

数学ターミナル 線型代数の発想
ダイジェスト版 10

行列式の性質

★ 本書 1.6.2 項

- 前回 の講義で定義した 2 次, 3 次の行列式に共通の特徴

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= +a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

のそれぞれの項がどちらの符号(正号, 負号)になるのでしょうか?

- n 次の行列式 ($n > 3$) を簡単に計算する方法

2次の行列式の特徴

★ 本書 pp.90 – 93

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

基本の順列 1 2

基本の順列に並べ換える互換			符号
行番号	1 2	行番号は基本の順列に固定	
列番号	1 2	0回(偶数回)	+
	2 1	1回(奇数回)	2 1 → 1 2 -

意味：2 1の特徴は「奇数回の互換で1 2になるような並び方」

3次の行列式の特徴

★ 本書 pp.90 – 93

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ = & +a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ = & +a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ & - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ & + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

問題 1

つぎの互換の回数と各項の符号とを調べてください.

基本の順列 1 2 3

			基本の順列に並べ換える互換	符号	
行番号	1	2	3	行番号は基本の順列に固定	
列番号	1	2	3	0回(偶数回)	+
	1	3	2	1回(奇数回)	1 3 2 → 1 2 3
	2	1	3		
	2	3	1		
	3	1	2		
	3	2	1		

意味 : 1 3 2 の特徴は「奇数回の互換で 1 2 3 になるような並び方」

解

基本の順列 1 2 3

基本の順列に 並べ換える互換				符号	
行番号	1	2	3	基本の順列に固定	
列番号	1	2	3	0回(偶数回)	+
	1	3	2	1回(奇数回) 1 3 2 → 1 2 3	-
	2	1	3	1回(奇数回) 2 1 3 → 1 2 3	-
	2	3	1	2回(偶数回) 2 3 1 → 3 2 1 → 1 2 3	+
	3	1	2	2回(偶数回) 3 1 2 → 3 2 1 → 1 2 3	+
	3	2	1	1回(奇数回) 3 2 1 → 1 2 3	-

意味 : 3 1 2 の特徴は「偶数回の互換で1 2 3になるような並び方」

まとめ

列番号が

奇置換のとき 負号 (-1),

偶置換のとき 正号 (+1).

符号関数 **例** $\text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -1.$ $\text{sgn} \begin{pmatrix} \text{基本の順列} \\ \text{実際の順列} \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \underbrace{\text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{+1} a_{11}a_{22} + \underbrace{\text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{-1} a_{12}a_{21}.$$

参考 この式で2次の行列式を定義する流儀もありますが, 初学者にはこのように定義する理由 (必然性) が理解しにくいかもしれません. 2元連立1次方程式の解に基づいて導入すると, この難点は回避できます (ダイジェスト版 9 p.9).

行列式を和の記号で表す方法 (その1)

★ 本書 p.92

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= \underbrace{\operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{+1} a_{11}a_{22} + \underbrace{\operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{-1} a_{12}a_{21}. \\ &= \sum_{l_1 l_2} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ l_1 & l_2 \end{pmatrix} a_{1l_1} a_{2l_2}. \end{aligned}$$

和の記号の読み方： $l_1 l_2$ のあらゆる順列についての和

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{l_1 l_2 l_3} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{pmatrix} a_{1l_1} a_{2l_2} a_{3l_3}.$$

参考

計算には帰納的定義 (ダイジェスト版 9 p.13) のほうが便利です。

「帰納」とは「2次,3次,4次,...のように定義を拡張する」という意味です。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \sum_{l_1 l_2 l_3 l_4} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \end{pmatrix} a_{1l_1} a_{2l_2} a_{3l_3} a_{4l_4}.$$

問題 2 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ と $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$ の符号を調べてください.

解

$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ の符号

列番号 4 3 1 2 \longrightarrow 1 3 4 2 \longrightarrow 1 3 2 4 \longrightarrow 1 2 3 4

互換が3回だから負号です.

