数学ターミナル　線型代数の発想

ダイジェスト版　**12**

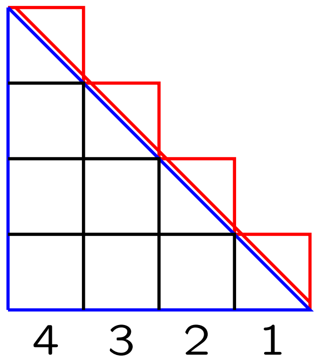
$\boxed{\text{前回まで}}$　行列式の性質

$\boxed{\text{今回}}$　行列式の図形的意味　★ 本書 pp.109 – 113

導入　数式の図形的意味とは?

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)\text{ の姿}$$

例 $n=4$



$$\frac{1}{2}\times 4\times 4+\frac{1}{2}\times 4=\frac{1}{2}\times 4\times(4+1).$$

$$\square = 1.$$

$\boxed{\text{参考}}$「数式の姿を見る」とは ?

Q1 $$\left\{x - \sin\left(\frac{k}{5}\right)\right\}^2 + \left\{y - \sin\left(\frac{k}{5}\right)\right\}^2 = \left(\frac{k}{3}\right)^2 \quad (k = 1, 2, \ldots, 30).$$

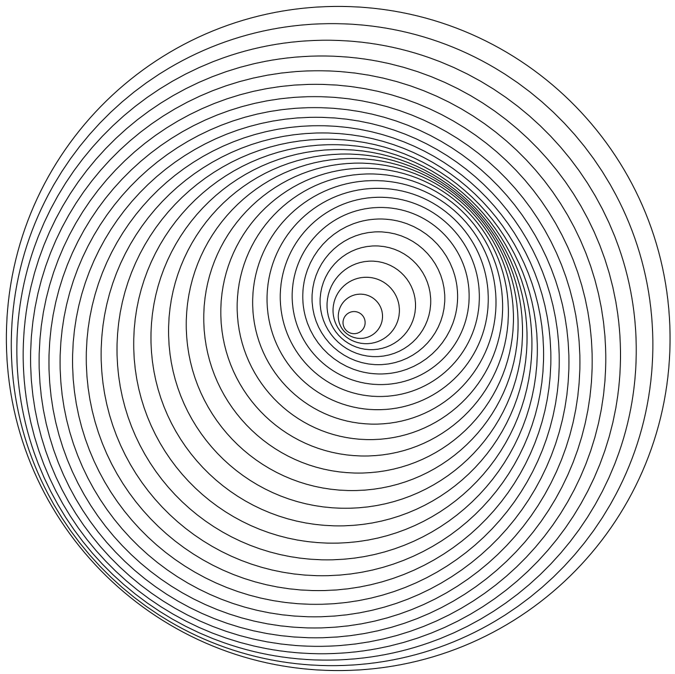
中心 $\left(\sin\frac{k}{5}, \sin\frac{k}{5}\right)$, 半径 $\frac{k}{3}$ の円の方程式のように読めますが,

どんな姿かを思い描けますか ?

```
(* Yukio Kobayashi *)

Show[
 Graphics[Evaluate[Table[Circle[{Sin[i / 5], Sin[i / 5]}, i / 3], {i, 30, 1, -1}]]],
 AspectRatio → 1]
```
グラフ… 評価 リ… 円 正弦 正弦

