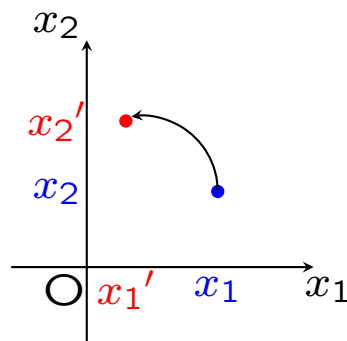


数学オフィスアワー 現場で出会う微積分・線型代数
ダイジェスト版 13

前回 図形の拡大・縮小の操作を表すマトリックス

今回 図形の回転・鏡映の操作を表すマトリックス

回転



$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

★ 本書 p.422

記号 x' = U x ◀ 比例 $y = ax$ と同じ形

注意 記号の使い方

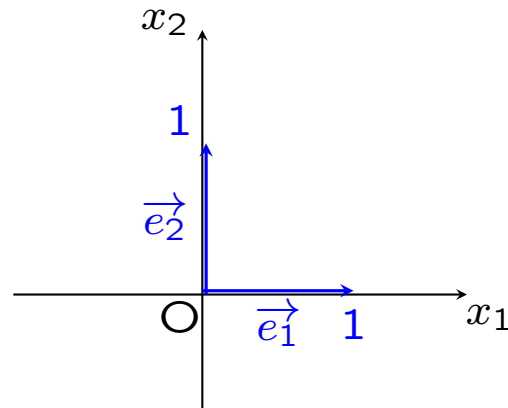
- タテベクトルとヨコベクトルとを区別するとき
ヨコベクトルにプライム $'$ を付ける.

$$\text{スカラー積} \quad \underset{\mathbb{Q}'}{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}} \underset{\mathbb{R}}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$$

- タテベクトルどうし
一方のタテベクトルにプライム $'$ を付ける.

$$\begin{array}{cc} \text{うつり先} & \text{もと} \\ \underset{\mathbb{R}'}{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}} & \underset{\mathbb{R}}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} \end{array}$$

問題 1 $\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を計算してください.



★ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\vec{e_1}$ を表す数ベクトル, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\vec{e_2}$ を表す数ベクトルである.

解

★本書 p.420, p.425

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_{11} \times 1 + u_{12} \times 0 \\ u_{21} \times 1 + u_{22} \times 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix}. \\ \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_{11} \times 0 + u_{12} \times 1 \\ u_{21} \times 0 + u_{22} \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

重要

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mathbf{e}_1 \end{pmatrix} \text{ のうつり先は } \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ \mathbf{u}_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \text{ のうつり先は } \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix}.$$

マトリックスの第1列

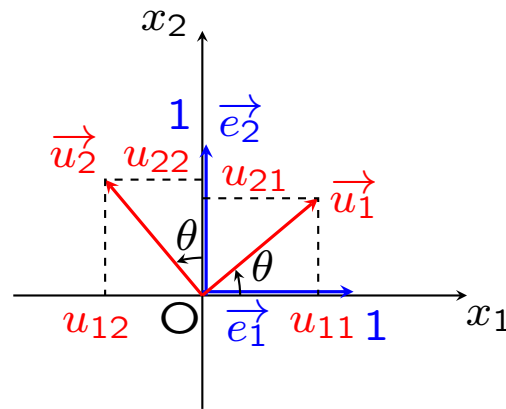
マトリックスの第2列

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ のうつり先を求めると、回転マトリックス、鏡映マトリックスをつくることができます。

原点を通る軸を中心に反時計まわりに θ 回転する操作

★ 本書 pp.420 – 422

問題 2 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で表せる幾何ベクトルのうつり先を求めてください.

