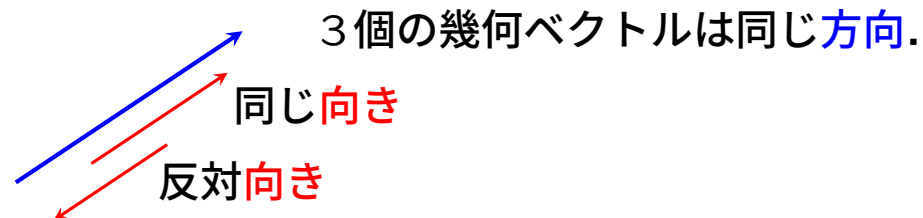


数学オフィスアワー 現場で出会う微積分・線型代数  
ダイジェスト版 14

前回まで 図形の拡大・縮小, 回転・鏡映の操作を表すマトリックス

今回 固有値問題 — 線型変換で方向を変えない幾何ベクトルの見つけ方



何のために？ マトリックスの  $n$  乗を簡単に計算するときが必要です.

例  $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}^n$

Q1 どのようなマトリックスの  $n$  乗が簡単に計算できるのでしょうか？

**問題 1**  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2$  を計算してください.

★  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 \\ 3^2 & 4^2 \end{pmatrix}$  かどうか ?

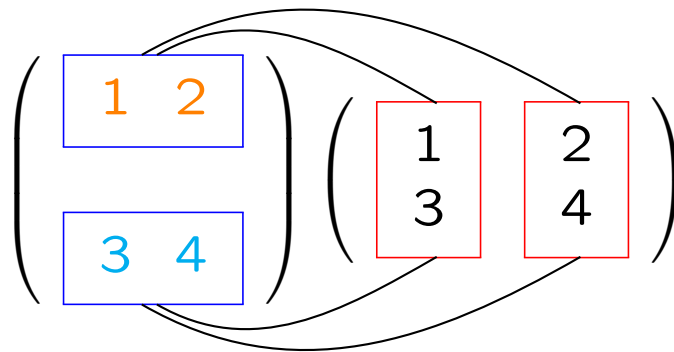
解

二つのマトリックスを掛ける計算

左側はヨコ方向の数の並びと見ます. 右側はタテ方向の数の並びと見ます.

四つのスカラー積をつくります.

★ 本書 pp.342 – 343



$$\begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 3 & 1 \times 2 + 2 \times 4 \\ 3 \times 1 + 4 \times 3 & 3 \times 2 + 4 \times 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangleleft \quad \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 \\ 3^2 & 4^2 \end{pmatrix} \text{ ではない.}$$

**問題 2**  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^2$  を求めてください.

★ このマトリックスは, 原点を通る軸のまわりに角  $\theta$  回転させる操作を表す.

★ 本書 pp.347 – 348, ダイジェスト版 13 p.9

**解** マトリックスの2乗は, 同じ変換を2回くり返す操作を表します.

原点を通る軸のまわりに角 $\theta$ 回転させる操作を2回くり返すと, $2\theta$ 回転します.

マトリックスの乗法を計算しなくても

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

であることがわかります.

**問題3**  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^n$  を求めてください.

**解** マトリックスの  $n$  乗は, 同じ変換を  $n$  回くり返す操作を表します.

原点を通る軸のまわりに角  $\theta$  回転させる操作を  $n$  回くり返すと,  $n\theta$  回転します.

マトリックスの乗法を計算しなくても

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$$

であることがわかります.

★ 本書 p.342

**問題 4**  $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^n$  を求めてください.

解

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} \alpha^1 & 0 \\ 0 & \beta^1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha \times \alpha + 0 \times 0 & \alpha \times 0 + 0 \times \beta \\ 0 \times \alpha + \beta \times 0 & 0 \times 0 + \beta \times \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \alpha^k & 0 \\ 0 & \beta^k \end{pmatrix} \quad (k \text{ は自然数})$$

が成り立つと

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix} \alpha^k & 0 \\ 0 & \beta^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^k \times \alpha + 0 \times 0 & \alpha^k \times 0 + 0 \times \beta \\ 0 \times \alpha + \beta^k \times 0 & 0 \times 0 + \beta^k \times \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^{k+1} & 0 \\ 0 & \beta^{k+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