縦横比



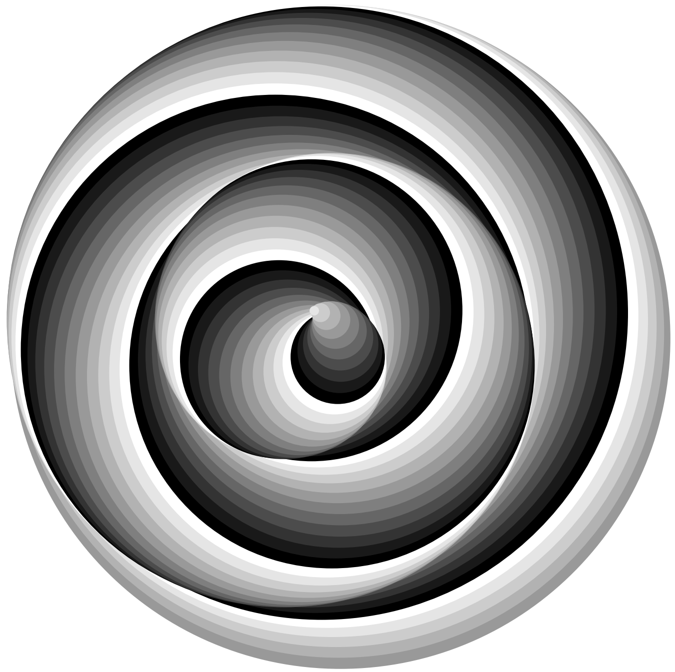
Q2 $\left\{x - \sin\left(\frac{k}{5}\right)\right\}^2 + \left\{y - \cos\left(\frac{k}{5}\right)\right\}^2 = \left(\frac{k}{7}\right)^2 \ (k = 1, 2, \ldots, 70)$.

中心 $\left(\sin\frac{k}{5}, \cos\frac{k}{5}\right)$, 半径 $\frac{k}{7}$ の円の方程式のように読めますが,

どんな姿かを思い描けますか **?**

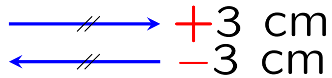
```
(* Yukio Kobayashi *)

Show[Graphics[Evaluate[Table[{GrayLevel[1 - Mod[i, 11] / 10],
      グラフ…  評価      リス…  グレーレベル    剰余
    Disk[{Sin[i / 5], Cos[i / 5]}, i / 7]}, {i, 70, 1, -1}]]]], AspectRatio → 1]
    円板   正弦        余弦                                  縦横比
```



準備　長さの正負・面積の正負　　★ 本書 pp.109 – 111

有向線分

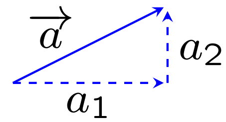


有向距離

物差(座標軸)の正の向き

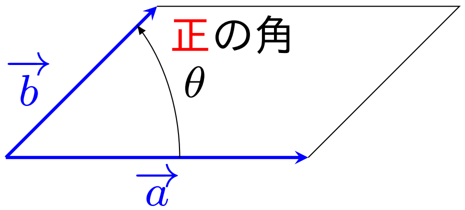
ノルム　ベクトルの大きさ　記号　$\|\vec{a}\|$　意味が異なるから

絶対値　数の大きさ　記号　$|-3| = 3.$　記号も異なる.



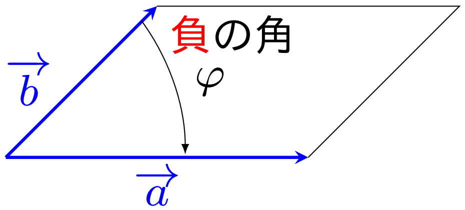
$$\|\vec{a}\| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}.$$

★ 本書 p.110 注釈欄



正の面積　$\vec{a} \wedge \vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\underbrace{\sin\theta}_{\text{正}}$　(θ は正の角)

$\vec{\bigcirc} \wedge \vec{\square}$　○から□に回る向きの角で表す.　$\boxed{\text{底辺} \times \text{高さ}}$



負の面積　$\vec{b} \wedge \vec{a} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\underbrace{\sin\varphi}_{\text{負}}$　(φ は負の角)

