

数学オフィスアワー 現場で出会う微積分・線型代数
ダイジェスト版 3

線型代数 + 数理科学

ねらい

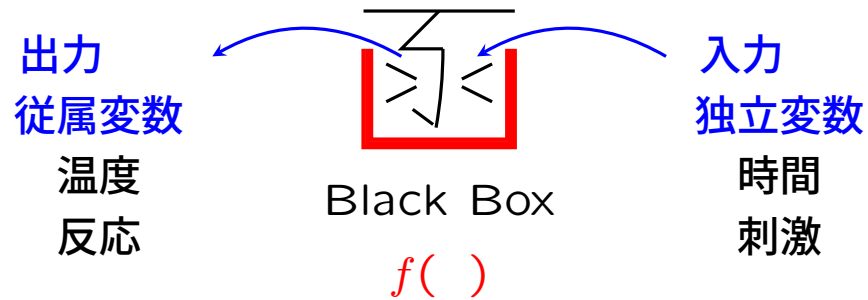
実験データから規則性 (曲線のグラフが表す関数) を見出す方法

基本 比例

① 関数の意味 ② 線型性の意味

を理解します.

Q1 関数とは何かを説明できるでしょうか?
「関数は数式である」と思っていないですか?



★ 本書 pp.42 – 43

例 信号 停止 = $f(\text{赤})$

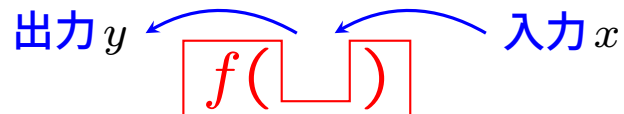
関数 (函数) とは

入力に対して一つの出力を対応させる規則 (はたらき) function

★ このような概念が生命科学, 環境科学などでも重要であり, 「関数 = 数式」ではありません.

記号の見方

★ 本書 p.45



関数 $f()$

関数値 $f(x)$

x を入力したときの出力

★ 高校数学では, 関数値も関数といい, 関数と関数値とを区別していません.

$f(\quad)$, $f(x)$ の例

★ 本書 p.43

関数	$-3(\quad)$	$-3(\quad)^2$	$-\sqrt{1-(\quad)^2}$
関数値	$-3(x)$	$-3(x)^2$	$-\sqrt{1-(x)^2}$

$$-3(4) = -12. \quad -3(5)^2 = -75. \quad -\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{15}}{4}.$$

(\quad) を省いて $-3 \cdot 4$, $-3 \cdot 5^2$, $-\sqrt{1-x^2}$ のように書くことがあります.

問題 1 これらの関数のグラフを描いて, 入力に対して**一つの**出力を**対応**させることを確かめてください.

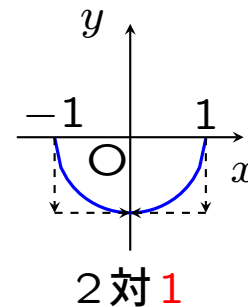
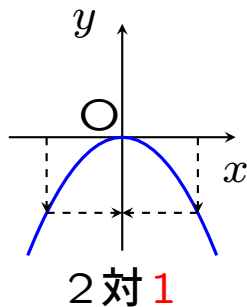
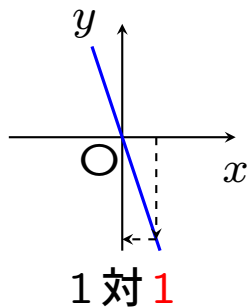
★ よこ軸: x , たて軸: y .

$$y = -3x.$$

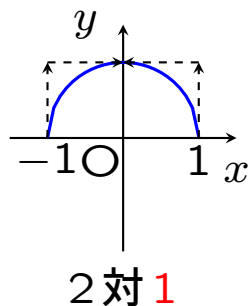
$$y = -3x^2.$$

$$y = -\sqrt{1-x^2}.$$

解 よこ軸：独立変数 たて軸：従属変数



注意 $\sqrt{1 - ()^2}$



中心 $(0, 0)$, 半径 1 の円 $x^2 + y^2 = 1^2$.

