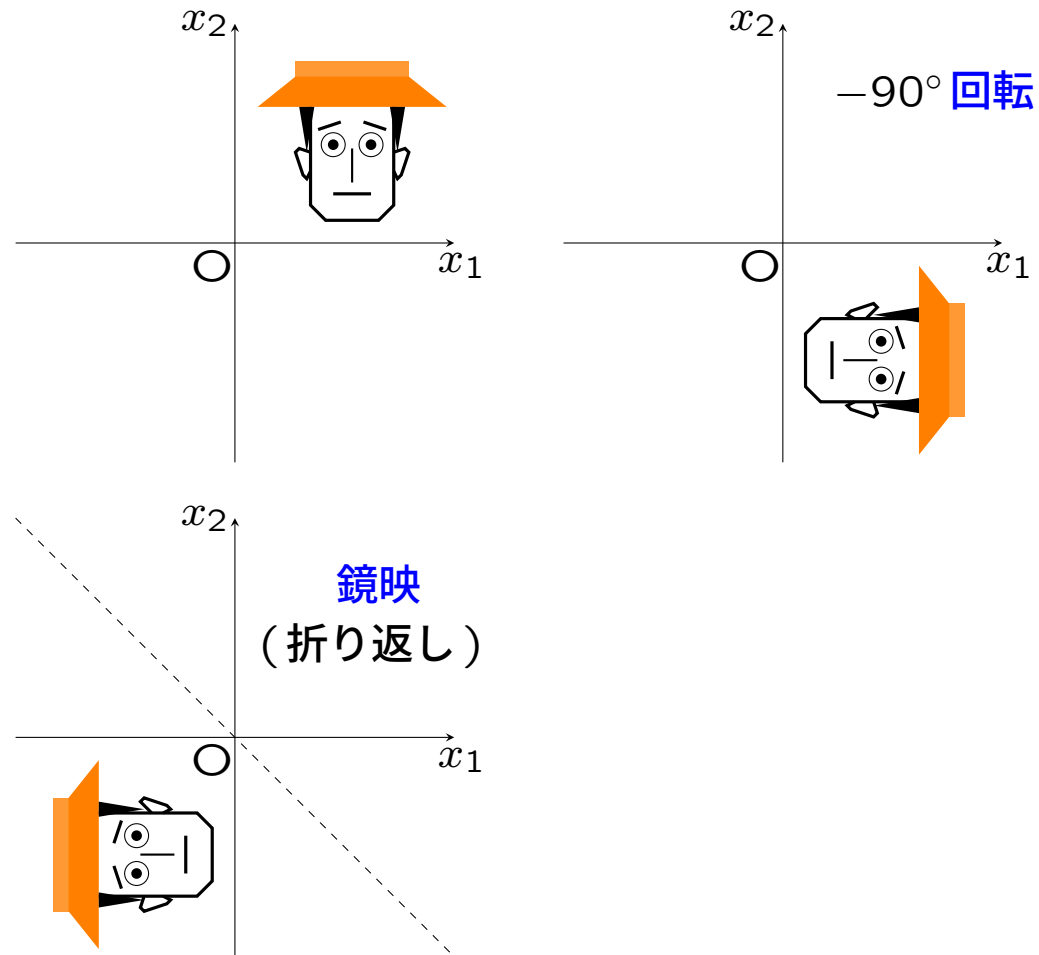


数学オフィスアワー 現場で出会う微積分・線型代数
ダイジェスト版 12

今回のはじめに 線型代数の方法はアニメ, 分子模型などの描画に応用できます.



