

数学オフィスアワー 現場で出会う微積分・線型代数
ダイジェスト版 2

前回の復習

規則性を表す方法

★ 本書 pp.15 – 16

問題 1 フィボナッチ数列

1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

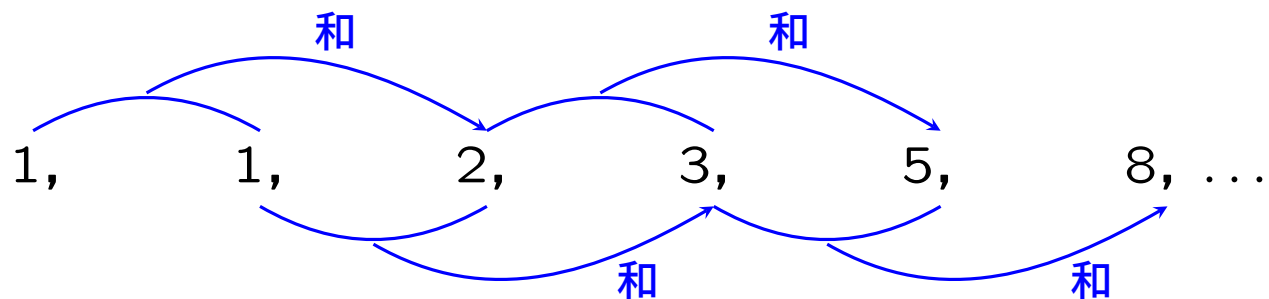
◀ カンマ, ピリオド 3 個.

の規則を文字式で書いてください.

★ 文字の選び方に注意する.

解

★ 本書 pp.15 – 16



$$a_{k+2} = a_k + a_{k+1} \quad (k \geq 1).$$

注意 1 定数 : a, b, c など. 添字 : i, j, k, ℓ, m, n .

注意 2 日本 $\geq \leq$ 欧米 $\geq \leq$

量と数の概念 — 測定の原理

★ 本書 pp.16 – 19

ねらい

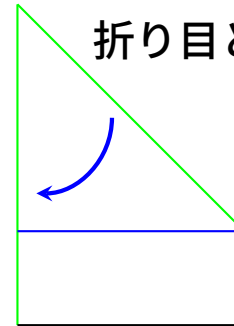
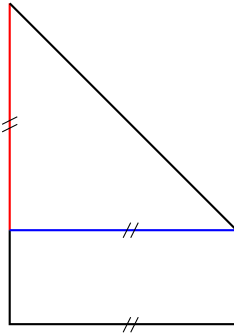
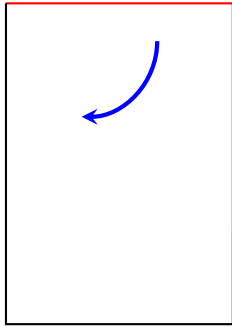
① 単位の意味 ② 単位の換算 ③ 有効数字の扱い方

導入

問題 1 1 枚の紙を折って、長辺が短辺の何倍かを調べる方法を考えてください.

★ 3 枚の紙を使って調べる方法は、本書 p.17 例題 0.11 を見よ.