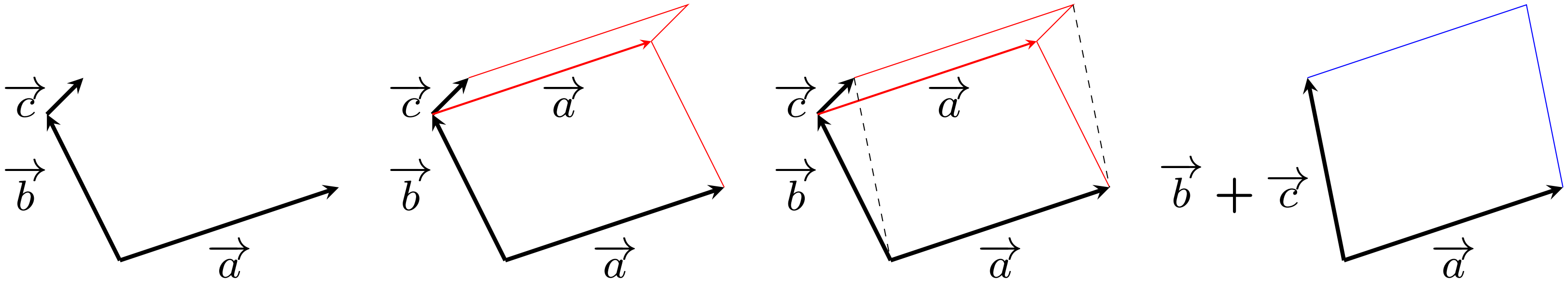
$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -(\vec{b} \wedge \vec{a}).$$

分配法則

$$\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{c}$$

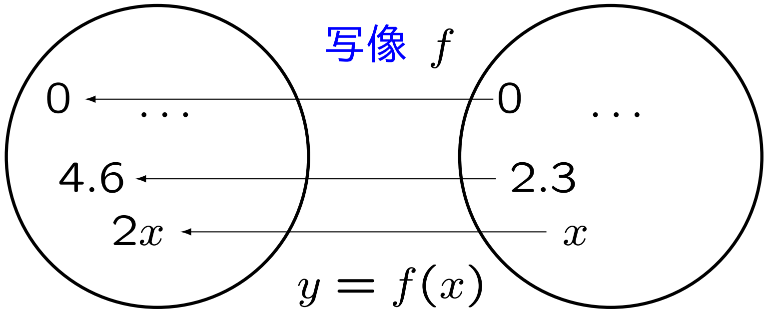
★ 本書 p.111 図1.38

例



$\boxed{\text{ねらい}}$　行列式の図形的意味 —— マトリックスと行列式とのちがい

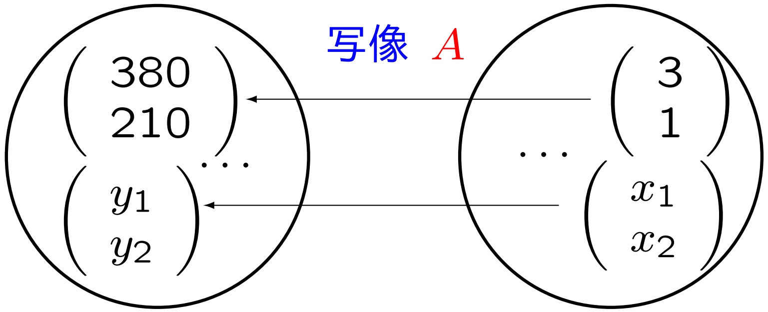
マトリックスは比例定数の拡張版であり，写像(入力と出力との対応の規則)を表します．



$y = f(x)$

出力　入力

この例では，比例 $y = 2x$.



数の組の集合に拡張

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 80 \\ 50 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

★ ダイジェスト版 **4** p.16(再掲)

比例の拡張 $\mathbb{y} = A\mathbb{x}$.

Q3　行列式も写像に関係があるのでしょうか?

$\boxed{\text{問題 1}}$　マトリックス $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ で表す写像で, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のうつり先を答えてください.

マトリックスを $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ とすると,$c_{11} = a_1$, $c_{21} = a_2$, $c_{12} = b_1$, $c_{22} = b_2$ の場合.