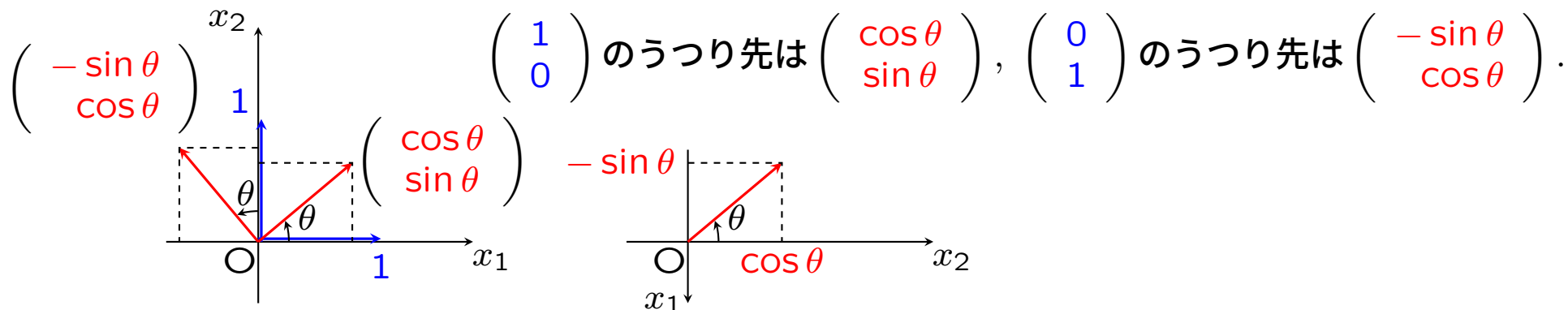


★ $u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}$ を θ で表す.

解

図を描くと、基本ベクトルのうつり先がわかります。

★本書 p.420

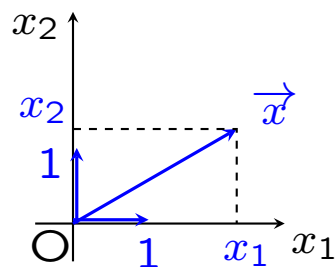


首を傾けて角を測り始める x_2 軸が水平に見えるようにします。

x_1 軸の負の側だから $-\sin \theta$ の負号が必要。

問題3

幾何ベクトル \vec{x} のうつり先を求めてください。

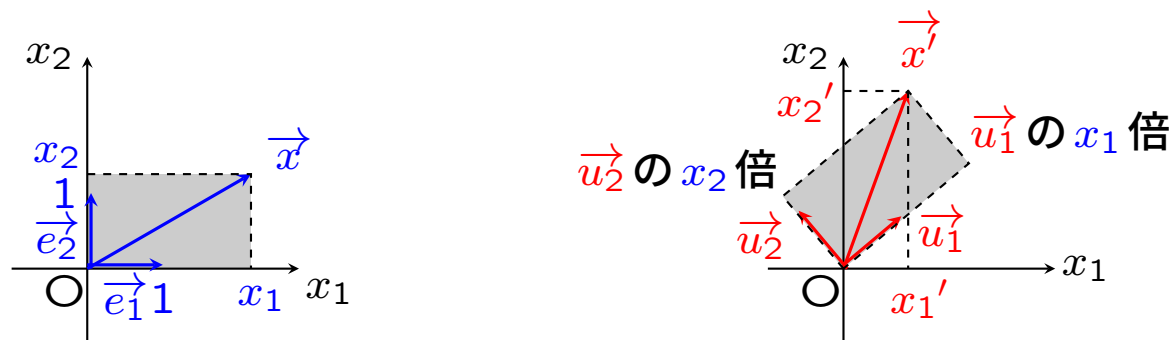


★ 基本ベクトルのうつり先も使って考える。

解

図を描いて「長方形が回転する」と考えます。

★本書 p.421



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_2.$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} x_2.$$

回転しても倍率は変わらない.

問題 4

右辺をマトリックスと $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ との乗法で表してください.

