数学ターミナル　線型代数の発想

ダイジェスト版　**11**

前回まで　行列式の性質

今回

- 行列式の性質の活用例
- 行列式関数の線型性

$\boxed{\textbf{問題 1}}$ 行列式の性質を使って,

$$\begin{vmatrix} 99 & 100 & 101 \\ 100 & 99 & 100 \\ 101 & 101 & 99 \end{vmatrix}$$

の値を求めてください.

★ 本書 p.100

$\boxed{\text{解}}$ $\boxed{\text{多くの0，1をつくる}}$

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 99 & 100 & 101 \\ 100 & 99 & 100 \\ 101 & 101 & 99 \end{vmatrix}
&\overset{\substack{\text{第1行}+\text{第2行} \\ +\text{第3行}}}{=} \begin{vmatrix} 300 & 300 & 300 \\ 100 & 99 & 100 \\ 101 & 101 & 99 \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{300でくくる.}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 100 & 99 & 100 \\ 101 & 101 & 99 \end{vmatrix} \times 300 \\
&\overset{\substack{\text{第2列}-\text{第1列} \\ \text{第3列}-\text{第1列}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 100 & -1 & 0 \\ 101 & 0 & -2 \end{vmatrix} \times 300 \\
&\overset{\text{行展開}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \times 300 \\
&= 2 \times 300 \\
&= 600.
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{問題２}}$　行列式の性質を使って，

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & a+d \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix}$$

の値を求めてください．

$\boxed{解}$ $\boxed{同じ行または列をつくる}$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & a+d \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix} \overset{\substack{第4列+第2列 \\ 第4列+第3列}}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & b & a+b+c+d \\ 1 & b & c & a+b+c+d \\ 1 & c & d & a+b+c+d \\ 1 & d & a & a+b+c+d \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & b & 1 \\ 1 & b & c & 1 \\ 1 & c & d & 1 \\ 1 & d & a & 1 \end{vmatrix} (a+b+c+d)$$

$$\overset{同じ列を含む.}{=} 0.$$

注意　掃き出し法とちがって,行列式どうしを等号で結べる.

連立１次方程式の解と行列式の性質との関係

★ 本書 p.102

導入　１次方程式

$$2sx = 3 \quad (s \neq 0).$$

$$x = \frac{3}{2s}.$$

係数を s 倍すると，解は $\dfrac{1}{s}$ 倍になる．

拡張　連立１次方程式

$$\begin{cases} 2sx_1 + 3x_2 + 4x_3 = 7 \\ 3sx_1 + 6x_2 + 7x_3 = 6 \\ 7sx_1 + 8x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

問題３　(1) Cramer の方法で x_1 を求めてください．

(2) Cramer の方法で sx_1 を求めてください．

$\boxed{解}$

$\boxed{解法１}$ 未知数 x_1

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 7 \\ 5 & 8 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2s & 3 & 4 \\ 3s & 6 & 7 \\ 7s & 8 & 2 \end{vmatrix}}$$

$\boxed{解法２}$ 未知数 sx_1

$$sx_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 7 \\ 5 & 8 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 2 \end{vmatrix}}$$

$\dfrac{1}{s}$倍

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 7 \\ 5 & 8 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 2 \end{vmatrix} s}$$

両者を比べると

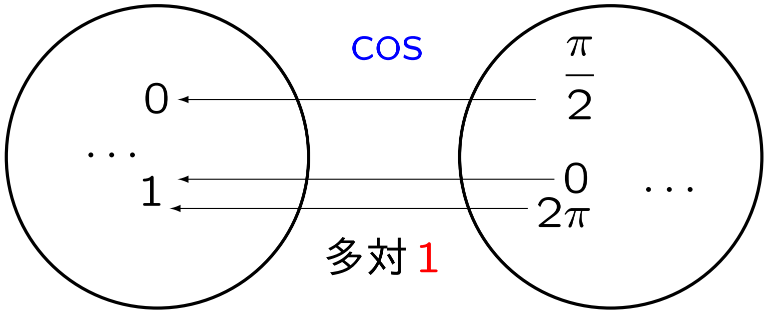
$$\begin{vmatrix} 2s & 3 & 4 \\ 3s & 6 & 7 \\ 7s & 8 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 2 \end{vmatrix} s$$