$\boxed{\text{解}}$ ★ 本書 p.41, ダイジェスト版 **5** pp.10 – 11

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

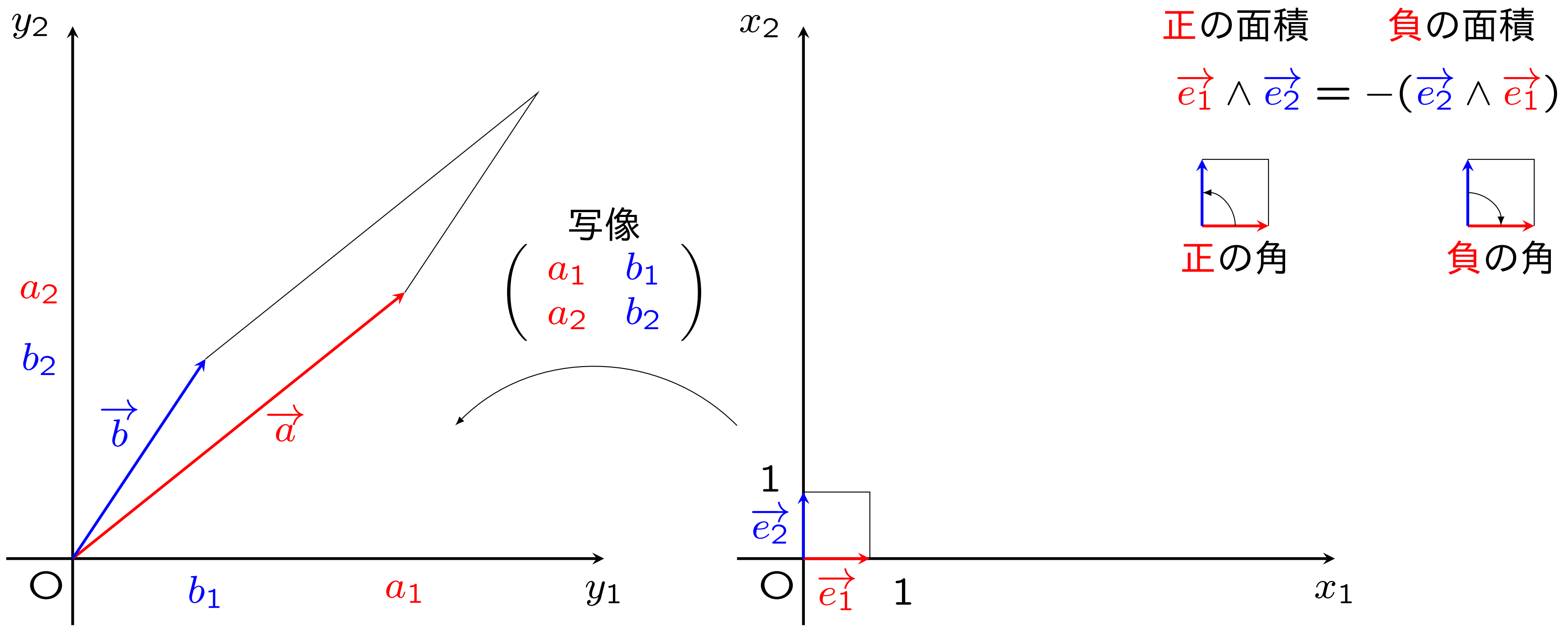
$\boxed{\text{復習}}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のうつり先はマトリックスの第１列のタテベクトル,

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のうつり先はマトリックスの第２列のタテベクトルです.

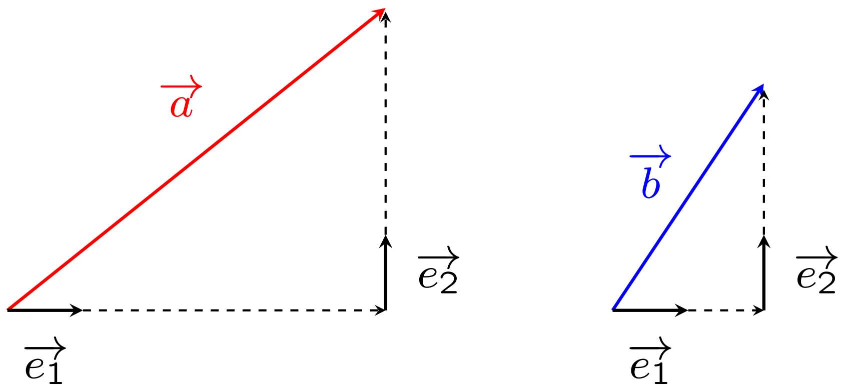
実際に $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を計算して確かめることができます.