マトリックスの図形への応用

前回まで 量どうしの関係を表すマトリックス量

例
$$\begin{pmatrix} 7 \text{ セット} \\ 2 \text{ セット} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \text{ セット / 本} & -3 \text{ セット / 本} \\ -\frac{3}{2} \text{ セット / 本} & \frac{5}{2} \text{ セット / 本} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 47 \text{ 本} \\ 29 \text{ 本} \end{pmatrix}.$$

今回 図形 (原子の位置など) の回転, 鏡映 (折り返し) の操作を表すマトリックス

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}}_{\text{あとの位置}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\text{はじめの位置}}.$$

記号 $x' = Ax$ 比例 $y = ax$ と同じ形
太文字: ベクトル量
大文字: マトリックス量

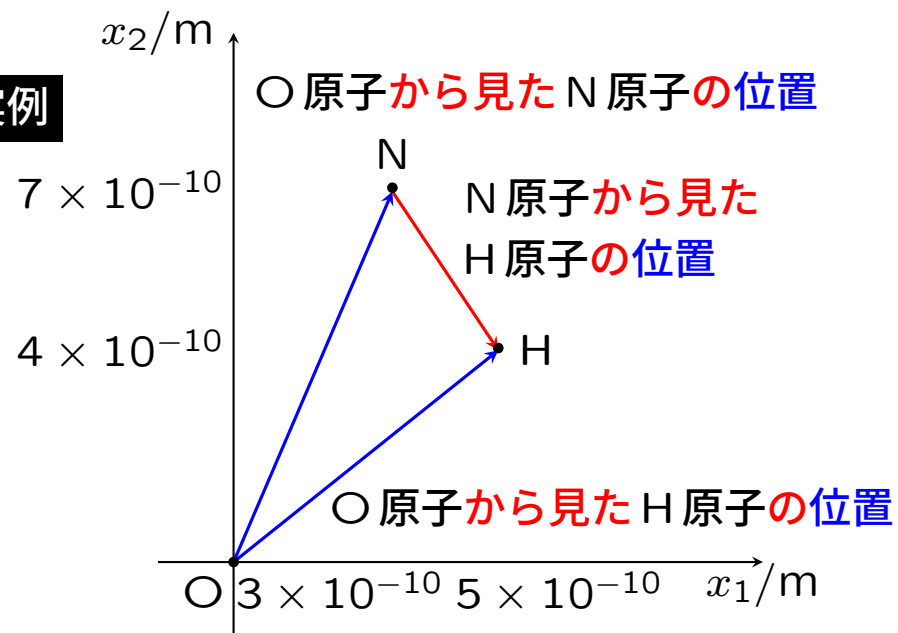
線型変換 (比例の形だから線型変換という)

★ 本書 pp.411 – 414

変換とは見方を変える操作 (「式の変形」の意味ではない).

準備 位置の表し方

実例



座標 (数値)

座標軸は数直線.

文字の使い方

$$x_1 = \underbrace{5 \times 10^{-10}}_{\text{数値 (座標)}} \underbrace{\text{m}}_{\text{単位}}$$

x_1 は量 (位置) を表す.

$$\underbrace{5 \times 10^{-10}}_{x_1} \text{ m}$$

x_1 は数値を表す.

★ 本書 pp.411 – 414

オングストローム $\text{\AA} = 10^{-10} \text{ m}$. ★ 本書 p.27, p.31, ダイジェスト版2 p.12

H原子 座標 $(5 \times 10^{-10}, 4 \times 10^{-10})$

○原子から見たH原子の位置

$$\begin{pmatrix} 5 \times 10^{-10} \text{ m} \\ 4 \times 10^{-10} \text{ m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \times 10^{-10} \\ 4 \times 10^{-10} \end{pmatrix} \text{ m}$$

位置		位置ベクトル	
ベクトル量	=	ベクトル × 単位量	
(量の組)		(数の組)	

位置は量の名称.

問題 1 N原子から見たH原子の位置を求めてください.

解

(H 原子の位置) − (N 原子の位置)

$$\begin{pmatrix} (5 \times 10^{-10} - 3 \times 10^{-10}) \text{ m} \\ (4 \times 10^{-10} - 7 \times 10^{-10}) \text{ m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +2 \times 10^{-10} \text{ m} \\ -3 \times 10^{-10} \text{ m} \end{pmatrix}.$$

符号の読解 $+$ N 原子の右側, $-$ N 原子の下側.