解



折り目と長辺は長さが等しいことがわかります。

折り目は直角二等辺三角形の斜辺だから短辺の $\sqrt{2}$ 倍です。

短辺の長さを単位長さとする

$$\text{長辺の長さ} = \sqrt{2} \times (\text{短辺の長さ})$$

と表せます。

測定とは

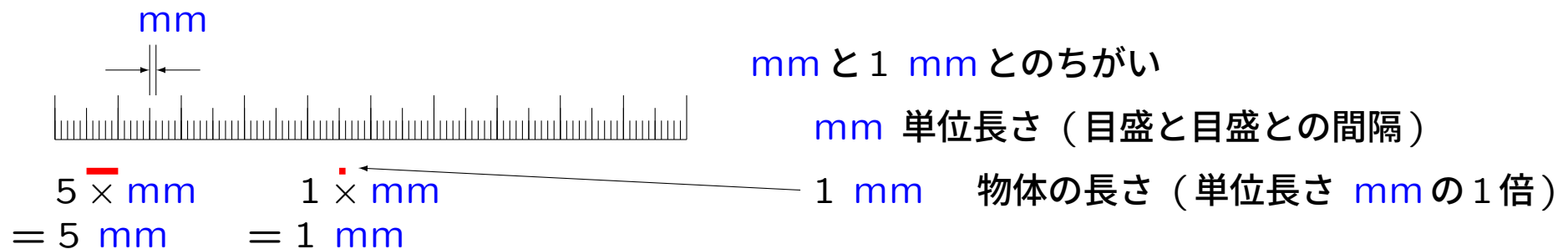
対象の大きさが単位の大きさ（基準に選んだ大きさ）の何倍かを求める操作です。

個別単位 例 長辺の長さを測るときに単位長さとして選んだ短辺の長さ

普遍単位 例 m, kg, s.

物差の原理

★ 本書 p.19



量 = 数値 × 単位 (この例で「量」は長さ, 「単位」は単位長さ)

数値は「何倍か」を表します.

文字は原則として量を表します.

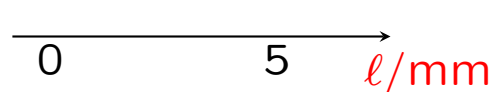
★ 本書 p.19, pp.24 – 25

$\ell = 5 \text{ mm}$ 同じ文字が同じ長さを表すから, 量を表す文字は単位によりません.
 $= 0.5 \text{ cm}.$

$\ell \text{ mm}$ $\ell = 5.$ 同じ文字が異なる数値を表すから, 数を表す文字は不便です.
 $\ell \text{ cm}$ $\ell = 0.5.$

IUPAC (International Union of Pure and Applied Chemistry)

グラフの軸



目盛の読み方 $\ell/\text{mm} = 5.$

$$\ell \div \text{mm} = 5.$$

割算を掛算に書き換えると

$$\begin{aligned}\ell &= 5 \times \text{mm} \\ &= 5 \text{ mm}.\end{aligned}$$

★ 測定値ではなく, 数値を仮定する場合, 有効数字を考えません.

量計算

① 量＝数値×単位 ② 10のべき乗 ③ 接頭辞 ★本書 pp.23 – 24

量計算に入る前に、つぎの疑問を取り上げます.

Q1 (正の数)×(負の数) はなぜ負の数と考えるのでしょうか？

Q2 10^0 , 2^0 などの0乗の値は, なぜ0ではなく1なのでしょう？

旧法則保存の原理

数学は保守的な側面があり, 法律のように前例を重視します.

乗り物の種類が増えると, 交通法規を増やしますが, 従来の法規の根本を変えるわけではありません.

$4 \times 2 = 8$	旧法則	掛ける数が1 小さくなると 積が4小さくなる.
$4 \times 1 = 4$		
$4 \times 0 = 0$		
$4 \times (-1) = ?$		

$\downarrow -1 \quad \downarrow -4$
 $\downarrow -1 \quad \downarrow -4$
 $\downarrow -1 \quad \downarrow -4$

$4 \times (-1) = -4$ と決めます.

Powers of ten ベキ乗 (累乗)

$10^2 = 100$	旧法則	指数が1小さくなると 10で割った値になる.
$10^1 = 10$		
$10^0 = ?$		
$10^{-1} = ?$		

$\downarrow -1 \quad \downarrow \div 10$
 $\downarrow -1 \quad \downarrow \div 10$
 $\downarrow -1 \quad \downarrow \div 10$

$10^{-1} = \frac{1}{10}$ と決めます.

問題2

旧法則保存の原理で0の階乗を1と決める理由を説明してください.

解

前回

自然数に 0 を含める流儀もある.

$$\begin{aligned} 3! &= 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &\quad \downarrow \div 3 \\ 2! &= 2 \cdot 1 \\ &\quad \downarrow \div 2 \\ 1! &= 1 \\ &\quad \downarrow \div 1 \\ 0! &= ? \end{aligned}$$

大きさの感覚 — 何のために数値計算するのか

接頭辞

★ 本書 p.24

★ できるだけ早く覚えること.

ヒトの細胞 37 兆個 直径 (球と仮定) $10 \overset{\text{ミュー}}{\mu}\text{m}$ (マイクロメートル)

問題 3

すべての細胞を 1 列に並べた長さを地球の 1 周の長さ $4 \times 10^4 \text{ km}$ と比べてください.