だから、対角マトリックスの $n$ 乗は

★ 本書 pp.435 – 437

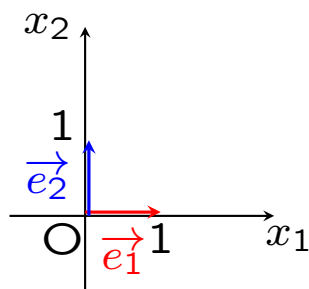
$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}.$$

## 対角マトリックスの特徴

例  $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  ★ 本書 p.446, ダイジェスト版 8 p.2

座標軸の方向の幾何ベクトル  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  を数ベクトル  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  で表します.

問題5 対角マトリックス  $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  で  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  のうつり先を求めてください.



★  $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  を計算する.

解

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 1 + 0 \times 0 \\ 0 \times 1 + 2 \times 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 0 + 0 \times 1 \\ 0 \times 0 + 2 \times 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

問題 6

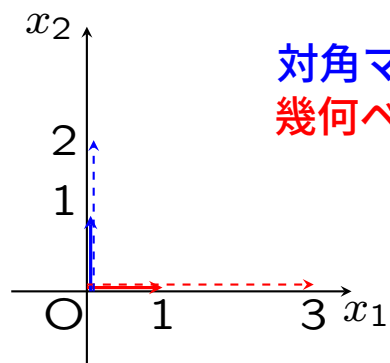
数ベクトル  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  で表せる幾何ベクトルのうつり先を求めてください.

解

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 3 + 0 \times 2 \\ 0 \times 3 + 2 \times 2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

まとめ

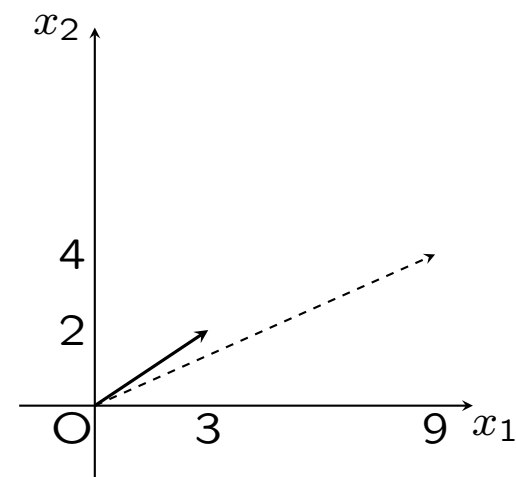
★ 本書 p.446



対角マトリックスは座標軸の方向の  
幾何ベクトルの方向を変えません.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 3.$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} 2.$$



## 用語

★ 本書 pp.447 – 448

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 3.$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} 2.$$

固有ベクトル

固有値

拡大率・縮小率

方向を変えないベクトル

固有値：1 よりも大きいとき拡大．1 よりも小さいとき縮小．1 のとき等倍．

正の値のとき同じ向き，負の値のとき反対向きに拡大・縮小．

**Q2** 対角マトリックスでないマトリックスの  $n$  乗も簡単に計算する方法があるのでしょうか？

## ● 今後の方針

線型変換で方向を変えないベクトル(固有ベクトル)・倍率(固有値)を求める

線型変換を表すマトリックスの  $n$  乗の計算に使う

固有値問題 — 固有値・固有ベクトルの求め方

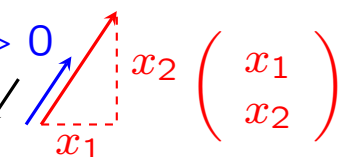
★ 本書 pp.450 – 452

例 
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \lambda.$$

倍率  $\lambda$  ラムダ(ギリシア文字)

「方向を変えない」を式に翻訳する.

$\lambda > 0$   
 $\lambda < 0$  ↙



$x_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

手順1 マトリックスとタテベクトルとの積を計算する.

問題7 左辺を計算してから, 右辺を移項してください.