解

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$
★本書 p.422

回転マトリックス

問題5
 右辺のマトリックスとタテベクトルとの乗法を計算して、
 問題3と一致することを確認してください。

★ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のうつり先が $\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のうつり先が $\begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$
 であることも確かめる。

解

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta x_1 - \sin \theta x_2 \\ \sin \theta x_1 + \cos \theta x_2 \end{pmatrix}.$$

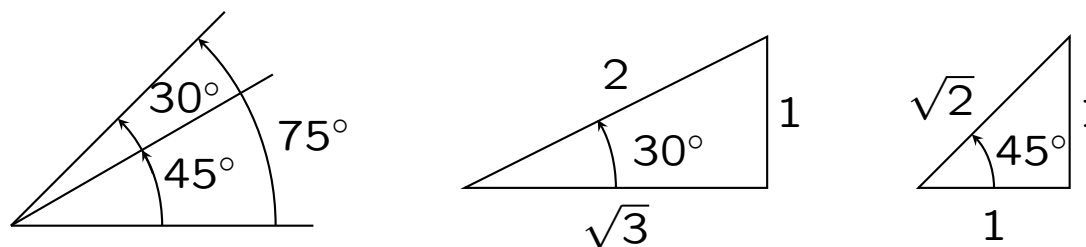
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta \times 1 - \sin \theta \times 0 \\ \sin \theta \times 1 + \cos \theta \times 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta \times 0 - \sin \theta \times 1 \\ \sin \theta \times 0 + \cos \theta \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

回転マトリックスの使い方

問題 6 $\cos 75^\circ$, $\sin 75^\circ$ の値を求めてください.

★ 本書 pp.437 – 439



45° 回転してから 30° 回転すると 75° 回転します.

注意 $\underbrace{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}}_{\text{あとの位置}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix}}_{\text{あとの回転}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}}_{\text{はじめの回転}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\text{はじめの位置}}$

$$\begin{pmatrix} \cos 75^\circ & -\sin 75^\circ \\ \sin 75^\circ & \cos 75^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}$$

$$= \dots$$

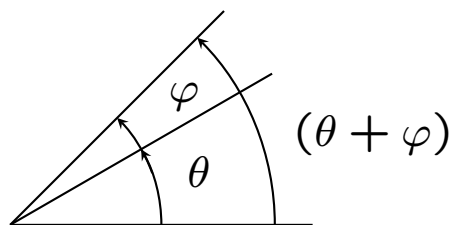
解

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \quad \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

一般化すると**加法定理**を示すことができます。

★本書 p.438



θ 回転してから φ 回転すると $(\theta + \varphi)$ 回転します。

注意 $\underbrace{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}}_{\text{あとの位置}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}}_{\text{あとの回転}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}}_{\text{はじめの回転}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\text{はじめの位置}}$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta + \varphi) & -\sin(\theta + \varphi) \\ \sin(\theta + \varphi) & \cos(\theta + \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ = \dots$$

問題7 マトリックスどうしの乗法を計算してください。

解

$$\text{左辺} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \varphi) & -\sin(\theta + \varphi) \\ \sin(\theta + \varphi) & \cos(\theta + \varphi) \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi & -\sin \theta \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

加法定理

左辺と右辺とを比べると

$$\begin{aligned} \cos(\theta + \varphi) &= \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi, \\ \sin(\theta + \varphi) &= \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi \end{aligned}$$

であることがわかります.

問題 8

★本書 p.440

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}}_{\text{つぎに } \theta \text{ 回転}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}}_{\text{はじめに } -\theta \text{ 回転}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{単位マトリックス}}$$

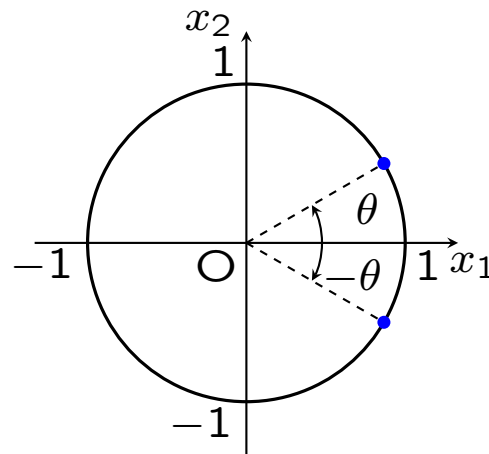
を確かめてください.

★ はじめに $-\theta$ 回転してから, つぎに θ 回転すると, もとの位置に戻るから 0° 回転する操作 (回転しない) と同じです.