$a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$ の符号

列番号 2 3 1 4 \longrightarrow 3 2 1 4 \longrightarrow 1 2 3 4

互換が2回だから正号です.

行列式とあみだくじとの関係

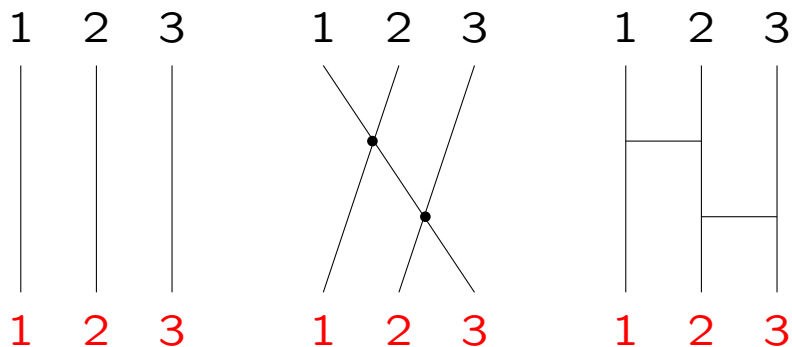
★ 本書 p.104

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$a_{13}a_{21}a_{32}$ の符号

列番号 $3 \ 1 \ 2 \rightarrow 3 \ 2 \ 1 \rightarrow 1 \ 2 \ 3 \quad \text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = +1.$

互換が2回 (偶置換) だから正号です.

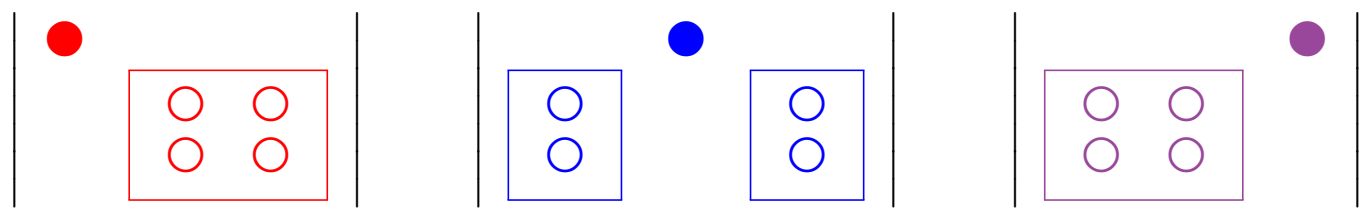


$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

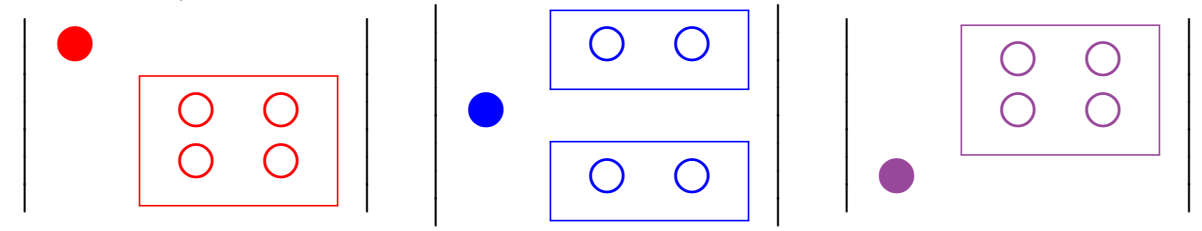
線分 1-3, 2-1, 3-2 を引き,
線分どうしの交点をよこ線に置き換えます.
よこ線は互換を表し, 偶数本だから偶置換です.