注意 多くの0を並べてはいけない！ 10のべき乗と接頭辞を使うこと.

解 兆 = 10^{12} . μ = 10^{-6} . k = 10^3 .

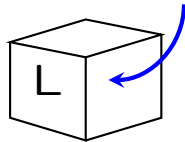
$$\begin{aligned} & 10 \mu\text{m}/\text{個} \times 37 \text{兆個} \quad / \text{ per } \dots \text{あたり} \\ = & 10 \times 10^{-6} \text{ m}/\text{個} \times 37 \times 10^{12} \text{ 個} \quad \blacktriangleleft \text{ m}/\text{個} \text{ は組立単位.} \\ = & 37 \times 10^7 \text{ m} \quad \blacktriangleleft \text{ m}/\text{個} \times \text{個} = \text{m.} \\ = & 37 \times \underbrace{10^4}_{\text{万}} \times \underbrace{10^3}_{\text{k}} \text{ m.} \quad \blacktriangleleft 7 = 4 + 3. \\ & \quad \quad \quad \updownarrow \text{比較しやすい式} \\ & 4 \times \underbrace{10^4}_{\text{万}} \text{ km.} \end{aligned}$$

問題 4 体積の単位 L (リットル) は何 m^3 ですか？

★ 本書 p.54

解 10のべき乗と接頭辞c(センチ)を使うこと.

1 L入りペットボトルの水



辺の長さ 10 cm の立方体の容器

$$\begin{aligned}(10 \text{ cm})^3 &= (10 \times 10^{-2} \times \text{m})^3 \\ &= (10^{-1} \text{ m})^3 \\ &= 10^{-3} \text{ m}^3.\end{aligned}$$

$$(10 \text{ cm})^3 = 10^3 \text{ cm}^3.$$

(cm)³ の略. $\text{c} \times \text{m}^3$ ではない.

問題5 水素原子の直径 Å(オングストローム)は何cmですか? ★ 本書p.27,p.31

解 10のべき乗と接頭辞c (センチ)を使うこと.

$$\begin{aligned}\text{\AA} &= 10^{-10} \text{ m} &< -10 = -8-2. \\ &= 10^{-8-2} \text{ m} &< \text{接頭辞 センチ } c = 10^{-2}. \\ &= 10^{-8} 10^{-2} \text{ m} \\ &= 10^{-8} \text{ cm}.\end{aligned}$$

問題6 5 nmをmmに換算してください.

★ 自己流の計算ではなく 10のべき乗と接頭辞だけを使う.

★ $\text{nm} \rightarrow \text{mm}$ $n = 10^{-9}$. $m = 10^{-3}$.

解

方法1

$$\begin{aligned} 5 \text{ nm} &= 5 \times \frac{\text{n}}{\text{m}} \times \text{mm} \\ &= 5 \times \frac{10^{-9}}{10^{-3}} \text{ mm} \\ &= 5 \times 10^{-6} \text{ mm.} \end{aligned}$$

m で割って m を掛ける

方法2

$$\begin{aligned} 5 \text{ nm} &= 5 \times 10^{-9} \times \text{m} \quad \blacktriangleleft -9 = -6 - 3. \\ &= 5 \times 10^{-6} \times 10^{-3} \text{ m} \\ &= 5 \times 10^{-6} \text{ mm.} \end{aligned}$$

★ なぜ換算するのか — 慣れている単位で大きさの感覚を知るため.

小さい単位 nm 扱いやすい値 5 大きい単位 mm 扱いにくい値 5×10^{-6}

問題7

車が時速 50 km で走行中, 前方 8 m の場所で車に気づかないで遊んでいる児童は助かるかどうかを判断してください.

解 50 km/h = ? m/s. 組立単位 / per ...あたり

$$\frac{50 \times \textcolor{red}{k} \times \text{m}}{\text{h}} = \frac{5 \times 10 \times \textcolor{red}{10}^3 \times \text{m}}{3.6 \times \textcolor{red}{10}^3 \times \text{s}} \\ \doteq 1.4 \times 10 \text{ m/s.}$$

1 s後には14 m先を通過するから, 前方8 mの場所の児童は車に衝突します.