$$y^2 = 1 - x^2.$$

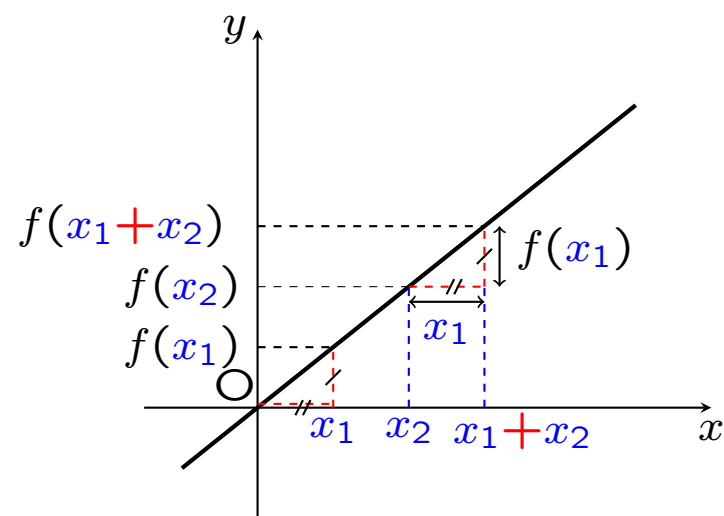
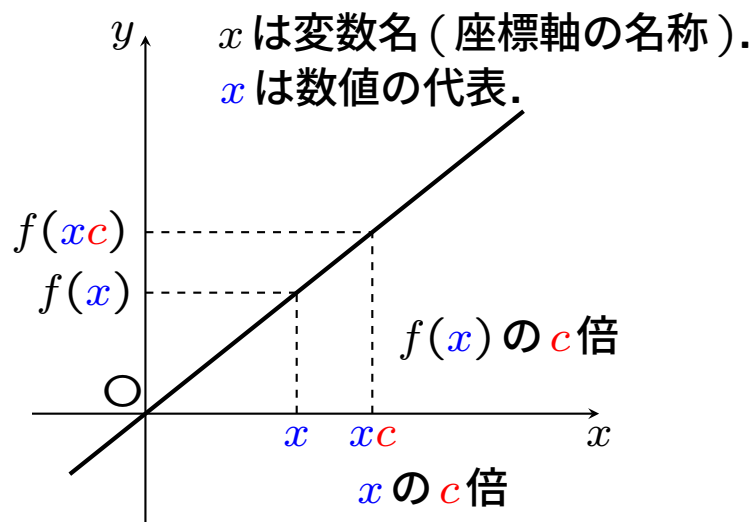
$$y = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

Q2 線型性はどういう性質でしょうか？

これらのどの関数にも成り立つのでしょうか？

線型性とは

比例を表す直線のグラフにだけ成り立つ二つの性質



★ 本書 p.46

- ① x を c 倍すると, $f(x)$ も c 倍になる.
 $f(xc)$ は $f(x)$ の c 倍である.

- ② x_1 と x_2 との和を入力すると,
 $f(x_1)$ と $f(x_2)$ との和を出力する.

問題 2

二つの性質を関数の記号 $f()$ で表してください.

★ 20 秒間 考えてわからなかったら, [本書 p.47](#) を見よ.

解 「数学は記号の科学」だから、**日本文を式に翻訳**できるように練習します.

★ ダイジェスト版1 p.5

$$\textcircled{1} \quad f(xc) = \{f(x)\}c.$$

$$\textcircled{2} \quad f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2).$$

$$f \underbrace{(xc)}_{\text{入力の}c\text{倍}} = \underbrace{\{f(x)\}}_{\text{出力の}c\text{倍}} c.$$

$$f \underbrace{(x_1+x_2)}_{\text{入力の和}} = \underbrace{f(x_1)+f(x_2)}_{\text{出力の和}}.$$

「線の形を扱う幾何(図形)」ではなく「関数の**型**(比例を表す直線のグラフに成り立つ**性質**)」だから「**線型**」と書きます.

