

数学オフィスアワー 現場で出会う微積分・線型代数  
ダイジェスト版 4

## 前回 今後の問題提起

**例** 「グラフが  $y = 2^x$  であることを知るには, どうすればいいか」

★ ダイジェスト版 3 p.17

この問題のための準備として, 指数と対数の性質を取り上げました.

**Q1** 常用対数 (底 10) はどんなときに使うでしょうか?

★ 化学, 高校数学を思い出すこと.

**例 1** 水素イオン濃度（オキソニウムイオンまたはヒドロニウムイオン）★ 本書 pp.53 – 54

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-7} \square \text{ など.}$$

**問題 1**  $\square$  にあてはまる  $[\text{H}_3\text{O}^+]$  の単位は何でしょうか？

**解**  $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-7} \text{ mol/L}$  など.

一般に

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}} \text{ mol/L}$$

と表します.

**問題2** この式から pH を求めてください.

★ 常用対数を使って表す.

**解** 量 = 数値 × 単位, 数値 = 量 / 単位. ★ ダイジェスト版 2 p.7

**手順 1**  $\underbrace{10^{-\text{pH}}}_{\text{数値}} = \underbrace{[\text{H}_3\text{O}^+]}_{\text{量}} / \underbrace{(\text{mol L}^{-1})}_{\text{単位}}.$

**注意**  $[\text{H}_3\text{O}^+]/\text{mol/L}$  も正しいが,  $[\text{H}_3\text{O}^+]/(\text{mol L}^{-1})$  と書きます.

**手順 2**  $\log_{10} 10^{-\text{pH}} = \log_{10}\{[\text{H}_3\text{O}^+]/(\text{mol L}^{-1})\}.$

$$-\text{pH} = \log_{10} \underbrace{\{[\text{H}_3\text{O}^+]/(\text{mol L}^{-1})\}}_{\text{真数は数値であることに注意}}.$$

$$\text{pH} = -\log_{10}\{[\text{H}_3\text{O}^+]/(\text{mol L}^{-1})\}.$$

**注意**  $\log_{10}[\text{H}_3\text{O}^+] = \log_{10}(10^{-\text{pH}} \text{ mol/L})$  は正しくありません.

$\log_{10}(10^{-\text{pH}} \times \text{mol/L}) = \log_{10} 10^{-\text{pH}} + \log_{10}(\text{mol/L})$  は成り立ちません.  
右辺第2項で「mol/Lは10の何乗」といえないからです.

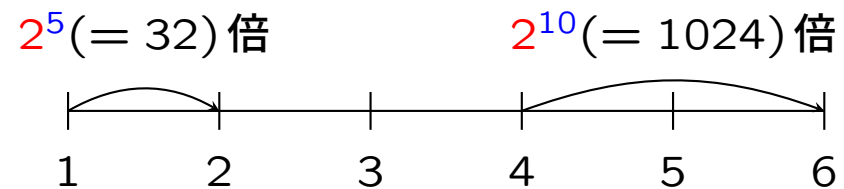
**例2** 0の桁数の程度で数の大きさを表す.

$$\log_{10} 100 = 2.$$

$$\log_{10} 1000 = 3.$$

- 地震の規模を示すマグニチュード

**Q2** 4と6とのちがいは1と2とのちがいの2倍の強さでしょうか？



数値の感覚  $2^{10} \doteq 10^3$ .

「2の10乗」よりも「10の3乗」のほうが概算に便利.

問題3  $2^{10} \doteq 10^3$  を使って,  $\log_{10} 2$  の近似値を求めてください.