H 原子の座標

$$(5 \times 10^{-10}, 4 \times 10^{-10})$$

O 原子から見た

H 原子の位置ベクトル

$$\begin{pmatrix} 5 \times 10^{-10} \\ 4 \times 10^{-10} \end{pmatrix}$$

N 原子から見た

H 原子の位置ベクトル

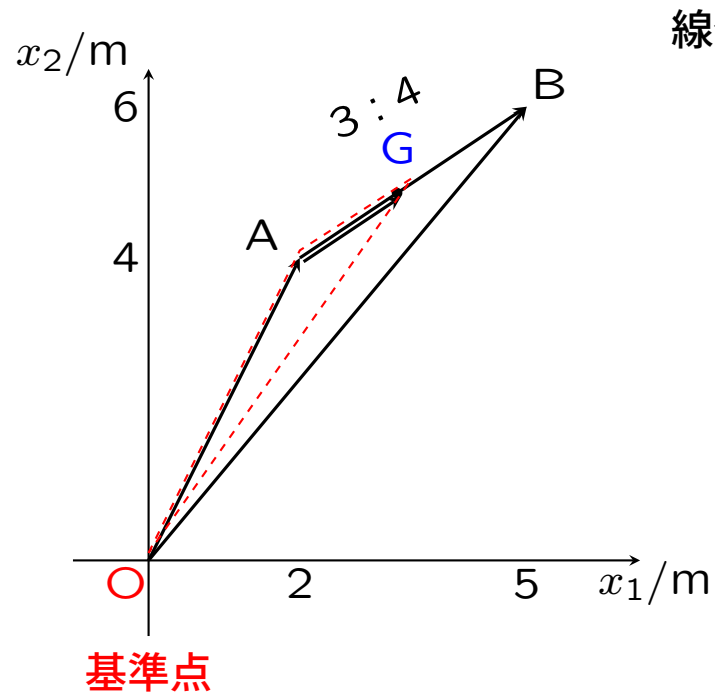
$$\begin{pmatrix} 2 \times 10^{-10} \\ -3 \times 10^{-10} \end{pmatrix}$$

O 原子から見て位置を表すと, 座標と位置ベクトルの成分との値が一致するから便利です.

★ 本書 pp.412 – 413

位置ベクトルの応用—内分点の求め方

★ 本書 p.413



三角形に着目して一筆書きの感覚で

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG}$$

と表します。

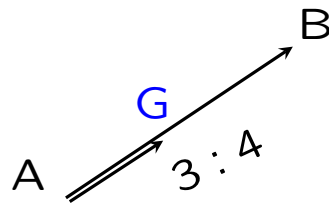
Q1 \overrightarrow{OG} を表す式の右辺に \overrightarrow{AG} を含んでいるから、点 G の位置が求まらないのではないのでしょうか？

問題 2

\overrightarrow{AB} を 3 : 4 に内分することに注意して,

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG}$$

の右辺の \overrightarrow{AG} を \overrightarrow{AB} で表してください.



★ 本書 pp.414 – 415

解 \overrightarrow{AG} は \overrightarrow{AB} と同じ向きで縮小した幾何ベクトルだから、

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{3+4} \overrightarrow{AB}$$

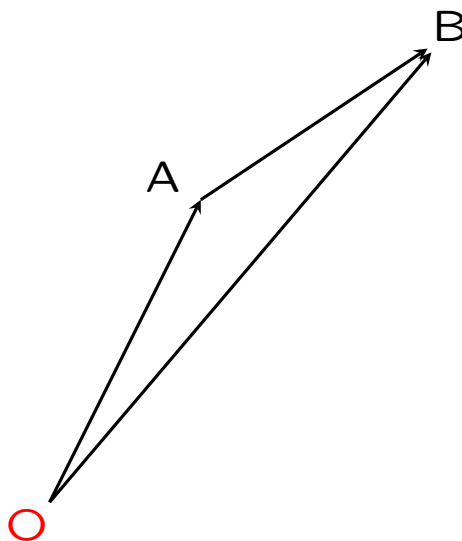
と表せます.

Q2 \overrightarrow{AB} はどのようにして求めるのでしょうか？

$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \text{ m} \\ 4 \text{ m} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 5 \text{ m} \\ 6 \text{ m} \end{pmatrix}$ と表せることがわかっています.