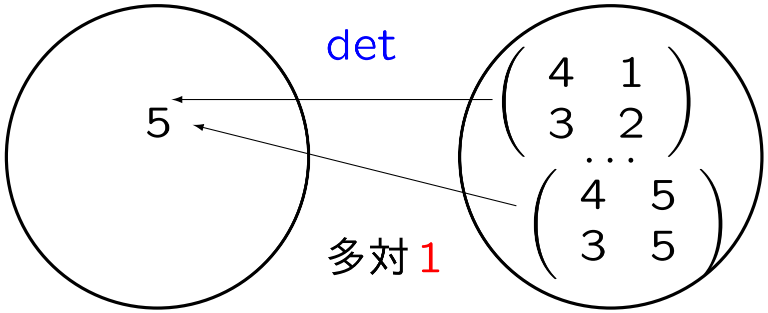
が成り立つことを確かめることができます.

$\boxed{\text{行列式関数の線型性}}$ ★ 本書 p.105　ダイジェスト版 **9** p.16(再掲)

$\boxed{\text{行列式関数}}$ ★ 本書 p.93

値域（出力の集合 Y）　定義域（入力の集合 X）　　値域（出力の集合 Y）　定義域（入力の集合 X）





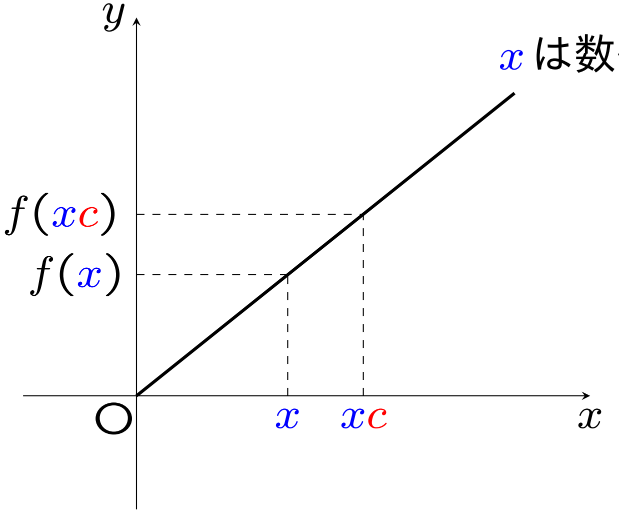
例　$\cos\frac{\pi}{2}$, $\cos\frac{3\pi}{2}, \cdots = 0$.　　例　$\det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\det\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \cdots = 5$.

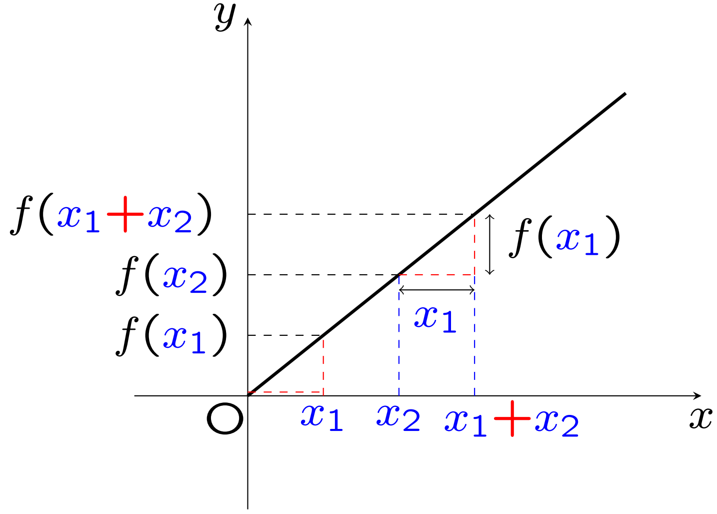
$y = f(x)$ と同じ形　$\underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}_{5} = \det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. マトリックスの関数　$f(\ \ )$ が $\det$ の場合

$\boxed{\text{線型性}}$ ★ ダイジェスト版 **3** pp.4 – 5(再掲)

x は変数名(座標軸の名称).

x は数値の代表.





x を c 倍すると,$f(x)$ も c 倍になる.