★ 本書 pp.56 – 57

解

$$2^{10} \doteq 10^3$$

の常用対数は

$$\log_{10} 2^{10} \doteq \log_{10} 10^3.$$

$$10 \log_{10} 2 \doteq 3. \quad \blacktriangleleft \underbrace{\log_{10} 2 + \log_{10} 2 + \cdots + \log_{10} 2}_{10 \text{ 回足すと約 } 3.}$$

両辺を 10 で割ると

$$\log_{10} 2 \doteq 0.3.$$

2 を 10 のべき乗で表すと

$$2 \doteq 10^{0.3}.$$

**Q3**  $10^{0.3}$  は「0 が 0.3 桁」とはどういう意味でしょうか？



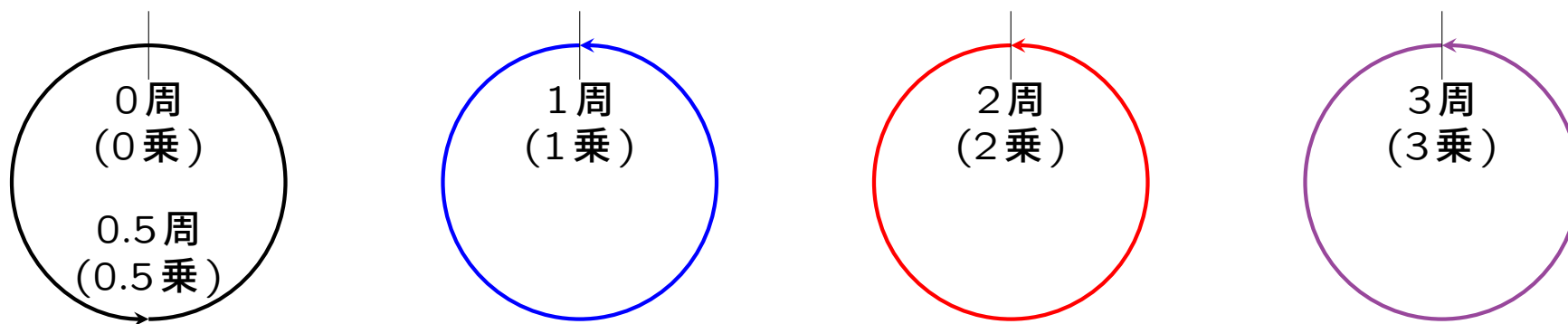
$10^0 (= 1)$  を出発点とする円周を考えて,

時計の針と反対向きに1周して  $10^1$ , 2周して  $10^2$ , ...

のように表します.

★ 本書 p.56

「0が2桁分の大きさの数」を「 $10^0$  から2周して到達する数」と考えて,  
「桁」の代わりに「周」で大きさを表します.



$2^{10} \doteq 10^3$  の意味 「2を10回掛けると3周」

0.3乗とは0.3周, 0.5乗とは0.5周,  $-1$ 乗とは $-1$ 周(時計の針と同じ向き).

$2^{10}$  を  $10^3$  として扱うと便利であるように,

底(…の)の変換とは「見方を変える操作」です. ★ 本書 pp.59 – 60

日本語

「81 は 3 の 4 乗」

指数語

81 は  $= 3$  の  $4$  乗

対数語

$4$  乗  $= \log_3$  の 81 は

「81 は 10 の  $\square$  乗」

81 は  $= 10$  の  $\square$  乗

$\square$  乗  $= \log_{10}$  の 81 は

数の大きさを知るときに便利.

$$\begin{aligned}\square &= \log_{10} 3^4 \\ &= 4 \log_{10} 3 \\ &\doteq 1.90.\end{aligned}$$

$$\blacktriangleleft 4 \times 0.4771$$

参考

$$4 = \log_3 81 = \frac{\log_{10} 81}{\log_{10} 3}.$$

$$\log_{10} \underbrace{3^4}_{81} = 4 \log_{10} 3.$$

**自習** 本書 pp.56 – 62, p.95 問題

- 実際に式を書いて計算練習すること.
- 解けないときは, 解説を熟読すること.

ねらい 曲線のグラフが表す関数を調べる方法 — 手がかり 線型性 (比例)

例1  $x$  と  $y$  との関係が  
指数関数  $y = a^x$   
で表せることを判断する方法

Q4 底  $a$  ( $a$  の) はどんな値を取るでしょうか (取れない値はあるか) ?

$$\begin{aligned} -1 &= (-1)^3 \\ &= \{(-1)^{\frac{3}{2}}\}^2 \\ &= \{(-1)^2\}^{\frac{3}{2}} \\ &= 1^{\frac{3}{2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

を見て考えてください.