Q3 線型性の具体的な意味は何でしょうか?

例 物品の購入

★ 本書 pp.48 – 49

- ① 個数を c 倍すると, 支払額も c 倍になります.
- ② x_1 個と x_2 個に分けて購入しても, 支払額は同じです.
($x_1 + x_2$) 個をまとめて購入しても,

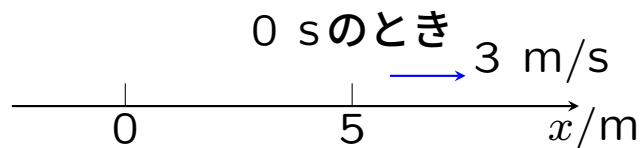
自習

★ 本書 p.47 問 1.1

非線型

例 1 次関数

物体の運動



位置は時刻の関数 (対応の規則)

どこ いつ
↓ ↓
 $x = f(t)$. time の頭文字

定義
 $f(t) = 5 \text{ m} + 3 \text{ m/s} \times t$.
 $y = b + a x$
と同じ形

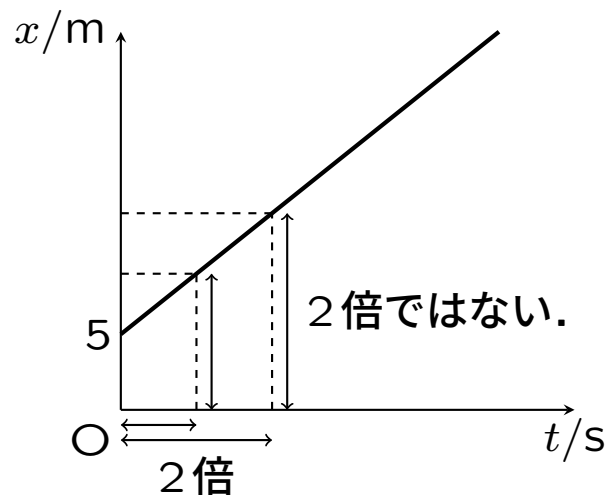
関数 $f() = 5 \text{ m} + 3 \text{ m/s} \times ()$.

関数値 $f(t) = 5 \text{ m} + 3 \text{ m/s} \times (t)$.

問題3 $f(t) = 5 \text{ m} + 3 \text{ m/s} \times t$ が線型でないことを示してください.

★ 問題2 と同じように ①, ②を調べよ.

解



① $f(tc) = 5 \text{ m} + 3 \text{ m/s} \times tc.$

入力 of c 倍

$\{f(t)\}c = (5 \text{ m} + 3 \text{ m/s} \times t)c.$

出力 of c 倍

$= 5 \text{ m} \times c + 3 \text{ m/s} \times tc.$

不一致

② $f(t_1 + t_2) = 5 \text{ m} + 3 \text{ m/s} \times (t_1 + t_2).$

入力の和

$f(t_1) + f(t_2) = (5 \text{ m} + 3 \text{ m/s} \times t_1) + (5 \text{ m} + 3 \text{ m/s} \times t_2)$