行展開と列展開

行展開 $\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{vmatrix} \stackrel{\text{定義}}{=} +\bullet \begin{vmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{vmatrix} -\bullet \begin{vmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{vmatrix} +\bullet \begin{vmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{vmatrix}$



列展開 $\begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} = +\bullet \begin{vmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{vmatrix} -\bullet \begin{vmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{vmatrix} +\bullet \begin{vmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{vmatrix}$ ★ 本書 pp.95 – 96



Q1 どんなときに行展開と列展開とのどちらを使うと便利でしょうか？

例 行展開
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 6 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

計算の手間が省ける.

例 列展開
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 0 & 11 & 9 \\ 0 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 11 & 9 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} -1 & 8 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -1 & 8 \\ 11 & 9 \end{vmatrix}$$

計算の手間が省ける.

行列式を和の記号で表す方法（その2）

★ 本書 p.96

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$a_{11} \times \left(+ \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) + a_{12} \times \left(- \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \right) + a_{13} \times \left(+ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \right)$$

を

$$a_{11} \Delta_{11} + a_{12} \Delta_{12} + a_{13} \Delta_{13}$$

と表します。

問題3 この式を和の記号で表してください。

★ 復習 $a_1 + a_2 + a_3$, スカラー積 $(a_1 \ a_2) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$ を和の記号で表せ。

解 $\sum_{k=1}^3 a_{1k} \Delta_{1k}$ 番号,回数 : i, j, k, ℓ, m, n ★ 本書 p.4

参考 余因子

$$\Delta_{11} = + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

$$\Delta_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

$$\Delta_{13} = + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} .$$

$(-1)^{\text{行番号} + \text{列番号}}$

行列式を簡単に計算する工夫

簡単のために,2次または3次の行列式で感覚をつかみます.

はじめに

Q2 103×97 を暗算してください.

★ 中学数学の知識で暗算できます.

$$\begin{aligned} & 103 \times 97 \\ = & (100 + 3)(100 - 3) \\ = & 100^2 - 3^2 \\ = & 9991. \end{aligned}$$

★ 本書 p.99

何のために中学数学で

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

を学んだのでしょうか。

行列式の性質を理解すると、行列式も簡単に計算することができます。

★ 本書 pp.100 – 101

性質 1
$$\begin{vmatrix} a+e & b+f \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Why

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a+e & b+f \\ c & d \end{vmatrix} &= (a+e)d - (b+f)c \\ &= (ad - bc) + (ed - fc) \\ &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ c & d \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

自習
$$\begin{vmatrix} a+e & b \\ c+f & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}$$
 を確かめてください.

例
$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (-1)+1 & 2 \\ (-3)+3 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

性質 2 $\begin{vmatrix} a & bs \\ c & ds \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} s \quad (s \neq 0).$

Why

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & bs \\ c & ds \end{vmatrix} &= ads - bsc \\ &= (ad - bc)s \\ &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} s. \end{aligned}$$

性質3 行または列の交換で符号が変わる.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}. \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}.$$

Why

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &= ad - bc \\ &= -(bc - ad) \\ &= - \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

例 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \\ 9 & -5 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -7 \\ 9 & -5 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{\text{行展開}}{=} - \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}.$

1 0 0 を第1行に移すと, 行展開が簡単になります.

性質 3' 同じ行または列を含む行列式の値は 0.

例

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Why

性質 3 を使うと

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

となります。右辺を移項して

$$2 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

を 2 で割ります。

性質 4

$$\begin{vmatrix} a & b + as \\ c & d + cs \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot$$

◀ ある列(または行)に他の列(または行)の s 倍を足す.

Why

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a & b + as \\ c & d + cs \end{vmatrix} \stackrel{\text{性質 1}}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & as \\ c & cs \end{vmatrix} \\ & \stackrel{\text{性質 2}}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} s \\ & \stackrel{\text{性質 3'}}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \end{aligned}$$

自習

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c + as & d + bs \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \text{ を確かめてください.}$$

次回のための予習

行列式の性質の使い方

行列式関数の線型性

本書 pp.100 – 103, pp.107 – 108