★ なぜ換算するのか — 慣れている単位で**大きさの感覚**を知るため.

科学的表記法 数値 \times (10 のべき乗)

★ 本書 p.28

$$\underbrace{5.7}_{\text{有効数字}} \times \underbrace{10^2}_{\text{位取り}} \text{ m}$$

$$\underbrace{5.70}_{\text{有効数字}} \times \underbrace{10^2}_{\text{位取り}} \text{ m}$$

570 m はどちらかがあいまい.



頭の中で目盛と目盛との間の幅 mm を 10 等分していくつ分かを読む.

× 不確かな値 (右端の位置) - (左端の位置)

$$\begin{array}{r} 1.58 \text{ cm} \\ - 0.13 \text{ cm} \\ \hline 1.45 \text{ cm} \end{array}$$

有効数字とは末尾 1 桁だけが不確かな測定値

有効数字の乗法

例 たての長さ $394.1 \times 10^{-3} \text{ m}$, よこの長さ $5.7 \times 10^{-3} \text{ m}$ の長方形の面積

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 394.1 \times 10^{-3} \text{ m} \\
 \times 5.7 \times 10^{-3} \text{ m} \\
 \hline
 27587 \\
 19705 \\
 \hline
 2246.37 \times 10^{-6} \text{ m}^2
 \end{array}
 \end{array}$$

有効数字とは末尾1桁だけが不確かな測定値.

科学的表記法

$$\underbrace{2.2}_{\text{有効数字}} \times \underbrace{10^{-3}}_{\text{位取り}} \text{ m}^2 \quad \blacktriangleleft \quad 2.2 \times \underbrace{10^3 \times 10^{-6}}_{10^{-3}}$$

この典型例に基づいて,

ルール

積は有効桁数の少ないほうに合わせる

と決めます.

$$\begin{array}{r} \text{有効桁数 } 4 \text{ 桁} \\ \times \text{ 有効桁数 } 2 \text{ 桁} \\ \hline \text{積 } \text{有効桁数 } 2 \text{ 桁} \end{array}$$

注意 誤差は「**不確か**」という意味であり,

$$\text{誤差} = \text{測定値} - (\text{真の値})$$

と考えることは**できません**.

真の値がわかっていないと誤差が求まらないことになります.

真の値がわかっているのであれば, 測定する意味がありません.

問題 8

つぎの筆算の過程で，不確かな数の上に， 9 のように \times を記入してください．

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 5 \text{ } 3. \text{ } 8 \text{ mm} \\
 7. \text{ } 2 \text{ mm}
 \end{array} \\
 \times \\
 \hline
 1 \text{ } 0 \text{ } 7 \text{ } 6 \\
 3 \text{ } 7 \text{ } 6 \text{ } 6 \\
 \hline
 3 \text{ } 8 \text{ } 7. \text{ } 3 \text{ } 6 \text{ mm}^2
 \end{array}$$

★ 本書 p.28

解

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 5 \quad 3. \overset{\times}{8} \text{ mm} \\
 \times \quad \quad 7. \overset{\times}{2} \text{ mm} \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 \overset{\times}{1} \quad \overset{\times}{0} \quad \overset{\times}{7} \quad \overset{\times}{6} \\
 3 \quad 7 \quad \overset{\times}{6} \quad \overset{\times}{6} \\
 \hline
 3 \quad \overset{\times}{8} \quad \overset{\times}{7}. \quad \overset{\times}{3} \quad \overset{\times}{6} \text{ mm}^2
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

科学的表記法 $\underbrace{3.9}_{\text{有効数字}} \times \underbrace{10^2}_{\text{位取り}} \text{ mm}^2$

自習

本書 pp.30 – 40

質問 有効数字は「**末尾1桁**だけが**不確**かな測定値」というが、
問題文に「数値を □ 桁まで書け」のように指示している
ことがあるではないか？

回答 入試などで受験者の答案を採点するときの公平性のために
指示しているだけであって、有効数字という用語の本来の定義
とは関係ありません。

次回のための予習

関数の意味 — 実験結果の表し方と読み取り方 [本書 1.1 節](#)