

数学オフィスアワー 現場で出会う微積分・線型代数
ダイジェスト版 7

前回 マトリックス量

例

第1列 第2列

第1行	3本/セット	2本/セット
第2行	5個/セット	4個/セット

タテ 列はタテ.

記号 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. 行番号 列番号 「エー・イチ・二」などのように読みます.

二重添字 「何番何号」のような表し方

マトリックス量, マトリックス 大文字

成分 小文字

2行2列のマトリックスを 2×2 マトリックスといいます. ★ 本書 pp.333 – 334

注意 スカラー積とスカラー倍とのちがい ★ 本書 pp.331 – 334

スカラー積 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{定義}}{=} a_1 \times x_1 + a_2 \times x_2.$ ◀ 小計 + 小計 = 合計.

ヨコベクトル \times タテベクトル = スカラー (組でない数)

ヨコベクトル量 \times タテベクトル量 = スカラー量 (組でない量)

乗除先行 (積どうしを足す計算が多いから)

例
$$\underbrace{\left(\begin{array}{cc} 30\text{円/個} & 10\text{円/個} \end{array} \right)}_{\text{単価の組}} \underbrace{\left(\begin{array}{c} 5\text{個} \\ 4\text{個} \end{array} \right)}_{\text{個数の組}} = \underbrace{30\text{円/個} \times 5\text{個}}_{\text{小計}} + \underbrace{10\text{円/個} \times 4\text{個}}_{\text{小計}} = \underbrace{190\text{円}}_{\text{合計額}}.$$

問題 1 CO_2 の分子量をスカラー積の形で表してください.

★ 分子量の単位にも注意する.

解

「molあたり何g」に注意.

★ 本書 p.331

$$\begin{aligned} & 12 \text{ g/mol} \times 1 + 16 \text{ g/mol} \times 2 \\ &= \begin{pmatrix} 12 \text{ g/mol} & 16 \text{ g/mol} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

スカラー倍 「スカラー積」と似た用語なので, ちがいに注意.

★ 本書 p.332 問 4.7

倍率を掛ける乗法

例 $3 \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 15 \end{pmatrix}.$ 記号 $c \mathbf{a}' = \mathbf{b}'.$

ヨコベクトルとタテベクトルを区別するときヨコベクトルにプライムを打ちます.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} 3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \end{pmatrix}. \quad \text{記号} \quad \mathbf{a} c = \mathbf{b}.$$

★ 本書 p.337

ダイジェスト版 6 pp.19 – 20 (再掲)

$$\begin{pmatrix} \boxed{\text{3本/セット} \quad \text{2本/セット}} \\ \boxed{\text{5個/セット} \quad \text{4個/セット}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\text{3セット}} \\ \boxed{\text{2セット}} \end{pmatrix}$$

ヨコベクトル量の並びと見ます。

$$\begin{pmatrix} \boxed{\text{3本/セット} \quad \text{2本/セット}} \\ \boxed{\text{5個/セット} \quad \text{4個/セット}} \end{pmatrix} \text{ と } \begin{pmatrix} \boxed{\text{3セット}} \\ \boxed{\text{2セット}} \end{pmatrix} \text{ とのスカラー積,}$$
$$\begin{pmatrix} \boxed{\text{5個/セット} \quad \text{4個/セット}} \end{pmatrix} \text{ と } \begin{pmatrix} \boxed{\text{3セット}} \\ \boxed{\text{2セット}} \end{pmatrix} \text{ とのスカラー積}$$

を計算して, これらの量を第1行, 第2行に並べたタテベクトル量

$$\begin{pmatrix} \text{3本/セット} \times \text{3セット} + \text{2本/セット} \times \text{2セット} \\ \text{5個/セット} \times \text{3セット} + \text{4個/セット} \times \text{2セット} \end{pmatrix}$$

をつくります。

左側には数が1個しかないが、ヨコ方向の数の並びと見ます。

右側ではタテ方向に数が1個しかないが、タテ方向の数の並びと見ます。

$$\begin{array}{c} 3 \times 4 \\ \text{---} 3 \text{---} \left(\begin{array}{cc} 4 & 5 \end{array} \right) \quad \blacktriangleleft \quad (\text{ヨコ方向の数}) \times (\text{タテ方向の数}) \text{と} \text{考えて計算します。} \\ \text{---} 3 \times 5 \end{array}$$