解

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 + 1x_2 \\ -3x_1 + 0x_2 \end{pmatrix}$$

だから

$$\begin{pmatrix} 4x_1 + 1x_2 \\ -3x_1 + 0x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\lambda \\ x_2\lambda \end{pmatrix}.$$

右辺を移項して整理すると

$$\begin{pmatrix} (4 - \lambda)x_1 + 1x_2 \\ -3x_1 - \lambda x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となります.

**手順2** Cramerの方法で  $x_1, x_2$  について解く.

**問題8**  $x_1, x_2$  を行列式で表してください.

復習

1 次方程式  $2x = 3$  の解  $x = \frac{3}{2}$ . 分子：定数項  
分母：係数

$$\frac{0}{0} \text{ 不定} \quad \frac{2}{0} \text{ 不能} \quad \frac{0}{2} = 0.$$

解

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix}}.$$

(i) 分母  $\neq 0$  のとき 自明解  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

線型変換で方向の変わらないベクトルを求める問題で、  
零ベクトルは方向がないから固有ベクトルに含めません。

★ 本書 p.451



(ii) 分母 = 0 のとき

$$(4 - \lambda)(-\lambda) - 1 \cdot (-3) = 0.$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \quad \text{固有方程式 (特性方程式)}$$

を因数分解して

$$(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

を  $\lambda$  について解くと,

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3. \quad \blacktriangleleft \lambda = 1, \lambda = 3 \text{ を番号で区別.}$$

**問題 9**  $\lambda_1 = 1$  と  $\lambda_2 = 3$  とのそれぞれの場合に

$$\begin{cases} (4 - \lambda)x_1 + 1x_2 = 0 \\ -3x_1 - \lambda x_2 = 0 \end{cases}$$

を  $x_1, x_2$  について解いて, 解ベクトルを求めてください.

$\lambda_1 = 1$  のとき

$$\begin{cases} 3x_1 + 1x_2 = 0 \\ -3x_1 - 1x_2 = 0 \end{cases}$$

(同じ方程式)

$$3x_1 + 1x_2 = 0.$$

解は

$$\begin{cases} x_1 = t_1 \\ x_2 = -3t_1 \end{cases}$$

( $t_1$  は 0 でない任意の実数).

$\lambda_2 = 3$  のとき

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 = 0 \\ -3x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

(同じ方程式)

$$1x_1 + 1x_2 = 0.$$

解は

$$\begin{cases} x_1 = t_2 \\ x_2 = -t_2 \end{cases}$$

( $t_2$  は 0 でない任意の実数).

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} t_1.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t_2.$$