★ $\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ の逆マトリックスであることがわかります.

解

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \times \cos \theta + (-\sin \theta) \times (-\sin \theta) & \cos \theta \times \sin \theta + (-\sin \theta) \times \cos \theta \\ \sin \theta \times \cos \theta + \cos \theta \times (-\sin \theta) & \sin \theta \times \sin \theta + \cos \theta \times \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



単位円の周上の位置に関係なく,

ヨコ座標は \cos , タテ座標は \sin

で表すから

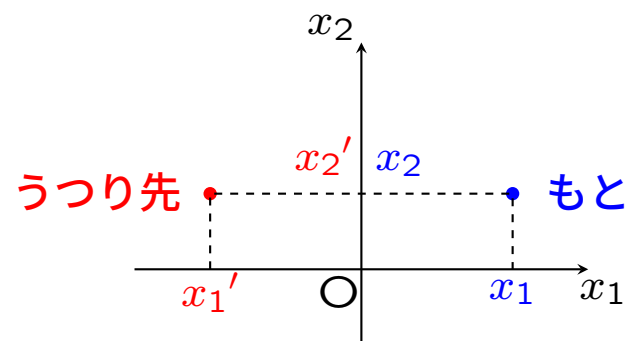
$$\cos(-\theta) = \cos \theta,$$

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta.$$

鏡映 (折り返し)

★ 本書 pp.429 – 431

例 x_2 軸に関する折り返し



図を見ると

$$x_1' = -x_1,$$

$$x_2' = x_2$$

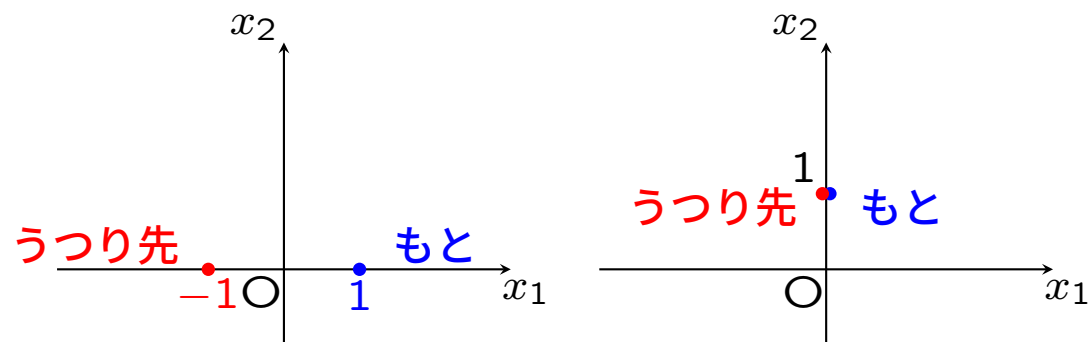
であることがわかります.

問題 9 x_2 軸に関する折り返しは

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

と表せます. 折り返しの規則を表すマトリックスを求めてください.

解



$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のうつり先は $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のうつり先は $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ だから,
問題 1 の考え方で

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

です.

直線 $x_2 = \left(\tan \frac{\theta}{2}\right) x_1$ に関する鏡映(折り返し)の操作

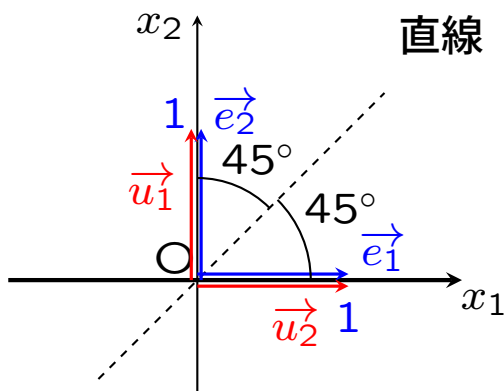
★ 本書 p.432

例 $\theta = 90^\circ$, $\theta/2 = 45^\circ$.