この写像の図形的意味を調べてみます.

簡単のために，第１象限で扱います．



この写像で，正方形が平行四辺形にうつります．面積は何倍になるでしょうか?
$\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2}$ と比べるために，$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ を基本ベクトル $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$ で表し，$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$ に分配法則を使ってみます．



$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} &= (\overrightarrow{e_1} a_1 + \overrightarrow{e_2} a_2) \wedge (\overrightarrow{e_1} b_1 + \overrightarrow{e_2} b_2) \\
&\overset{\text{分配法則}}{=} \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_1} a_1 b_1 + \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2} a_1 b_2 + \overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{e_1} a_2 b_1 + \overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{e_2} a_2 b_2 \\
&= \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2} (a_1 b_2 - a_2 b_1) \\
&= \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

◀ 「$\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2}$の何倍」の形.
倍率は$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$を
並べたマトリックスの行列式.

平行四辺形の高さと底辺とを求めなくても面積が計算できることがわかります.

まとめ

★ 本書 pp.111 – 112

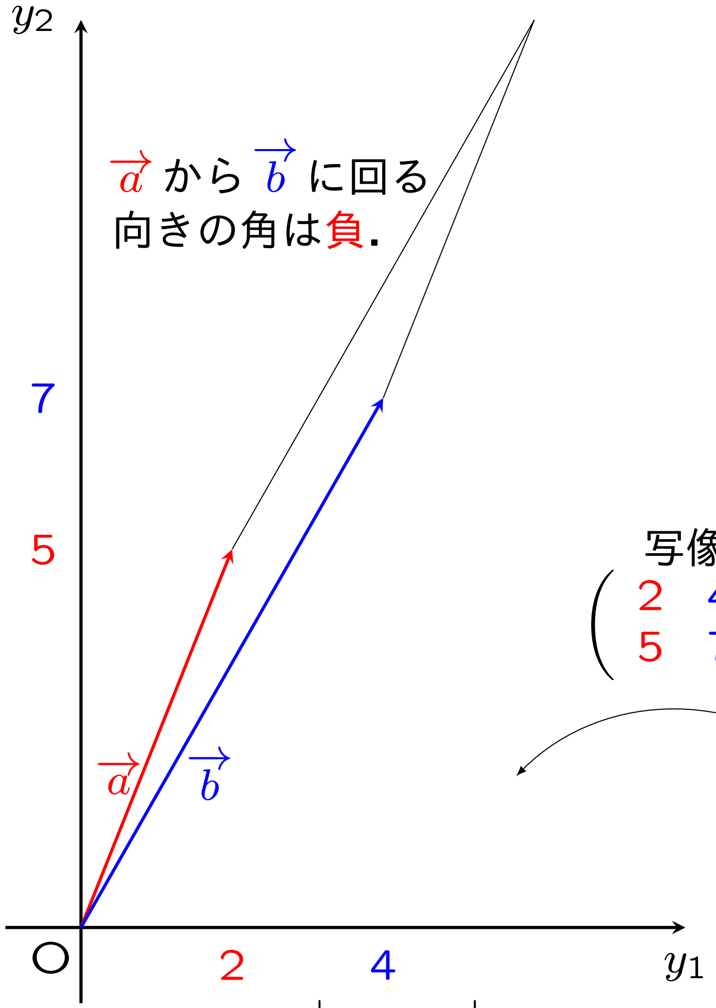
乗法の式の展開と似ているので，$\vec{a} \wedge \vec{b}$ を外積といいます．