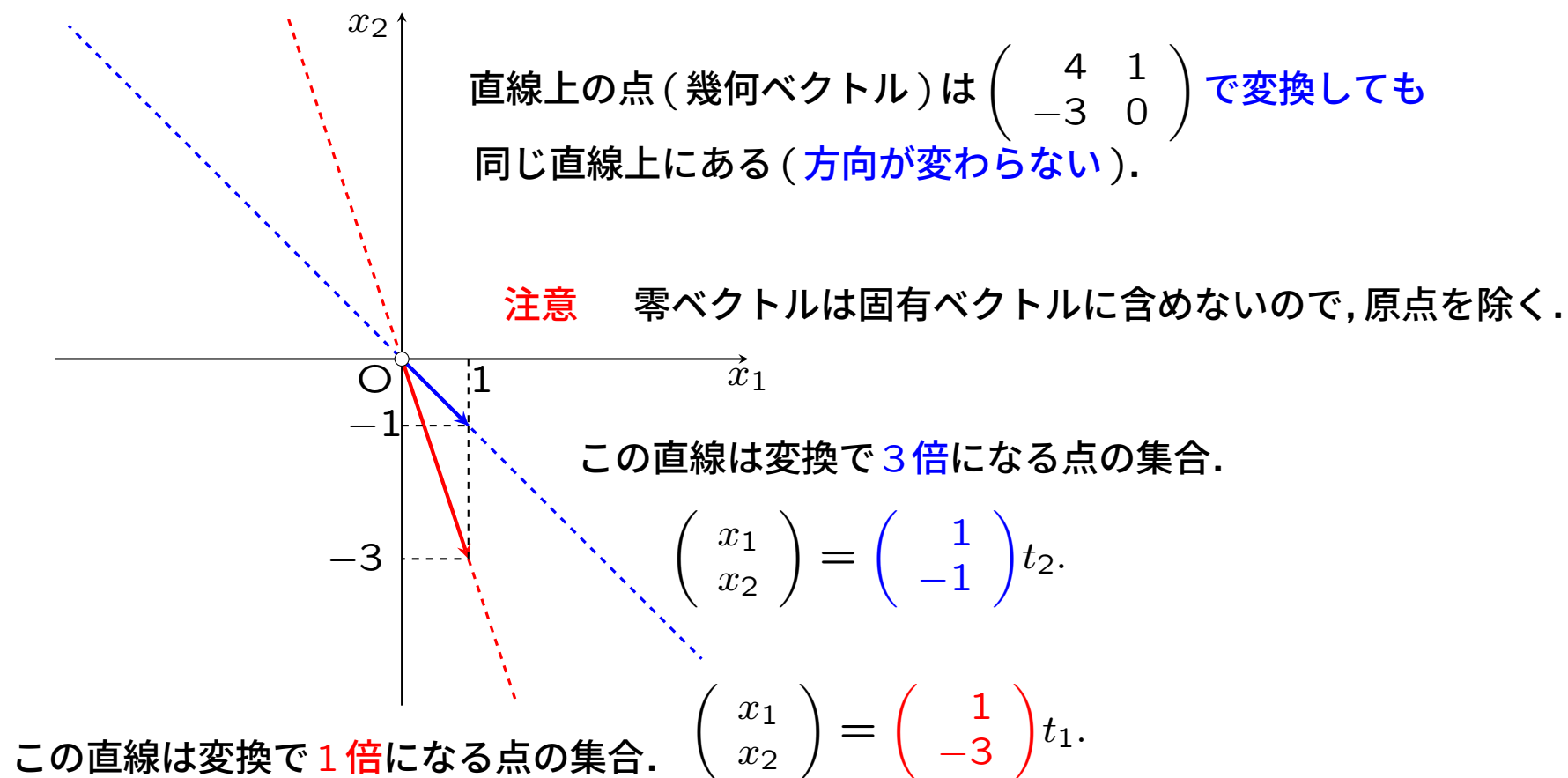
**Q2**  $t_1, t_2$  は (0 以外の) あらゆる値を取ることに注意すると,  
解ベクトルの表す点全体はどんな図形になるでしょうか ?

**問題 10**

$x_1x_2$  平面に解ベクトルの表す点全体が表す図形を描いてください.

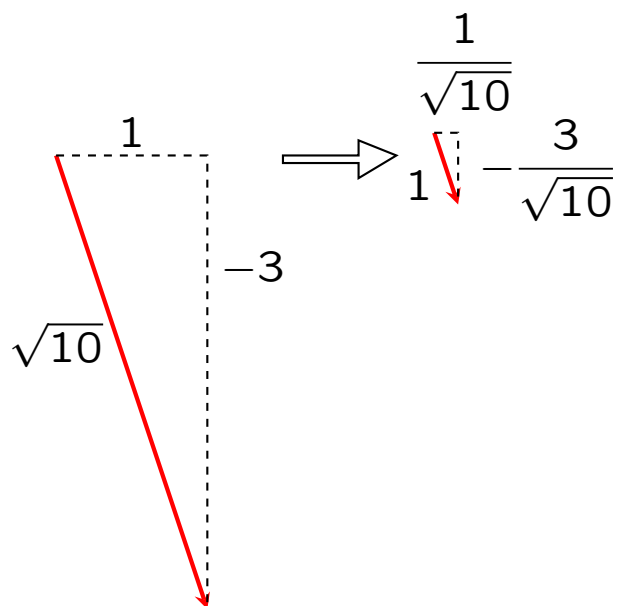
**解** 原点を通る直線のベクトル表示

★ 本書 pp.452 – 453

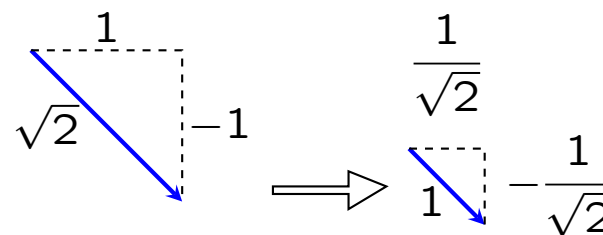


### 手順3 正規化 (ノルムを1にする操作)

★ 本書 p.454



**注意** 正規化しなくても, あとの計算に不都合は生じません.



正規化した固有ベクトル

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \text{ を選んで}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} t_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}.$$

