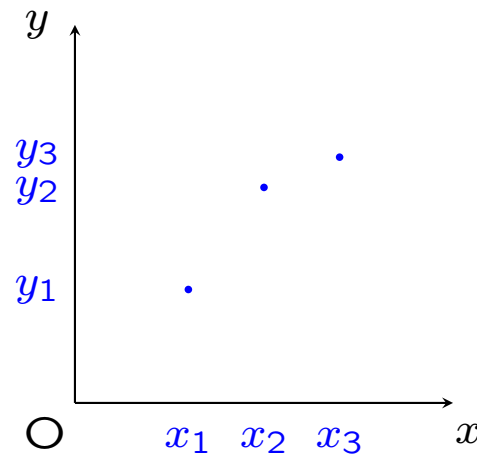


図1

**例**  $x$ : 時間の値  $t/\text{s}$ ,  $y$ : 温度の値  $\theta/^{\circ}\text{C}$ .



最適<sup>ブルー</sup>な直線を引くと、測定していない $x$ の値から $y$ の値が予測できます。

直線の引き方が人によらないための方法を考えます。

Q3 最適<sup>ブルー</sup>な直線とは、どのような直線でしょうか？

● 「直線を引く」ために

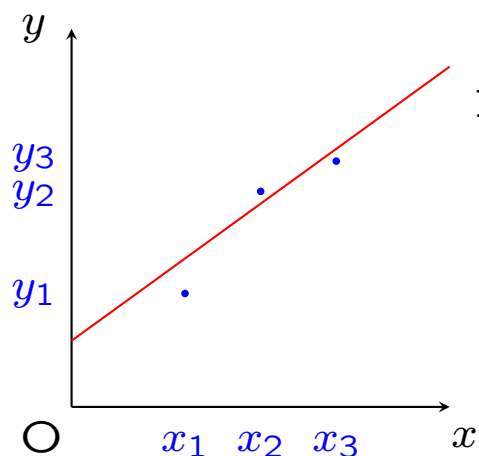
「最適<sup>ブルー</sup>な傾き<sup>赤</sup>と切片<sup>赤</sup>の値を決める」

という意味です。

傾き<sup>赤</sup>と切片<sup>赤</sup>の値を求める方法を最小二乗法<sup>赤</sup>といいます。

Q4 何の二乗<sup>赤</sup>が最小<sup>赤</sup>なのでしょう？

★ 本書 p.385



1 次関数  $y = ax + b$

(理論値 - 実験値)<sup>2</sup> の合計が  
最小になるような  $a$  と  $b$  の値を  
求める方法

⇓ 数式に翻訳

$$d = \sum_{i=1}^3 \{(ax_i + b) - y_i\}^2 \text{ と表す.}$$

理論値と実験値との間のずれ

(理論値 - 実験値)

理論値 > 実験値, 理論値 < 実験値

によって正の場合と負の場合とがある.

ずれを合計すると正負の値が打ち消し合うから,  
正の値だけで表せる (ずれ)<sup>2</sup> の合計を考える.

未知量が  $a$  と  $b$  の2個あるから,2個の方程式を立てないと未知量の値が求まりません.

**Q5** これらの未知量がみたす方程式は,どのようにして立てるのでしょうか ?

**問題5**  $d = \sum_{i=1}^3 \{(ax_i + b) - y_i\}^2$  を展開して,

$$\spadesuit a^2 + \clubsuit ab + \heartsuit b^2 + \diamond a + \sharp b + \flat$$

のように整理してください.

★ 係数  $\spadesuit, \clubsuit, \heartsuit, \diamond, \sharp, \flat$  を和の記号  $\sum$  で表す.

★ 本書 pp.386 – 387

$$\begin{aligned}
\boxed{\text{解}} \quad d &= \sum_{i=1}^3 \{(ax_i + b) - y_i\}^2 \\
&= \sum_{i=1}^3 \{(ax_i + b)^2 - 2(ax_i + b)y_i + y_i^2\} \\
&= \sum_{i=1}^3 (a^2x_i^2 + 2abx_i + b^2 - 2ax_iy_i - 2by_i + y_i^2) \\
&= \left( \sum_{i=1}^3 x_i^2 \right) a^2 + 2 \left( \sum_{i=1}^3 x_i \right) ab + 3b^2 \quad \blacktriangleleft \sum_{i=1}^3 b^2 = b^2 + b^2 + b^2 = 3b^2. \\
&\quad - 2 \left( \sum_{i=1}^3 x_i y_i \right) a - 2 \left( \sum_{i=1}^3 y_i \right) b + \sum_{i=1}^3 y_i^2.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{問題 6}}$   $\frac{\partial d}{\partial a} = 0, \frac{\partial d}{\partial b} = 0$  となるような  $a, b$  を求めてください.

解

「ラウンド・ディー・ラウンド・エックス」「ラウンド・ディー・ラウンド・ワイ」と読みます。 ★本書 p.387, 偏微分の意味について本書 pp.166 – 170

$$\frac{\partial d}{\partial a} = 2 \left( \sum_{i=1}^3 x_i^2 \right) a + 2 \left( \sum_{i=1}^3 x_i \right) b - 2 \sum_{i=1}^3 x_i y_i = 0.$$

$$\frac{\partial d}{\partial b} = 2 \left( \sum_{i=1}^3 x_i \right) a + 6b - 2 \sum_{i=1}^3 y_i = 0.$$

$$\begin{cases} \left( \sum_{i=1}^3 x_i^2 \right) a + \left( \sum_{i=1}^3 x_i \right) b = \sum_{i=1}^3 x_i y_i \\ \left( \sum_{i=1}^3 x_i \right) a + 3b = \sum_{i=1}^3 y_i \end{cases}$$

Cramerの方法で  $a$ ,  $b$  について解きます.

★本書 p.388

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^3 x_i y_i & \sum_{i=1}^3 x_i \\ \sum_{i=1}^3 y_i & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^3 x_i^2 & \sum_{i=1}^3 x_i \\ \sum_{i=1}^3 x_i & 3 \end{vmatrix}}, \quad b = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^3 x_i^2 & \sum_{i=1}^3 x_i y_i \\ \sum_{i=1}^3 x_i & \sum_{i=1}^3 y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^3 x_i^2 & \sum_{i=1}^3 x_i \\ \sum_{i=1}^3 x_i & 3 \end{vmatrix}}.$$

$a$ ,  $b$ に関する連立1次方程式の係数と定数項の値を表計算します. ★本書 p.388

例

$i$	$x$	$y$	$x^2$	$xy$
1	2	3	4	6
2	4	7	16	28
3	9	11	81	99
計	15	21	101	133

$$\begin{cases} 101a + 15b = 133 \\ 15a + 3b = 21 \end{cases}$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 133 & 15 \\ 21 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 101 & 15 \\ 15 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{14}{13}, \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 101 & 133 \\ 15 & 21 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 101 & 15 \\ 15 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{21}{13}.$$

回帰直線： $y = 1.08x + 1.62$ .

## 自習

計算練習    本書 pp.382 – 384, p.396, p.403

## 次回のための予習

線型変換    本書 6.1 節