★ 本書 p.63

このような矛盾を避けるために、 $a$ が取る値は、 $a > 0$ ,  $a \neq 1$ と決めます.

$a = 1$  のとき  $1^x = 1$  だから定数関数です.

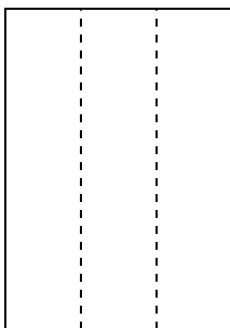
**Q5** 方眼紙を使わず, 計算もしないで  $y = 2^x$  のグラフを描くには,  
どうすればいいでしょうか?

★ A4判またはB5判の紙を用意してください.

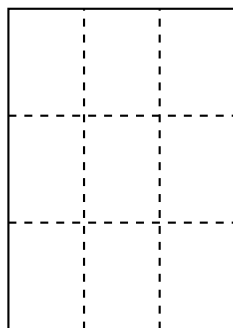
$y = 2^x$  (本書 p.64) の代わりに  $y = 3^x$  のグラフを描きます.

破線のように折り目を入れます.

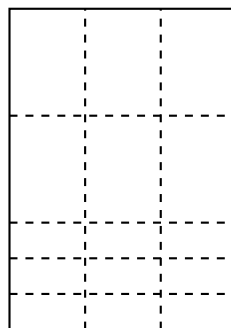
① 3等分



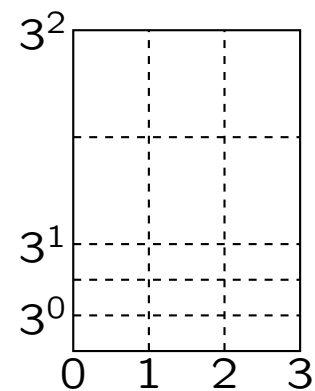
② 3等分



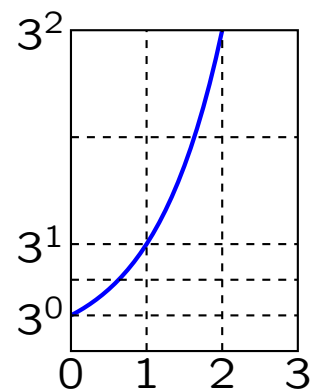
③ 3等分



④ 目盛



⑤ なめらかな曲線



$$y = 2^x$$

の両辺の常用対数は

$$\begin{aligned}\log_{10} y &= \log_{10} 2^x \\ &= x \log_{10} 2\end{aligned}$$

だから

$$\underbrace{\log_{10} y}_Y = \underbrace{(\log_{10} 2)}_a x \quad \text{比例の式}$$

と表せます.

★ 本書 p.68

たて軸： $\log_{10} y$  の値

よこ軸： $x$  の値

原点を通る傾き  $\log_{10} 2 (= 0.3010)$  の直線のグラフ

$\Rightarrow y = 2^x$  と判断する.

## 対数目盛

電卓などで  $\log_{10} y$  の値を求めないでグラフを作成する工夫

★ 本書 pp.68 – 69

★ 目盛の読み方だけでなく、現物の対数方眼紙にプロットしてみます。



目盛 (真数を目盛に記入)

真数は正だから目盛に0はありません.

$10^2$  —  $\log_{10} 10^2 = 2$  の高さ

$10^1$  —  $\log_{10} 10^1 = 1$  の高さ

$10^0$  —  $\log_{10} 10^0 = 0$  の高さ

$10^{-1}$  —  $\log_{10} 10^{-1} = -1$  の高さ

10 —

2 —

1 —

$\log_{10} 2$  の高さ

100 —

20 —

10 —

$\log_{10} 20$

$= \log_{10}(2 \times 10)$

$= \log_{10} 2 + \log_{10} 10$

$\log_{10} 10$  の高さ

★ 現物の対数方眼紙は本書 p.68 参照.

## 次回のための予習

$x$  と  $y$  との関係が**べき関数**  $y = x^n$  ( $n$  は定数) で表せることを判断する方法  
本書 pp.77 – 79