$$t_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ を選んで}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

マトリックスの $n$ 乗の求め方    例  $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}^n$

手順1    固有ベクトルを並べたマトリックスをつくる.    ★ 本書 p.455

$$\lambda_1 = 1 \text{ のとき} \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ -3t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ -3t_1 \end{pmatrix} 1. \quad \lambda_2 = 3 \text{ のとき} \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ -t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_2 \\ -t_2 \end{pmatrix} 3.$$

まとめて

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ -3t_1 & -t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ -3t_1 & -t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

と表します.

問題11    左辺と右辺を計算して, 両辺が一致することを確認してください.

解 左边

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ -3t_1 & -t_2 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 4 \times t_1 + 1 \times (-3t_1) & 4 \times t_2 + 1 \times (-t_2) \\ -3 \times t_1 + 0 \times (-3t_1) & -3 \times t_2 + 0 \times (-t_2) \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} t_1 & 3t_2 \\ -3t_1 & -3t_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

右辺

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ -3t_1 & -t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t_1 \times 1 + t_2 \times 0 & t_1 \times 0 + t_2 \times 3 \\ -3t_1 \times 1 + (-t_2) \times 0 & -3t_1 \times 0 + (-t_2) \times 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t_1 & 3t_2 \\ -3t_1 & -3t_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**注意** タテベクトルとスカラーとの乗法の順序が重要

$1 \times 1$  マトリックス (スカラー) の列の数と  $2 \times 1$  マトリックス (タテベクトル) の行の数とが一致しないから、 $1 \begin{pmatrix} t_1 \\ -3t_1 \end{pmatrix}$ ,  $3 \begin{pmatrix} t_2 \\ -t_2 \end{pmatrix}$  の順序の乗法は定義できず、 $\begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ -3t_1 & -t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  (対角マトリックスを右から掛ける) と表せません。

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ -3t_1 & -t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ -3t_1 & -t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

を

記号  $AU = U\Lambda$        $\Lambda$  ラムダ (大文字)

で表すと便利です.

**手順2** 両辺に右から  $U$  の逆マトリックス  $U^{-1}$  を掛ける. ★ 本書 p.457

$$AUU^{-1} = U\Lambda U^{-1}$$

$$UU^{-1} = I \text{ (単位マトリックス)} \quad \blacktriangleleft \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

だから

$$A = U\Lambda U^{-1}. \quad \blacktriangleleft \quad AI = U\Lambda U^{-1}, \quad AI = A.$$



**手順3**  $A^n$  を  $U$  と  $\Lambda$  で表す.

$$\begin{aligned} A^n &= U \Lambda \underbrace{U^{-1}U}_I \Lambda \underbrace{U^{-1}U}_I \Lambda U^{-1} \dots U \Lambda \underbrace{U^{-1}U}_I \Lambda \underbrace{U^{-1}U}_I \Lambda U^{-1} \\ &= U \Lambda^n U^{-1} \end{aligned}$$

であり,

$$\Lambda^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \quad \blacktriangleleft \text{対角マトリックスの } n \text{ 乗}$$

を使うと

$A$  の  $n$  乗は  $U$ ,  $\Lambda^n$ ,  $U^{-1}$  の3個のマトリックスの積

で表せます.

1000 乗でも3個のマトリックスの乗法で求まります.

## 次回のための予習

$U$  の逆マトリックス  $U^{-1}$  の求め方

本書 pp.456 – 457

$U$ ,  $\Lambda^n$ ,  $U^{-1}$  の積の計算

本書 pp.457 – 458