問題3 \overrightarrow{AB} を \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} で表してください.

解 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$



★ 本書 pp.414 – 415

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG},$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{3+4}\overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

だから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OA} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{3}{7}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \frac{4}{7}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{7}\overrightarrow{OB} \quad \blacktriangleleft \quad \frac{4\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{7}\end{aligned}$$

と表せます.

★ 本書 pp.414 – 415

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} 2 \text{ m} \\ 4 \text{ m} \end{pmatrix}, \vec{OB} = \begin{pmatrix} 5 \text{ m} \\ 6 \text{ m} \end{pmatrix} \text{ のとき}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \text{ m} \\ 4 \text{ m} \end{pmatrix} \frac{4}{7} + \begin{pmatrix} 5 \text{ m} \\ 6 \text{ m} \end{pmatrix} \frac{3}{7} = \begin{pmatrix} \frac{23}{7} \text{ m} \\ \frac{34}{7} \text{ m} \end{pmatrix}.$$

応用例 Aに4 kg, Bに3 kg の物体があるとき, **重心**の位置は

$$\frac{4 \text{ kg } \vec{OA} + 3 \text{ kg } \vec{OB}}{7 \text{ kg}}$$

◀ 加重平均

です.

$$\text{平均点} = \frac{(\text{得点} \times \text{人数}) \text{ の和}}{\text{人数}}$$

例
$$\frac{4 \text{ 人} \times 2 \text{ 点} + 3 \text{ 人} \times 5 \text{ 点}}{(4 + 3) \text{ 人}}$$

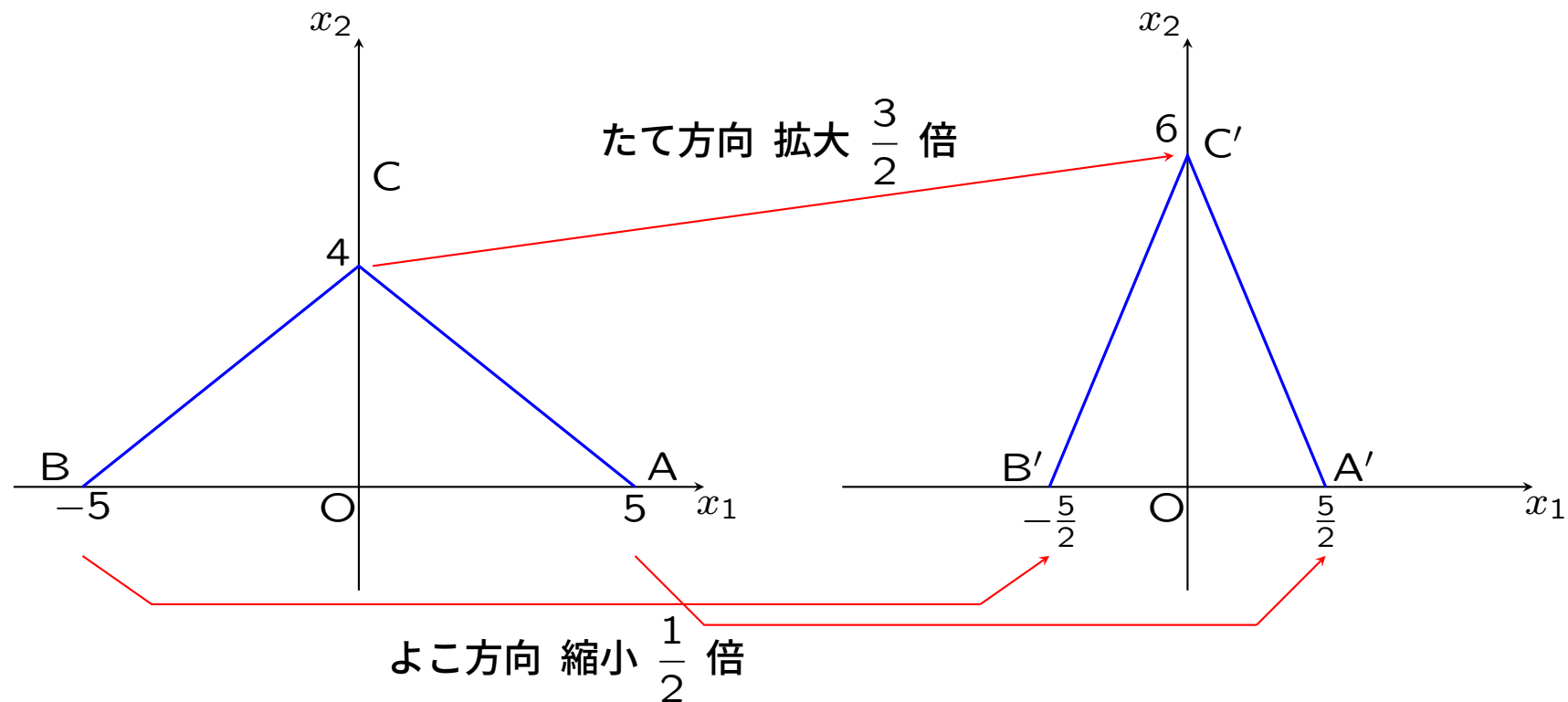
と同じ考え方です.