左側ではヨコ方向の数が1個しかないが、ヨコ方向の数の並びと見ます。

右側には数が1個しかないが、タテ方向の数の並びと見ます。

$$\begin{array}{c} 4 \times 3 \\ \left(\begin{array}{c} 4 \\ 5 \end{array} \right) \text{---} 3 \quad \blacktriangleleft \quad (\text{ヨコ方向の数}) \times (\text{タテ方向の数}) \text{と} \text{考えて計算します。} \\ 5 \times 3 \end{array}$$

問題2 $\left(\begin{array}{cc} 4 & 5 \end{array} \right) 3$ と $\left(\begin{array}{cc} 4 & 5 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{array} \right)$ とを計算してください。

解

左側はヨコ方向の数の並びと見ます.

右側ではタテ方向に数が1個しかないが、タテ方向の数の並びと見ます.

$$\begin{array}{c} 4 \times 3 \\ \text{---} \end{array} \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{---} \\ 3 \end{array} \quad \blacktriangleleft \text{ 5を掛ける数が右側ないので、乗法が定義できません.}$$

左側はヨコ方向の数の並びと見ます. 右側はタテ方向の数の並びと見ます.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} &\quad \blacktriangleleft \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ と } \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ とのスカラ乗 } 4 \times 3 + 5 \times 0, \\ &\quad \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ と } \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ とのスカラ乗 } 4 \times 0 + 5 \times 3 \text{ を} \\ &\quad \text{第1列と第2列に並べます.} \\ &= \begin{pmatrix} 12 & 15 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix} 3$ は $\begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ の略記と考えて、すべての成分に3を掛ける演算と決めます.

★ 本書 p.347 問4.17

問題 3 $3 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ とを計算してください.

★ 問題 2 と同じように考える.

解

左側ではヨコ方向に数が1個しかないが、ヨコ方向の数の並びと見ます。
右側はタテ方向の数の並びと見ます。

$$3 \times 4$$
$$3 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

◀ 5に掛ける数が左側ないので、乗法が定義できません。

左側はヨコ方向の数の並びと見ます。右側はタテ方向の数の並びと見ます。

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

◀ $(3 \ 0)$ と $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ とのスカラー積 $3 \times 4 + 0 \times 5$,

$(0 \ 3)$ と $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ とのスカラー積 $0 \times 4 + 3 \times 5$ を

第1行と第2行に並べます。

重要

$3 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ の略記と考えて、

すべての成分に3を掛ける演算と決めます。

★ 本書 p.347 問4.17

問題 4 $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ を計算してください.

★ 左側の () 内をヨコ割り, 右側の () 内をタテ割り.

解 左側ではヨコ方向に数が1個しかないが、**ヨコ方向の数の並び**と見ます。
 右側ではタテ方向に数が1個しかないが、**タテ方向の数の並び**と見ます。

$$\begin{pmatrix} \text{---}3\text{---} \\ \text{---}5\text{---} \\ \text{---}2\text{---} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{---}4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{---}3 \times (\text{---}4) & \text{---}3 \times 7 & \text{---}3 \times 1 \\ \text{---}5 \times (\text{---}4) & \text{---}5 \times 7 & \text{---}5 \times 1 \\ \text{---}(\text{---}2) \times (\text{---}4) & \text{---}(\text{---}2) \times 7 & \text{---}(\text{---}2) \times 1 \end{pmatrix}$$

◀ (ヨコ方向の数) × (タテ方向の数)
 と考えて計算します。

$$= \begin{pmatrix} -12 & 21 & 3 \\ -20 & 35 & 5 \\ 8 & -14 & -2 \end{pmatrix}.$$

マトリックス量の加法

★ 本書 pp.337 – 338

二つの表を足すときの表し方

もとの詰合の内訳を変更する場合（ $+$: 増やす, $-$: 減らす, 0 : 変更なし）

$$\begin{array}{cc} \text{Iセット} & \text{IIセット} \\ \text{牛乳} & \left(\begin{array}{cc} 3\text{本/セット} & 2\text{本/セット} \end{array} \right) \\ \text{バター} & \left(\begin{array}{cc} 5\text{個/セット} & 4\text{個/セット} \end{array} \right) \end{array} + \left(\begin{array}{cc} 2\text{本/セット} & 1\text{本/セット} \\ -3\text{個/セット} & 0\text{個/セット} \end{array} \right)$$
$$= \left(\begin{array}{cc} 5\text{本/セット} & 3\text{本/セット} \\ 2\text{個/セット} & 4\text{個/セット} \end{array} \right).$$