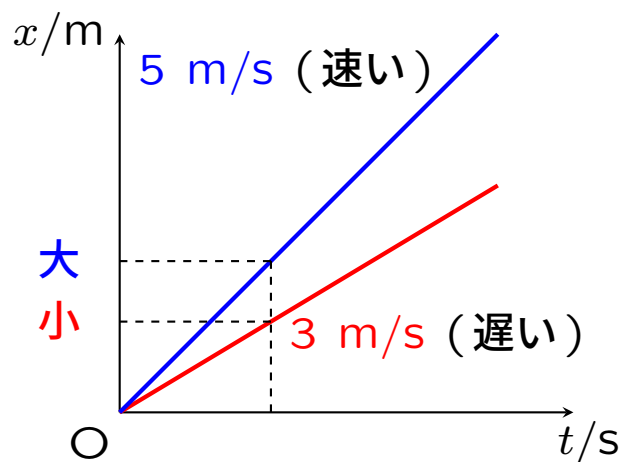
出力の和

$= 10 \text{ m} + 3 \text{ m/s} \times (t_1 + t_2).$

不一致

グラフの見方 パラメータの意味 ★ 本書 p.44

例1 物体の位置と時間との関係



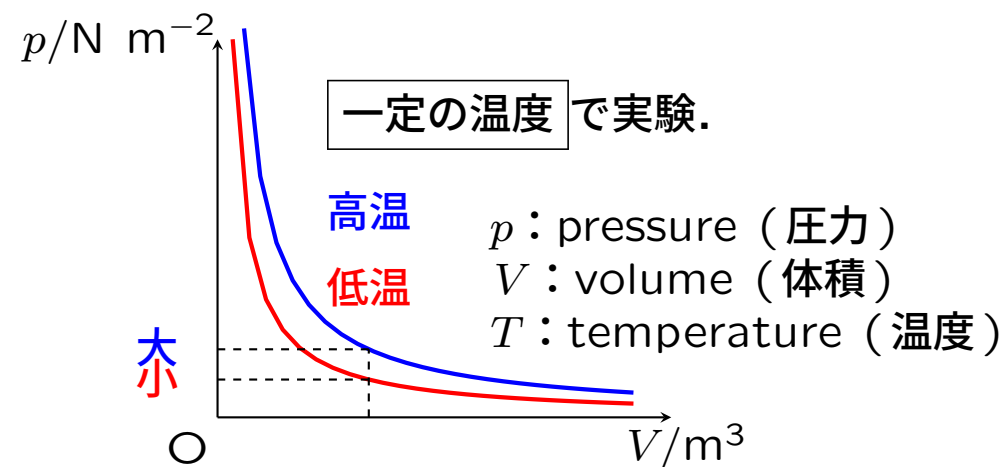
$$x = \boxed{5 \text{ m/s}} \times t.$$

$$x = \boxed{3 \text{ m/s}} \times t.$$

速度はパラメータ.

パラメータ：一つのグラフで一定であるが、ほかのグラフを
考えることができるので、可変でもある定数.

例2 理想気体の体積と圧力との関係



$$p = \frac{Nk\boxed{T}}{V} \text{ または } p = \frac{nR\boxed{T}}{V}.$$

N, k, n, R は一定量.

温度はパラメータ.