★ 本書 pp.415 – 416

図形の拡大・縮小 — 変換をマトリックスで表す方法

★ 本書 p.416

例 テントを閉じるとき



$$\begin{array}{c}
 \text{新成分} \quad \begin{array}{c} 1 \text{ よりも小} \\ \downarrow \end{array} \quad \text{旧成分} \\
 \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \quad \text{記号 } \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad \text{比例の形} \\
 \text{うつり先} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ 1 \text{ よりも大} \end{array} \quad \text{もと} \\
 \text{マトリックス} \\
 \text{成分をうつすはたらき}
 \end{array}$$

太文字：タテベクトル
大文字：マトリックス

問題 4 右辺のマトリックスと数ベクトルとの積を求めてください.

★ 点 $\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ のうつり先も確かめよ.

解

★ 本書 pp.417 – 419

$$\begin{pmatrix} \boxed{\frac{1}{2} & 0} \\ \boxed{0 & \frac{3}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{x_1} \\ \boxed{x_2} \end{pmatrix}$$

ヨコベクトルの並びと見ます。

ヨコベクトルとタテベクトルとのスカラー積を計算して、第1行と第2行に並べます。

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \times x_1 + 0 \times x_2 \\ 0 \times x_1 + \frac{3}{2} \times x_2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 \\ \frac{3}{2}x_2 \end{pmatrix}.$$

式の読解

$\frac{1}{2}x_1$ はよこ方向に $\frac{1}{2}$ 倍, $\frac{3}{2}x_2$ はたて方向に $\frac{3}{2}$ 倍になることを表します。

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ のうつり先 } \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ のうつり先 } \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ のうつり先}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 \\ \frac{3}{2}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 \\ \frac{3}{2}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 \\ \frac{3}{2}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot$$

問題5 テントをもとの形に戻すはたらきは, どのようなマトリックスで表せるでしょうか？

★ このはたらきを表すマトリックスは $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ の逆マトリックスですが, この例では計算しなくても逆マトリックスが求まります.

解

★ 本書 pp.417 – 419

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \text{ よりも大} \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ 1 \text{ よりも小} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \text{もと} & \text{うつり先} \end{array} \end{array} \quad \text{記号 } \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{x}'.$$

逆マトリックス
成分を戻すはたらき

問題6 右辺のマトリックスと数ベクトルとの積を求めてください.

★ 点 $\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ がもとの位置に戻ることを確かめよ.