マトリックス量の乗法

★ 本書 pp.339 – 341

基本 小学算数 複比例

例

$$30 \text{ g} = 2 \text{ g/個} \times \boxed{15 \text{ 個}} = 5 \text{ 個/セット} \times 3 \text{ セット}$$

$$z = b \begin{matrix} y \\ y \end{matrix} \begin{matrix} \text{比例} \\ \text{比例} \end{matrix}$$

をまとめると

$$30 \text{ g} = 2 \text{ g/個} \times 5 \text{ 個/セット} \times 3 \text{ セット}$$

と表せます.

$$z = bax \text{ 複比例}$$

新しい比例定数で表せる量

発展

ダイジェスト版 6 p.12(再掲)

表 1

品目 \ 詰合	I	II
牛乳	3本 / セット	2本 / セット
バター	5個 / セット	4個 / セット

表 2

成分 \ 品目	牛乳	バター
1	0.5 mg / 本	0.2 mg / 個
2	0.3 mg / 本	0.6 mg / 個

問題 5

詰合Iを3セット, IIを2セット購入するとき,
牛乳の本数とバターの個数を求めてください.

★ 前回の復習

解

$$\begin{pmatrix} \boxed{3\text{本/セット} \quad 2\text{本/セット}} \\ \boxed{5\text{個/セット} \quad 4\text{個/セット}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{3\text{セット}} \\ \boxed{2\text{セット}} \end{pmatrix}$$

ヨコベクトル量の並びと見ます.

$$\begin{pmatrix} \boxed{3\text{本/セット} \quad 2\text{本/セット}} \end{pmatrix} \text{ と } \begin{pmatrix} \boxed{3\text{セット}} \\ \boxed{2\text{セット}} \end{pmatrix} \text{ とのスカラー積,}$$
$$\begin{pmatrix} \boxed{5\text{個/セット} \quad 4\text{個/セット}} \end{pmatrix} \text{ と } \begin{pmatrix} \boxed{3\text{セット}} \\ \boxed{2\text{セット}} \end{pmatrix} \text{ とのスカラー積}$$

を計算して,これらの量を第1行,第2行に並べたタテベクトル量

$$\begin{pmatrix} \boxed{3\text{本/セット}} \times 3\text{セット} + \boxed{2\text{本/セット}} \times 2\text{セット} \\ \boxed{5\text{個/セット}} \times 3\text{セット} + \boxed{4\text{個/セット}} \times 2\text{セット} \end{pmatrix}$$

をつくると

$$\begin{pmatrix} 13\text{本} \\ 23\text{個} \end{pmatrix}$$

となります.

問題 6 牛乳が13本，バターが23個の全体で成分1と成分2の含量を求めてください．

★ 表2をマトリックス量で表し，問題5と同じ方法で

牛乳の本数とバターの個数の組 $\begin{pmatrix} 13 \text{本} \\ 23 \text{個} \end{pmatrix}$ との乗法を計算する．

表2（再掲）

成分 \ 品目	牛乳	バター
	0.5 mg/本	0.2 mg/個
1	0.5 mg/本	0.2 mg/個
2	0.3 mg/本	0.6 mg/個

解

$$\begin{pmatrix} 0.5 \text{ mg/本} & 0.2 \text{ mg/個} \\ 0.3 \text{ mg/本} & 0.6 \text{ mg/個} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \text{ 本} \\ 23 \text{ 個} \end{pmatrix}$$

ヨコベクトル量の並びと見ます.

$$\begin{pmatrix} 0.5 \text{ mg/本} & 0.2 \text{ mg/個} \end{pmatrix} \text{ と } \begin{pmatrix} 13 \text{ 本} \\ 23 \text{ 個} \end{pmatrix} \text{ とのスカラー積,}$$
$$\begin{pmatrix} 0.3 \text{ mg/本} & 0.6 \text{ mg/個} \end{pmatrix} \text{ と } \begin{pmatrix} 13 \text{ 本} \\ 23 \text{ 個} \end{pmatrix} \text{ とのスカラー積}$$

を計算して, これらの量を第1行, 第2行に並べたタテベクトル量

$$\begin{pmatrix} 0.5 \text{ mg/本} \times 13 \text{ 本} + 0.2 \text{ mg/個} \times 23 \text{ 個} \\ 0.3 \text{ mg/本} \times 13 \text{ 本} + 0.6 \text{ mg/個} \times 23 \text{ 個} \end{pmatrix}$$

をつくると

$$\begin{pmatrix} 11.1 \text{ mg} \\ 17.7 \text{ mg} \end{pmatrix}$$

となります.