$f(xc)$ は $f(x)$ の c 倍である.

x_1 と x_2 との和を入力すると,

$f(x_1)$ と $f(x_2)$ との和を出力する.

① $f\underbrace{(x\ c)}_{\text{入力の}\,c\,\text{倍}} = \underbrace{\{f(x)\}\ c}_{\text{出力の}\,c\,\text{倍}}$.　② $f\underbrace{(x_1+x_2)}_{\text{入力の和}} = \underbrace{f(x_1)+f(x_2)}_{\text{出力の和}}$.

例

① $$\begin{vmatrix} a_{11}s & a_{12} \\ a_{21}s & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} s.$$

$$\det(\mathbb{a}_1 s \quad \mathbb{a}_2) = \det(\mathbb{a}_1 \quad \mathbb{a}_2)s.$$

$f(xs) = \{f(x)\}s$ と比べてください.

② $$\begin{vmatrix} a_{11} + a_{11}' & a_{12} \\ a_{21} + a_{21}' & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12} \\ a_{21}' & a_{22} \end{vmatrix}.$$

$$\det(\mathbb{a}_1 + \mathbb{a}_1' \quad \mathbb{a}_2) = \det(\mathbb{a}_1 \quad \mathbb{a}_2) + \det(\mathbb{a}_1' \quad \mathbb{a}_2).$$

$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ と比べてください.

注意　ここでは，タテベクトルしか考えないので，$\mathbb{a}_1'$ はヨコベクトルではなく $\mathbb{a}_1$ 以外のタテベクトルを表します.

Cramerの方法で連立1次方程式の解が求まる理由

準備　線型従属　　★ ダイジェスト版 **8** p.17(再掲)

線型独立 $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ で表せない.　線型従属 $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ で表せる.

線型独立

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}(-1) + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} 2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

線型独立　線型独立

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}(-1) + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} 2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

線型従属

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}(-1) + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} 2 + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}(-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} 0 + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

「すべての係数が0」でなくても零ベクトルがつくれる.「すべての係数が0」のとき零ベクトルになる.

線型従属　線型独立

問題 4 $\begin{pmatrix} 8 \\ 19 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} 2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} 3$ のように，$\begin{pmatrix} 8 \\ 19 \\ 24 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ で表せることに注意して，

$$\begin{vmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 19 & 2 & 5 \\ 24 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

の値を求めてください．

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} 2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} 3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 19 \\ 24 \end{pmatrix}$$

線型従属

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 19 \\ 24 \end{pmatrix} (-1) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} 2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} 3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

線型従属「すべての係数が 0」でなくても零ベクトルがつくれる．

$\boxed{解}$

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 19 & 2 & 5 \\ 24 & 3 & 6 \end{vmatrix}
&= \left| \boxed{\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}} \begin{matrix}\cdot 2 +\\ \cdot 2 +\\ \cdot 2 +\end{matrix} \boxed{\begin{matrix}2\\5\\6\end{matrix}} \begin{matrix}\cdot 3\\ \cdot 3\\ \cdot 3\end{matrix} \quad \boxed{\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix}2\\5\\6\end{matrix}} \right| \\
&= \left| \boxed{\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}} \begin{matrix}\cdot 2\\ \cdot 2\\ \cdot 2\end{matrix} \quad \boxed{\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}} \quad \begin{matrix}2\\5\\6\end{matrix} \right| + \left| \boxed{\begin{matrix}2\\5\\6\end{matrix}} \begin{matrix}\cdot 3\\ \cdot 3\\ \cdot 3\end{matrix} \quad \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} \quad \boxed{\begin{matrix}2\\5\\6\end{matrix}} \right| \\
&= \left| \boxed{\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}} \quad \begin{matrix}2\\5\\6\end{matrix} \right| 2 + \left| \boxed{\begin{matrix}2\\5\\6\end{matrix}} \quad \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} \quad \boxed{\begin{matrix}2\\5\\6\end{matrix}} \right| 3
\end{aligned}
$$