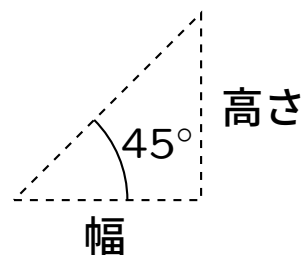
問題 10 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で表せる幾何ベクトルのうつり先を求めてください.

★ 図を描いて, うつり先を求める.

★ \vec{e}_1 が \vec{u}_1 にうつり, \vec{e}_2 が \vec{u}_2 にうつる.



直線 $x_2 = \underbrace{(\tan 45^\circ)}_{\text{傾き}} x_1 \leftarrow y = ax$ (原点を通る直線) と同じ形の式.



$$\text{傾き} = \frac{\text{高さ}}{\text{幅}}$$

解 図を描くと, 基本ベクトルのうつり先がわかります.

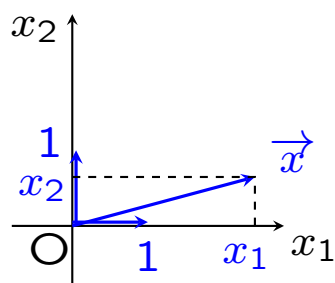
★本書 p.432

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のうつり先は $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のうつり先は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ だから,
問題 1 の考え方で

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

です.

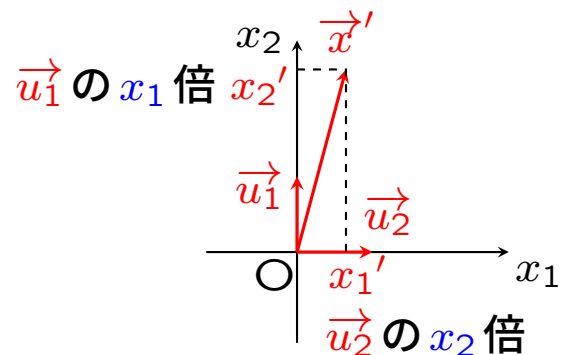
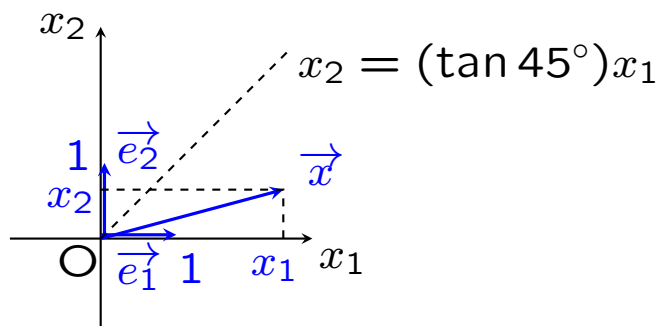
問題 11 幾何ベクトル \vec{x} のうつり先を求めてください.



★ 図を描いて, 基本ベクトルのうつり先も使って考える.
次ページの図を見れば基本ベクトルのうつり先を
調べなくても \vec{x} のうつり先はわかるが,
 $x_2 = (\tan 45^\circ)x_1$ でない直線に関する折り返しの
場合を考えるとときには本問の考え方が必要である.

解

★本書 pp.433 – 434



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_2.$$

↓ ↓ ↓ ↓

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2.$$

折り返しても倍率は変わらない.

問題 12

右辺をマトリックスと $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ との乗法で表してください.

解
$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$
 ★本書 p.434

鏡映マトリックス

問題 13 右辺のマトリックスとタテベクトルとの乗法を計算して、問題 11 と一致することを確認してください。

★ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のうつり先が $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のうつり先が $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ であることも確かめる。

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0x_1 + 1x_2 \\ 1x_1 + 0x_2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 1 + 1 \times 0 \\ 1 \times 1 + 0 \times 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 0 + 1 \times 1 \\ 1 \times 0 + 0 \times 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

注意 $\underbrace{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}}_{\text{あとの位置}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{つぎの折り返し}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{はじめの折り返し}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\text{はじめの位置}}.$

問題 14

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{つぎの折り返し}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{はじめの折り返し}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{単位マトリックス}}$$

を確かめてください.

★ はじめに折り返してから, 再び折り返すと, もとの位置に戻るから折り返さないのと同じです.

★ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の逆マトリックス (自分自身が逆マトリックス) であることがわかります.

解

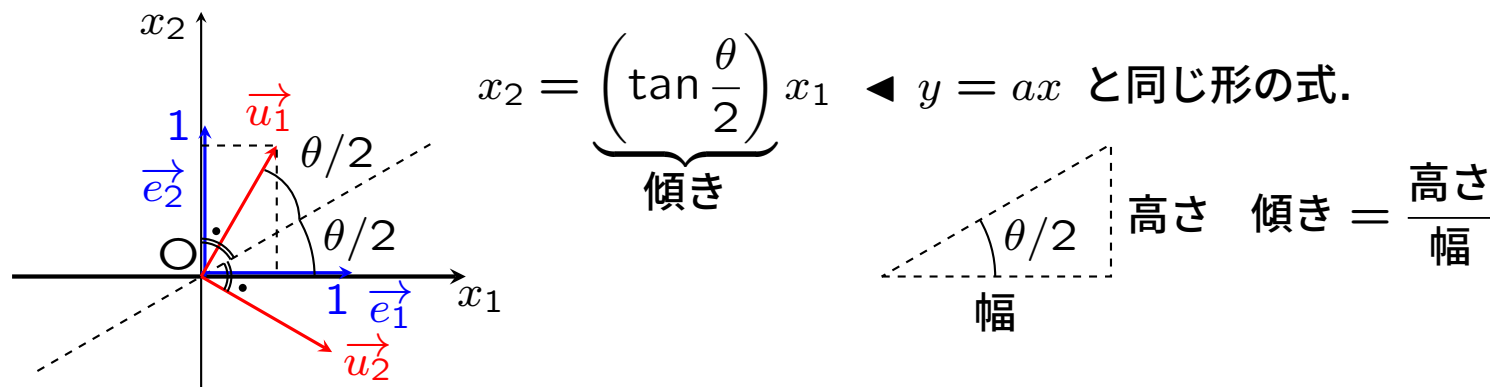
$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 0 \times 0 + 1 \times 1 & 0 \times 1 + 1 \times 0 \\ 1 \times 0 + 0 \times 1 & 1 \times 1 + 0 \times 0 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

進んだ探究 直線 $x_2 = \left(\tan \frac{\theta}{2}\right) x_1$ に関する鏡映(折り返し)の操作 ★本書 p.432

問題 15 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で表せる幾何ベクトルのうつり先を求めてください.

★ 図を描いて, うつり先を求める.

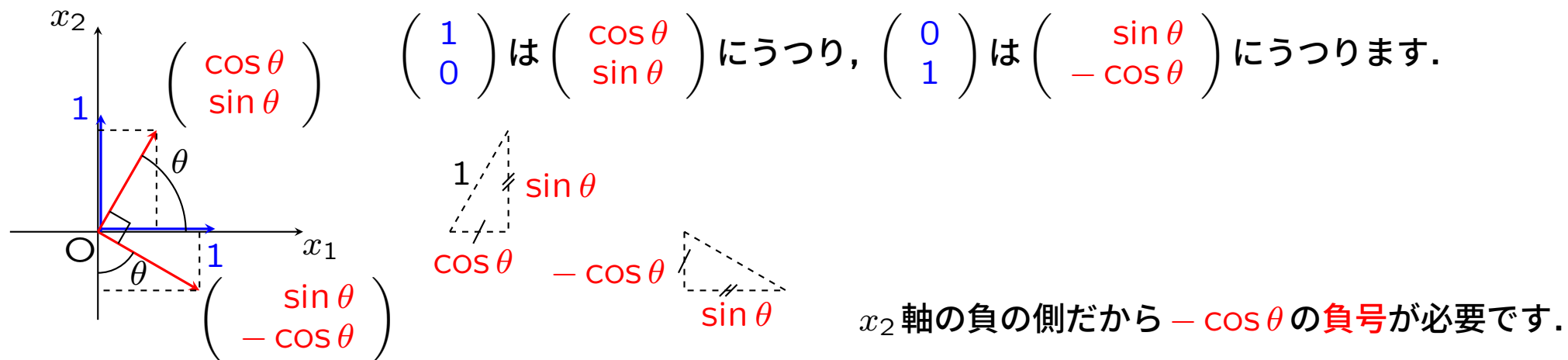
★ \vec{e}_1 が \vec{u}_1 にうつり, \vec{e}_2 が \vec{u}_2 にうつる.