解

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{x_1'} \\ \boxed{x_2'} \end{pmatrix}$$

ヨコベクトルの並びと見ます。

ヨコベクトルとタテベクトルとのスカラー積を計算して、第1行と第2行に並べます。

$$\begin{pmatrix} \color{red}{2} & 0 \\ 0 & \color{red}{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \color{red}{2} \times x_1' + 0 \times x_2' \\ 0 \times x_1' + \color{red}{\frac{2}{3}} \times x_2' \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \color{red}{2}x_1' \\ \color{red}{\frac{2}{3}}x_2' \end{pmatrix}.$$

式の読解

$\color{red}{2}x_1'$ はよこ方向に $\color{red}{2}$ 倍, $\color{red}{\frac{2}{3}}x_2'$ はたて方向に $\color{red}{\frac{2}{3}}$ 倍になることを表します。

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ のうつり先 } \quad \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ のうつり先 } \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ のうつり先}$$

$$\begin{pmatrix} 2x_1' \\ \frac{2}{3}x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \quad \begin{pmatrix} 2x_1' \\ \frac{2}{3}x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \quad \begin{pmatrix} 2x_1' \\ \frac{2}{3}x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot$$

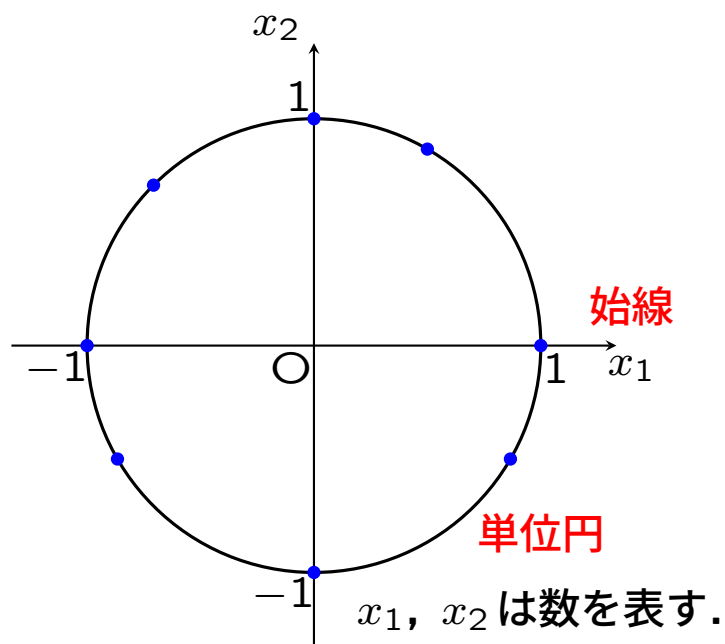
★ 点 $\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ がもとの位置に戻ることがわかる.

回転 — うつり先を求める規則の表し方

例 分子模型

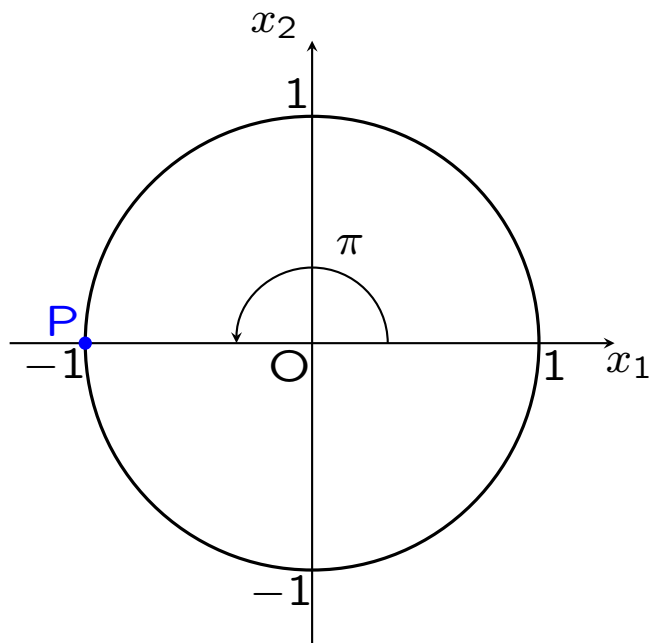
準備 円関数 (circular function)