問題点

実験データが**曲線のグラフ**で表せたとき



どんな**関数**で表せるか？

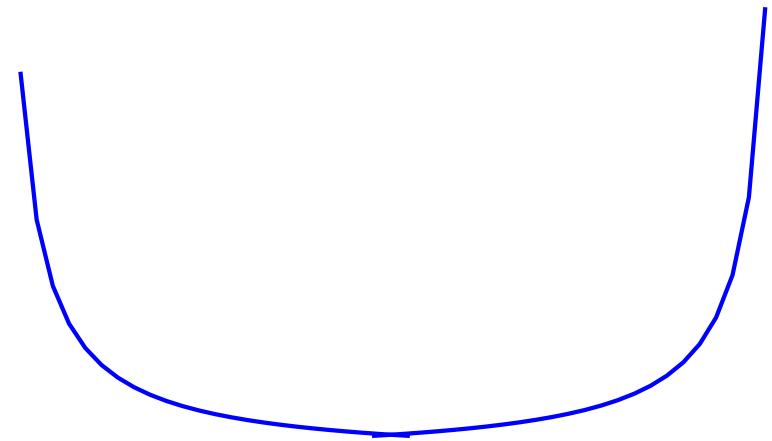
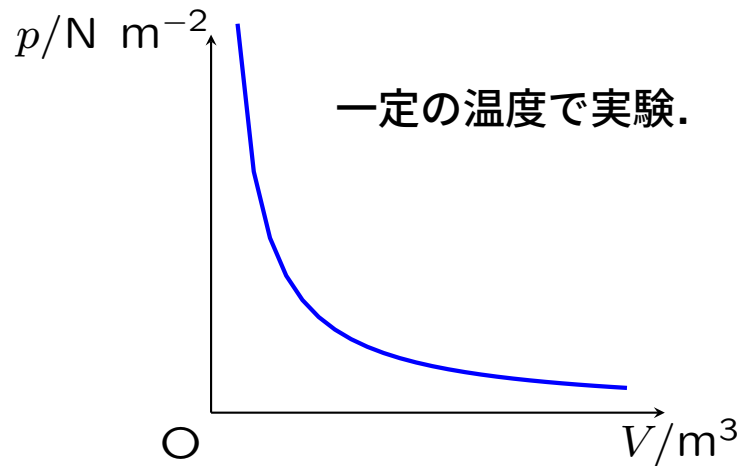


比例を手がかりにして判断する.

- グラフが原点を通る直線るとき 確かに**比例**と判断できます.

反比例の場合（一定の温度で理想気体の体積と圧力との関係）に、
「反比例である」と判断する方法を確かめてみます.

★ 本書 pp.50 – 51



このグラフの一部の可能性はないか？

★ 中学理科で比例を手がかりにして、 P と V が反比例することを調べる方法を扱った時代があります。

問題 4 比例を手がかりにして、圧力が体積に反比例することを示す方法を教えてください。

解 理想気体の状態方程式

温度が一定のとき

$$pV = C \quad (C \text{ は一定量})$$

が正しいとすると

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{C}V$$

$$[p = C \cdot V^{-1}]$$

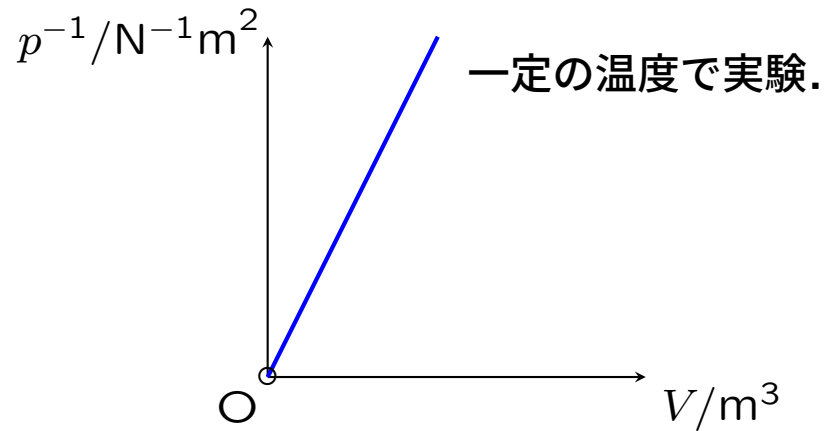
が成り立ちます.

圧力の逆数を体積に対してプロットすると,

原点を通る直線のグラフ

が描けるはずです.