解

図を描くと、基本ベクトルのうつり先がわかります。

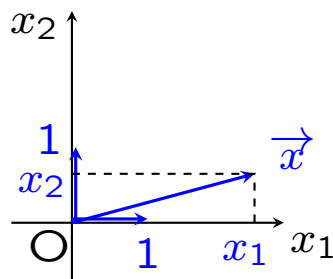
★本書 p.432



問題 16

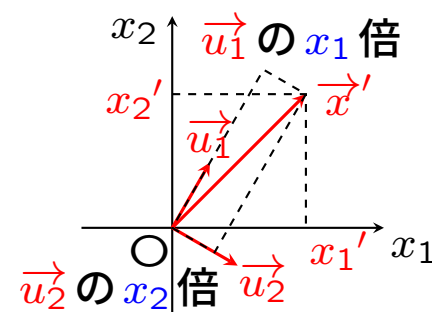
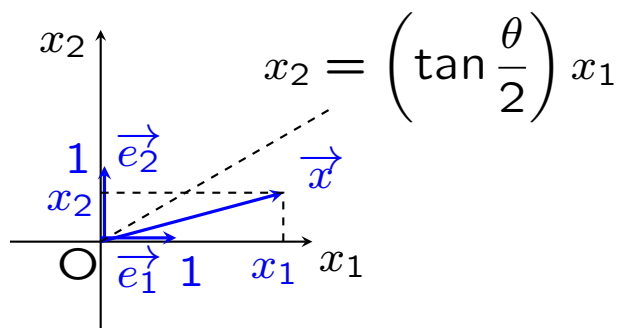
幾何ベクトル \vec{x} のうつり先を求めてください.

★ 図を描いて、基本ベクトルのうつり先も使って考える.



解

★ 本書 pp.433 – 434



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_2.$$

↓ ↓ ↓ ↓

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} x_2.$$

折り返しても倍率は変わらない。

問題 17

右辺をマトリックスと $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ との乗法で表してください。

解
$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$
 ★本書 p.434
鏡映マトリックス

問題 18 右辺のマトリックスとタテベクトルとの乗法を計算して、
問題 11 と一致することを確認してください。

★ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のうつり先が $\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のうつり先が $\begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}$
であることも確かめる。

解

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta x_1 + \sin \theta x_2 \\ \sin \theta x_1 - \cos \theta x_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta \times 1 + \sin \theta \times 0 \\ \sin \theta \times 1 - \cos \theta \times 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta \times 0 + \sin \theta \times 1 \\ \sin \theta \times 0 - \cos \theta \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

注意 $\underbrace{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}}_{\text{あとの位置}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}}_{\text{つぎの折り返し}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}}_{\text{はじめの折り返し}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\text{はじめの位置}}.$

問題 19

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}}_{\text{つぎの折り返し}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}}_{\text{はじめの折り返し}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{単位マトリックス}}$$

を確かめてください.

★ はじめに折り返してから, 再び折り返すと, もとの位置に戻るから折り返さないのと同じです.

★ $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ の逆マトリックス (自分自身が逆マトリックス) であることがわかります.

解

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \cos \theta \times \cos \theta + \sin \theta \times \sin \theta & \cos \theta \times \sin \theta + \sin \theta \times (-\cos \theta) \\ \sin \theta \times \cos \theta + (-\cos \theta) \times \sin \theta & \sin \theta \times \sin \theta + (-\cos \theta) \times (-\cos \theta) \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

自習 計算練習

本書 pp.422 – 424, pp.430 – 431, pp.437 – 442, pp.463 – 464, pp.467 – 475

次回のための予習 本書 6.2 節

固有値問題 — 線型変換で方向を変えない幾何ベクトルの見つけ方