同じ列を含む.

$$
\begin{aligned}
&= 0 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

重要 $\boxed{\text{線型従属なタテベクトルを並べた行列式の値は0である.}}$

$\boxed{\textbf{問題5}}$　連立１次方程式

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 7 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 6 \\ 7x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

をタテベクトルの線型結合で表してください.

★ 本書 pp.108 – 109

解

★ ダイジェスト版 **8** p.2

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

x_1 を求めるために,つぎのように工夫します.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} x_1 + \overbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} x_3}^{\text{右辺に移項.}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\text{左辺に移項.}}.$$

$$\begin{pmatrix} 2x_1 - 7 \\ 3x_1 - 6 \\ 7x_1 - 5 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} x_2 - \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} x_3.$$

線型従属

線型従属なタテベクトルを並べた行列式の値は 0 である.

$$\boxed{\begin{vmatrix} 2x_1 - 7 & 3 & 4 \\ 3x_1 - 6 & 6 & 7 \\ 7x_1 - 5 & 8 & 2 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} 2x_1 & 3 & 4 \\ 3x_1 & 6 & 7 \\ 7x_1 & 8 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 7 \\ 5 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 2 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 7 \\ 5 & 8 & 2 \end{vmatrix}.$$

問題 6　x_1 を表す式を求めてください.

$\boxed{解}$

$$\begin{vmatrix} 2x_1 - 7 & 3 & 4 \\ 3x_1 - 6 & 6 & 7 \\ 7x_1 - 5 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

◀ 線型従属なタテベクトルを並べた行列式

だから

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 2 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 7 \\ 5 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 2 \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 7 \\ 5 & 8 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \\ 8 & 2 \end{matrix} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 2 \end{vmatrix}}.$$

分子　定数項
分母　係数

$\boxed{\text{自習}}$　x_2, x_3 も同じ方法で求めてください.

質問

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} 2 + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} (-1) = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} 2 - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

のように表せますか **?**

回答 これらの式の左辺は異なる演算を表します.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} 2 + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\text{ベクトルの加法}} \underbrace{(-1)}_{\text{ベクトルのスカラー倍}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$ ◀ ベクトルの線型結合

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} 2 - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\text{ベクトルの減法}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$
\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} 2 + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} (-1) \\
= & \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \cdot (-1) \\ 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} && \blacktriangleleft \text{ ベクトルのスカラー倍の計算結果} \\
= & \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} && \blacktriangleleft \text{ 数の乗法の計算結果} \\
= & \begin{pmatrix} 10 + (-4) \\ 4 + (-3) \end{pmatrix} && \blacktriangleleft \text{ ベクトルの加法の計算結果} \\
= & \begin{pmatrix} 10 - 4 \\ 4 - 3 \end{pmatrix} && \blacktriangleleft \text{ 代数和（減法を加法で表す）} \\
= & \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} && \blacktriangleleft \text{ ベクトルの減法} \\
= & \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} 2 - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}. && \blacktriangleleft \text{ 計算するとき，最初の式を減法と考えてよい．}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{重要}}$ ベクトルの線型結合は

ベクトルのスカラー倍の和（加法）

です.