★ 本書 pp.88 – 89, p.420, pp.426 – 429

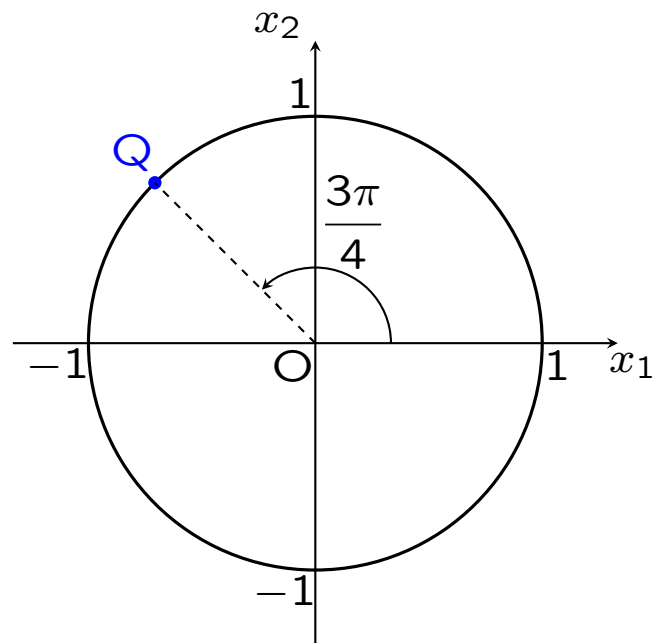


単位円の周上の位置に関係なく,
始線から角 θ を測り,
ヨコ座標を $\cos\theta$,
タテ座標を $\sin\theta$
と表します.

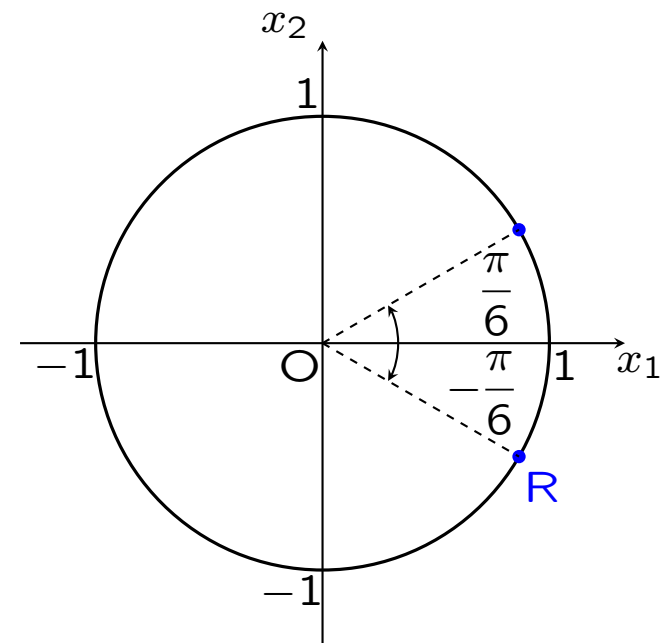
例1 点P



例2 点Q

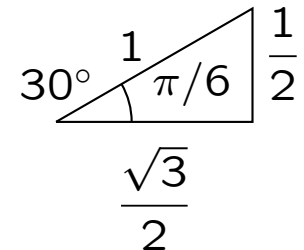
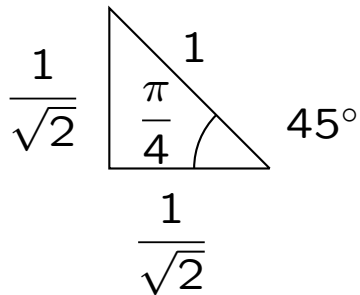


例3 点R



問題7 点P, Q, R のヨコ座標, タテ座標を読み取ってください.

解



点P

ヨコ $\cos \pi = -1.$

タテ $\sin \pi = 0.$

点Q

ヨコ $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$

タテ $\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

点R

ヨコ $\cos \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos \left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

タテ $\sin \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin \left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$

自習 計算練習 本書 pp.411 – 415, pp.417 – 419

次回のための予習 本書 pp.220 – 434

回転マトリックスの表し方と使い方

鏡映マトリックスの表し方と使い方