マトリックス	$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$	写像(入力と出力との対応の規則)
行列式	$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$	面積の倍率

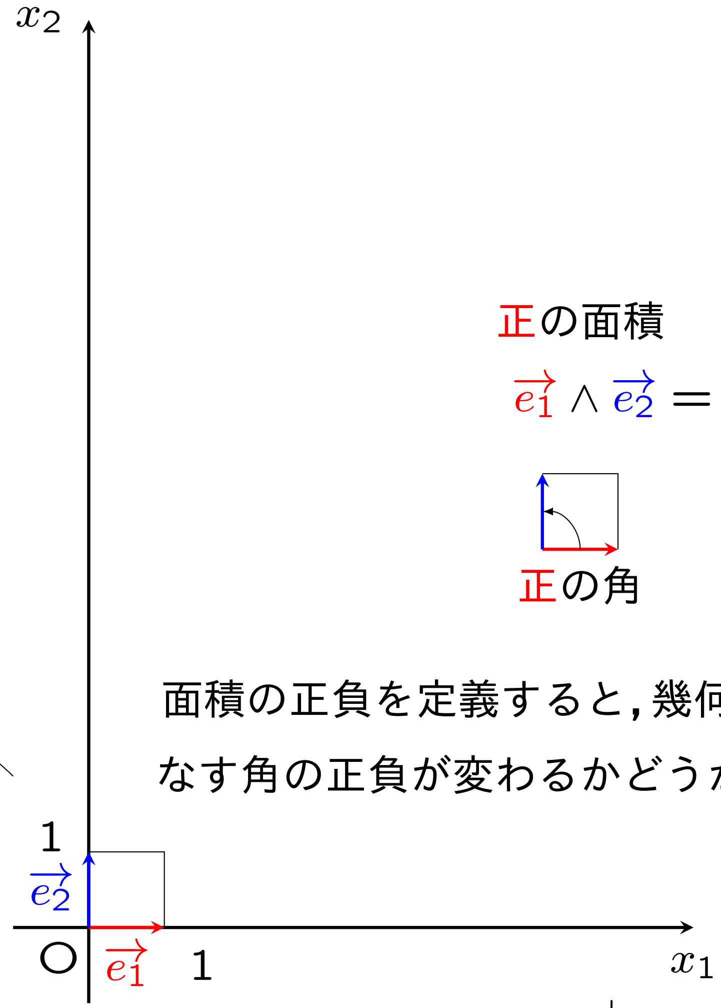
問題2　2×2マトリックスで表せる写像で基本ベクトルが $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ のようにうつります．

(1) この写像を表すマトリックスを求めてください．

(2) この写像で $\vec{e_1} \wedge \vec{e_2}$ の面積は何倍になりますか?



写像
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$



正の面積　　負の面積

$$\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2} = -(\overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{e_1})$$

正の角　　負の角

面積の正負を定義すると,幾何ベクトルどうしの
なす角の正負が変わるかどうかもわかります.

$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$ だから (-6) 倍. 本書では数値 $\times$ 単位のように $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2}$ と表した.