$\boxed{\text{参考}}$ 代数和　正の数, 負の数の加法として捉える見方

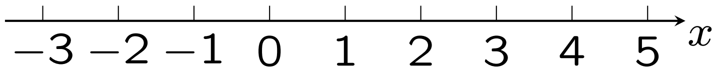
$5+2$		$(+5)+(+2)$	正の数どうしの加法
$5-2$	と書いてあっても頭の中で	$(+5)+(-2)$	正の数と負の数との加法　と読む.
$-2-3$		$(-2)+(-3)$	負の数どうしの加法

$5+2$ は加法「5 足す 2」

$5-2$ を減法と見るとき「5 引く 2」

$-2-3$ を減法と見るとき「マイナス 2 引く 3」

符号 $+,-$（数の正負）　演算記号 $+,-$（加法, 減法）

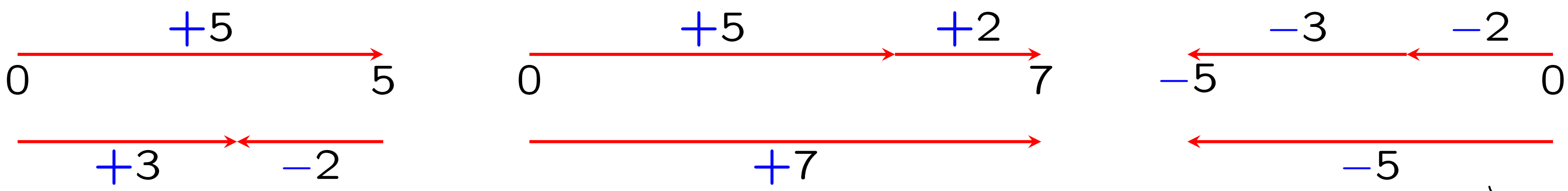


正の数を $\longrightarrow$ (正の向きの矢線)

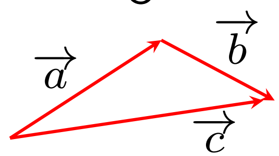
負の数を $\longleftarrow$ (負の向きの矢線)

で表します.

例 -2　長さ２で負の向きの矢線　　　符号 $+$, $-$ は向きを表します.



$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$



高校数学でベクトルの加法に発展.

● 代数和の例

算数

$$500\,\text{円} - 200\,\text{円}$$

は差(どちらがどれだけ高いか,安いか)を表すとは限らず,

$$\underbrace{(+500\,\text{円})}_{\text{収入}} + \underbrace{(-200\,\text{円})}_{\text{支出}} \qquad \blacktriangleleft\ \text{収支}$$

と読む場合もあります.

$+$ は金額が増える向き.

$-$ は金額が減る向き.

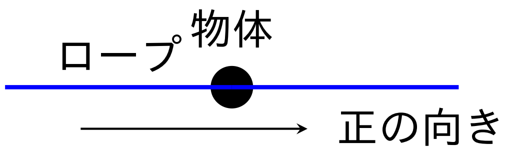
横断学習

理科　力の合計

２ N − ３ N が和を表す場合

+2 N の力

−3 N の力

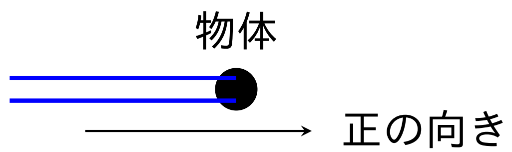


(+2 N)+(−3 N)

−2 N − ３ N が和を表す場合

−2 N の力

−3 N の力



(−2 N)+(−3 N)

運動 ★ 本書 p.12

5 m − 3 m が和を表す場合

+5 m の変位

−3 m の変位 ⟶ 正の向き

(+5 m)+(−3 m)

「東向きに5 m進んでから西向きに3 m戻る」

−3 m − 2 m が和を表す場合

−3 m の変位

−2 m の変位 ⟶ 正の向き

(−3 m)+(−2 m)

「西向きに3 m進んでから同じ向きに2 m進む」

$\boxed{\text{次回のための予習}}$

行列式の図形的意味　本書 pp.109 – 113