例 $\begin{pmatrix} 13 \text{本} \\ 23 \text{個} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \text{本/セット} & 2 \text{本/セット} \\ 5 \text{個/セット} & 4 \text{個/セット} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \text{セット} \\ 2 \text{セット} \end{pmatrix}.$ $\begin{bmatrix} y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \end{bmatrix}.$ 比例

$\begin{pmatrix} 11.1 \text{ mg} \\ 17.7 \text{ mg} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \text{ mg/本} & 0.2 \text{ mg/個} \\ 0.3 \text{ mg/本} & 0.6 \text{ mg/個} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \text{本} \\ 23 \text{個} \end{pmatrix}.$ $\begin{bmatrix} z \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} y \end{bmatrix}.$ 比例

問題7 二つの式をまとめて一つの式で表してください.

解

$$\begin{pmatrix} 11.1 \text{ mg} \\ 17.7 \text{ mg} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \text{ mg/本} & 0.2 \text{ mg/個} \\ 0.3 \text{ mg/本} & 0.6 \text{ mg/個} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \text{本/セット} & 2 \text{本/セット} \\ 5 \text{個/セット} & 4 \text{個/セット} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \text{セット} \\ 2 \text{セット} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbb{Z} = \mathbf{B}\mathbf{A}_{\mathbb{Z}}.$$

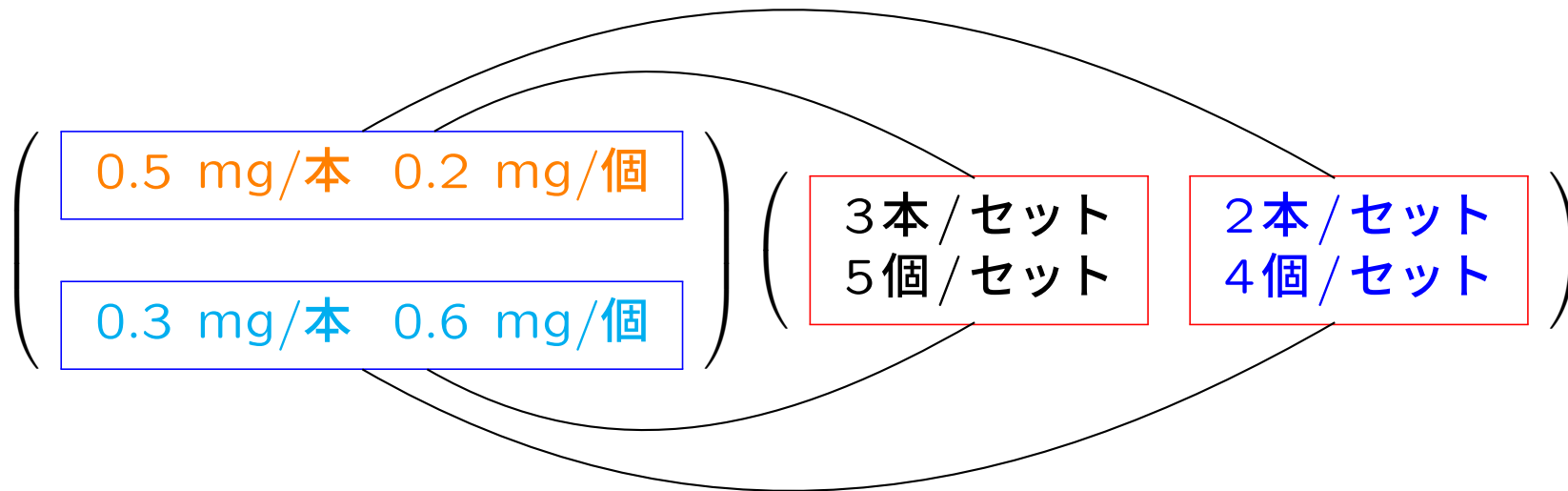
ここで, **マトリックス量の乗法**を計算する方法を決めなければなりません.

二つの表を掛けるときの表し方

左側はヨコ方向の数の並びと見ます. 右側はタテ方向の数の並びと見ます.