Cramerの方法と外積との関係

★ 本書 pp.112 – 113

例

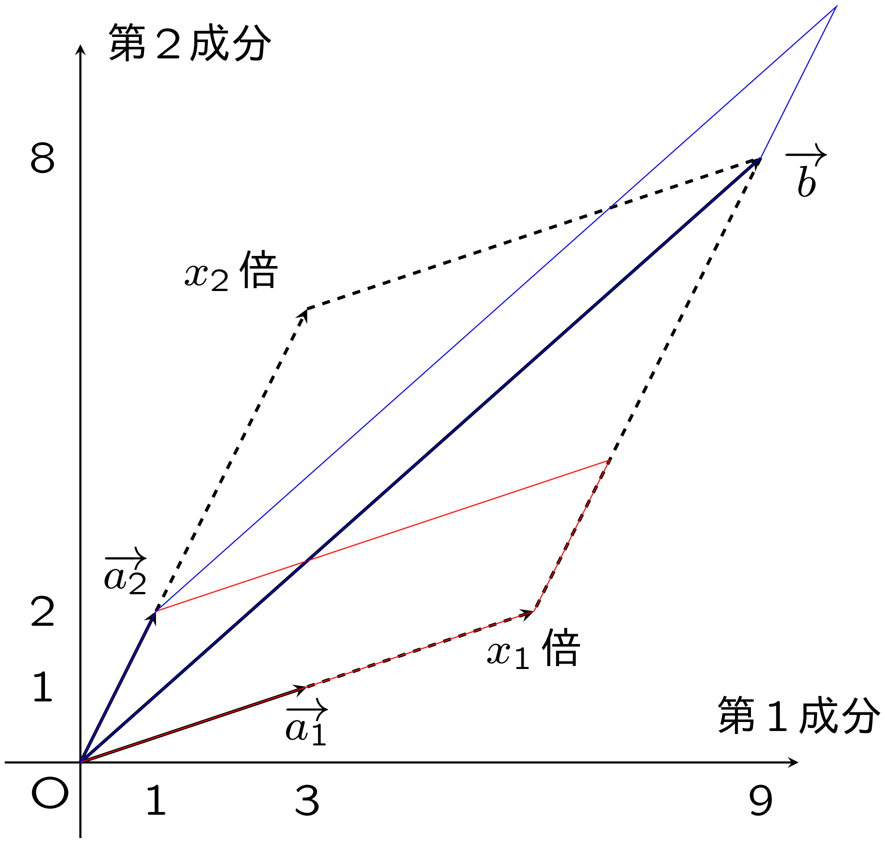
$$\begin{cases} 3x_1 + 1x_2 = 9 \\ 1x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$$

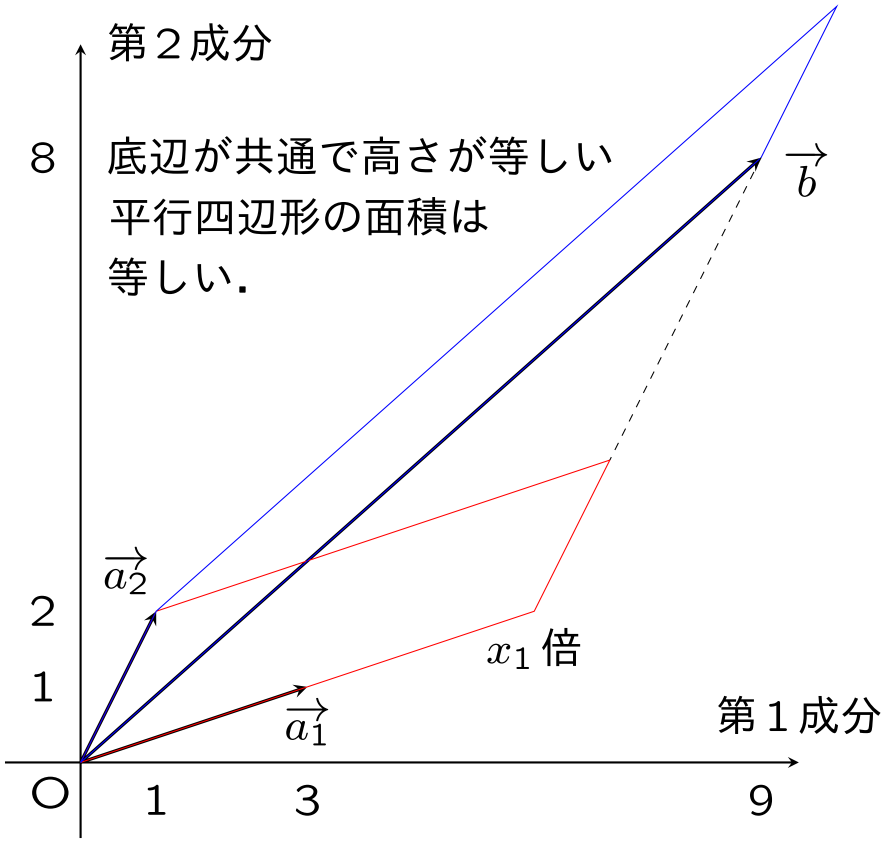
問題3 この連立1次方程式を数ベクトルの線型結合で表してから，座標平面（第1成分をよこ軸，第2成分をたて軸）に数ベクトルを幾何ベクトルで描いてください．