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{p} & = & \frac{1}{C} & V \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ y & = & a & x \end{array}$$



「 p^{-1} が V に比例する」ことがわかったとき

$$p^{-1} = aV \quad (a \text{ は一定量})$$

だから

$$pV = C \quad \leftarrow \frac{1}{p} = aV \text{ だから } pV = \frac{1}{a}. \quad C = \frac{1}{a} \text{ とおく.}$$

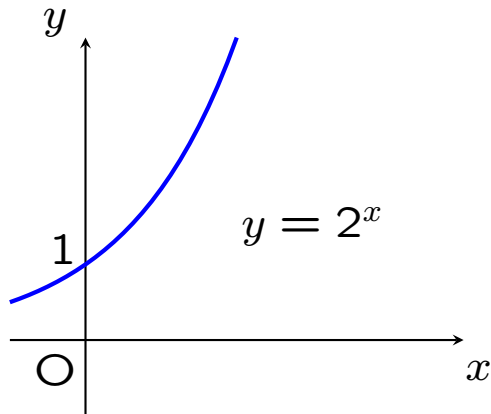
であり,

「 p は V に反比例する」

と判断します.

反比例でない場合の曲線のグラフ

例



このグラフも直線のグラフに書き換えることができます。
これから、その方法を理解します。

Q4 どのような傾きの直線であることがわかると、
もとのグラフが $y = 2^x$ であることが判断
できるのでしょうか？

準備

指数と対数

★ 本書 p.53, pp.57 – 58

日本語

「 a は c の α 乗」

指数語

読む順序

$a \overset{\text{は}}{=} c \text{ の } \alpha \text{ 乗}$
→

$\alpha \text{ 乗} = \log_c \text{ の } a \text{ は}$
←

対数語

読む順序

辞書

日本語

「 a は c の α 乗」

「 b は c の β 乗」

指数語

$a = c^\alpha$

$b = c^\beta$

対数語

$\alpha = \log_c a$

$\beta = \log_c b$

$a = c^\alpha$, $\alpha = \log_c a$ の c を **底** といいます。

応用

「 10^3 は10の3乗」

「 10^2 は10の2乗」

「 $10^3 \times 10^2$ は10の5乗」

$$3 \text{ 乗} = \log_{10} \text{ の } 10^3 \text{ は}$$

$$2 \text{ 乗} = \log_{10} \text{ の } 10^2 \text{ は}$$

$$\begin{array}{r} +) \\ \hline \end{array}$$

$$5 \text{ 乗} = \log_{10} 10^3 + \log_{10} 10^2$$

$$5 \text{ 乗} = \log_{10} \text{ の } (10^3 \times 10^2) \text{ は}$$

10^3 と 10^2 を掛けると

指数3と2を足した数になる.

$$10^3 \times 10^2 = 10^{3+2}.$$

← 同じ

一般化

「 a は c の α 乗」

「 b は c の β 乗」

$$a = c^\alpha.$$

$$b = c^\beta.$$

$$\alpha = \log_c a.$$

$$\beta = \log_c b.$$

$$\alpha + \beta = \log_c a + \log_c b.$$

↑

同じ

↓

「 ab は c の $(\alpha + \beta)$ 乗」 $ab = c^{\alpha + \beta}.$ $\alpha + \beta = \log_c ab.$

だから

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b.$$

「 $(10^3)^2$ は 10 の 6 乗」

$$\boxed{6} \text{ 乗} = \log_{10} \text{ の } (10^3)^2 \text{ は}$$

「 10^3 は 10 の 3 乗」

$$3 \text{ 乗} = \log_{10} \text{ の } 10^3 \text{ は}$$

$$\boxed{2 \times 3} = 2 \times \log_{10} 10^3$$

同じ

10^3 を 2 乗すると

指数 3 は 2 倍になる.

$$(10^3)^2 = 10^{3 \times 2}.$$

一般化

「 a は c の α 乗」

$$a = c^\alpha.$$

$$\alpha = \log_c a.$$

「 a^k は c の $k\alpha$ 乗」

$$a^k = (c^\alpha)^k = c^{k\alpha}.$$

$$k\alpha = \log_c a^k.$$

↑

同じ

↓

$$k \times \alpha = k \times \log_c a.$$

だから

$$\log_c a^k = k \log_c a.$$

次回のための予習

反比例でない曲線のグラフの判断 [本書 1.2.3 項](#)

A4 判または B5 判の紙を用意してください.