四つのスカラー積をつくります.

★ 本書 pp.342 – 343



問題 8

四つのスカラー積を計算して, 2×2 マトリックス量の形で表してください.

解

四つのスカラー積の計算

$$0.5 \text{ mg/本} \times 3 \text{ 本/セット} + 0.2 \text{ mg/個} \times 5 \text{ 個/セット} = 2.5 \text{ mg/セット}.$$

$$0.5 \text{ mg/本} \times 2 \text{ 本/セット} + 0.2 \text{ mg/個} \times 4 \text{ 個/セット} = 1.8 \text{ mg/セット}.$$

$$0.3 \text{ mg/本} \times 3 \text{ 本/セット} + 0.6 \text{ mg/個} \times 5 \text{ 個/セット} = 3.9 \text{ mg/セット}.$$

$$0.3 \text{ mg/本} \times 2 \text{ 本/セット} + 0.6 \text{ mg/個} \times 4 \text{ 個/セット} = 3.0 \text{ mg/セット}.$$

$$\begin{pmatrix} 0.5 \text{ mg/本} & 0.2 \text{ mg/個} \\ 0.3 \text{ mg/本} & 0.6 \text{ mg/個} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \text{ 本/セット} & 2 \text{ 本/セット} \\ 5 \text{ 個/セット} & 4 \text{ 個/セット} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \text{ mg/セット} & 1.8 \text{ mg/セット} \\ 3.9 \text{ mg/セット} & 3.0 \text{ mg/セット} \end{pmatrix}.$$

問題9

このマトリックス量を使って

$$\begin{pmatrix} 0.5 \text{ mg/本} & 0.2 \text{ mg/個} \\ 0.3 \text{ mg/本} & 0.6 \text{ mg/個} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \text{ 本/セット} & 2 \text{ 本/セット} \\ 5 \text{ 個/セット} & 4 \text{ 個/セット} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \text{ セット} \\ 2 \text{ セット} \end{pmatrix}$$

を計算してください.

解

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0.5 \text{ mg/本} & 0.2 \text{ mg/個} \\ 0.3 \text{ mg/本} & 0.6 \text{ mg/個} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \text{ 本/セット} & 2 \text{ 本/セット} \\ 5 \text{ 個/セット} & 4 \text{ 個/セット} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \text{ セット} \\ 2 \text{ セット} \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 2.5 \text{ mg/セット} & 1.8 \text{ mg/セット} \\ 3.9 \text{ mg/セット} & 3.0 \text{ mg/セット} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \text{ セット} \\ 2 \text{ セット} \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 2.5 \text{ mg/セット} \times 3 \text{ セット} + 1.8 \text{ mg/セット} \times 2 \text{ セット} \\ 3.9 \text{ mg/セット} \times 3 \text{ セット} + 3.0 \text{ mg/セット} \times 2 \text{ セット} \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 11.1 \text{ mg} \\ 17.7 \text{ mg} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

★ 問題6と一致することがわかる.

まとめ

$$\begin{pmatrix} 3\text{本/セット} & 2\text{本/セット} \\ 5\text{個/セット} & 4\text{個/セット} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\text{セット} \\ 2\text{セット} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13\text{本} \\ 23\text{個} \end{pmatrix}. \quad y = A x. \text{ 比例}$$

$$\begin{pmatrix} 0.5 \text{ mg/本} & 0.2 \text{ mg/個} \\ 0.3 \text{ mg/本} & 0.6 \text{ mg/個} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13\text{本} \\ 23\text{個} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.1 \text{ mg} \\ 17.7 \text{ mg} \end{pmatrix}. \quad z = B y. \text{ 比例}$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0.5 \text{ mg/本} & 0.2 \text{ mg/個} \\ 0.3 \text{ mg/本} & 0.6 \text{ mg/個} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\text{本/セット} & 2\text{本/セット} \\ 5\text{個/セット} & 4\text{個/セット} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\text{セット} \\ 2\text{セット} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2.5 \text{ mg/セット} & 1.8 \text{ mg/セット} \\ 3.9 \text{ mg/セット} & 3.0 \text{ mg/セット} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\text{セット} \\ 2\text{セット} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11.1 \text{ mg} \\ 17.7 \text{ mg} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$z = B A x. \quad \text{複比例}$$

自習

計算練習 本書 p.335, pp.344 – 350

次回のための予習

マトリックスの乗法の注意 本書 pp.344 – 351