★ この図を使って，結合係数 x_1, x_2 を求める方法を考えます．

★ 数ベクトルについて本書 pp.62 – 64．

$\boxed{解}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}$. 記号 $\mathbb{a}_1 x_1 + \mathbb{a}_2 x_2 = \mathbb{b}$.





Q4　平行四辺形の面積に着目すると，x_1 を求めることができるのでしょうか?

$\boxed{\textbf{問題4}}$　$\overrightarrow{a_1}x_1$ と $\overrightarrow{a_2}$ を隣辺とする平行四辺形の面積，$\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{a_2}$ を隣辺とする平行四辺形の面積を外積の記号で表して x_1 を求めてください.

★ 角の正負に注意して，どちらも正の面積で表せ.

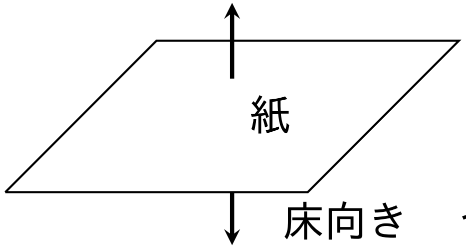
$\boxed{解}$ 等積変形 $\overrightarrow{a_1}x_1 \wedge \overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a_2}$.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a_2}}{\overrightarrow{a_1} \wedge \overrightarrow{a_2}} \\
&= \frac{\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2} \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}}{\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} \\
&= \frac{\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}.
\end{aligned}
$$

Cramerの方法で表した解と一致します.

参考　面の向き　　★ 本書 pp.121 – 122

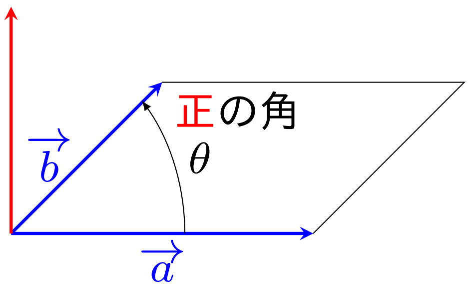
例　天井向き　おもて　　面の正の向き(正の角の向きに右ねじを回したとき,ねじの進む向き)



床向き　うら

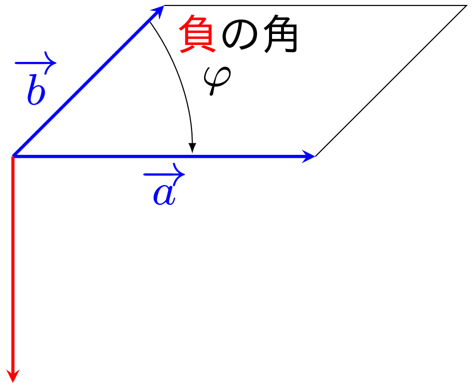
ベクトル積 (面に垂直で正の向きの有向線分)

$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$(大きさは面積と同じと決める)



外積 $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$ (正の面積)

外積 $\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}$ (負の面積)



$\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$(大きさは面積と同じと決める)

ベクトル積 (面に垂直で負の向きの有向線分)

発展　体積の正負　★ 本書 pp.114 – 118

$$\text{平行六面体の体積} = \text{何倍} \times \text{単位体積}.$$

Cramerの方法で求まる３元連立１次方程式の解の図形的意味を理解することができます．

n元連立１次方程式で$n \geqq 4$の場合は，図形で表すことはできません．

$\boxed{\text{次回のための予習}}$

平行六面体の体積と行列式との関係　本書 pp.114 – 117