

数学ターミナル 線型代数の発想
ダイジェスト版 13

前回まで 行列式の**図形的意味** — 写像で**面積**の倍率を表す.

平面図形

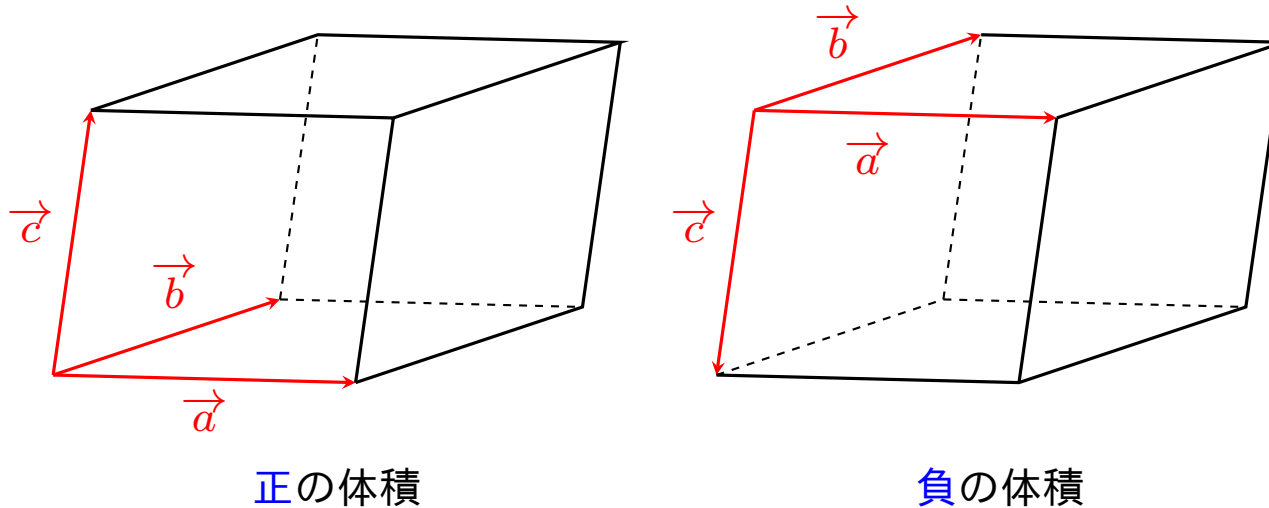
★ **ダイジェスト版 12 p.17**

今回 平行六面体の**体積**と行列式との関係

空間図形

平行六面体の体積の表し方 $\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$

★ 本書 p.114



$\vec{a} \Rightarrow \vec{b}$ に右ねじをまわしたときにねじが進む向き \vec{c} の向き

体積の正負

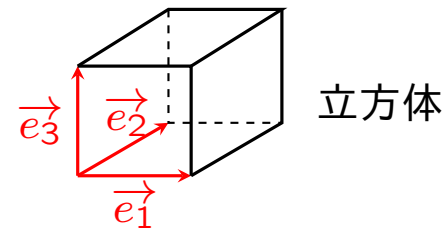
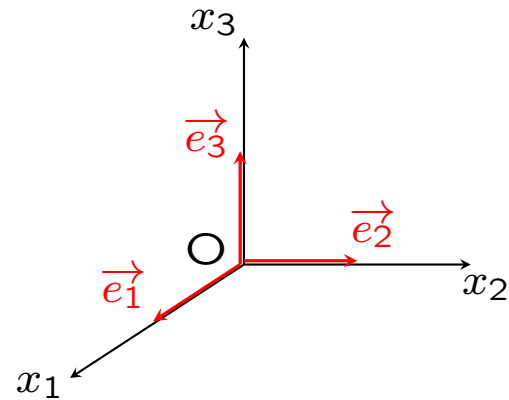


これらの向きが同じ側のとき正の体積

反対側のとき負の体積

★ 本書 p.115

基本ベクトル (ノルムは1)

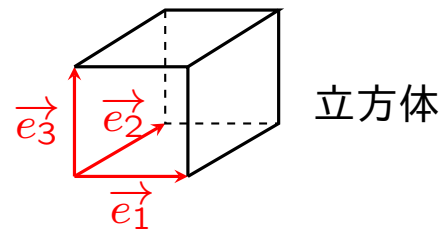


問題 1

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3, \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1, \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2, \\ \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2, \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3, \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1$$

を求めてください。

解



$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3$$

$\vec{e}_1 \Rightarrow \vec{e}_2$ に右ねじをまわしたときにねじが進む向き \vec{e}_3 の向き

体積の正負



これらの向きが同じ側だから正の体積

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = 1.$$

$$\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1$$

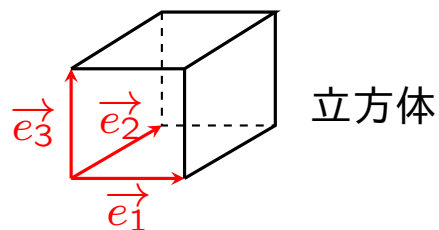
$\vec{e}_2 \Rightarrow \vec{e}_3$ に右ねじをまわしたときにねじが進む向き \vec{e}_1 の向き

体積の正負



これらの向きが同じ側だから正の体積

$$\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = 1.$$



$$\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$$

$\vec{e}_3 \Rightarrow \vec{e}_1$ に右ねじをまわしたときにねじが進む向き \vec{e}_2 の向き

体積の正負



これらの向きが同じ側だから正の体積

$$\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = 1.$$

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2$$

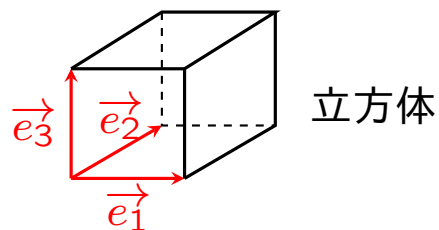
$\vec{e}_1 \Rightarrow \vec{e}_3$ に右ねじをまわしたときにねじが進む向き \vec{e}_2 の向き

体積の正負



これらの向きが反対側だから負の体積

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 = -1.$$



$$\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3$$

$\vec{e}_2 \Rightarrow \vec{e}_1$ に右ねじをまわしたときにねじが進む向き \vec{e}_3 の向き

体積の正負



これらの向きが反対側だから負の体積

$$\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 = -1.$$

$$\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1$$

$\vec{e}_3 \Rightarrow \vec{e}_2$ に右ねじをまわしたときにねじが進む向き \vec{e}_1 の向き

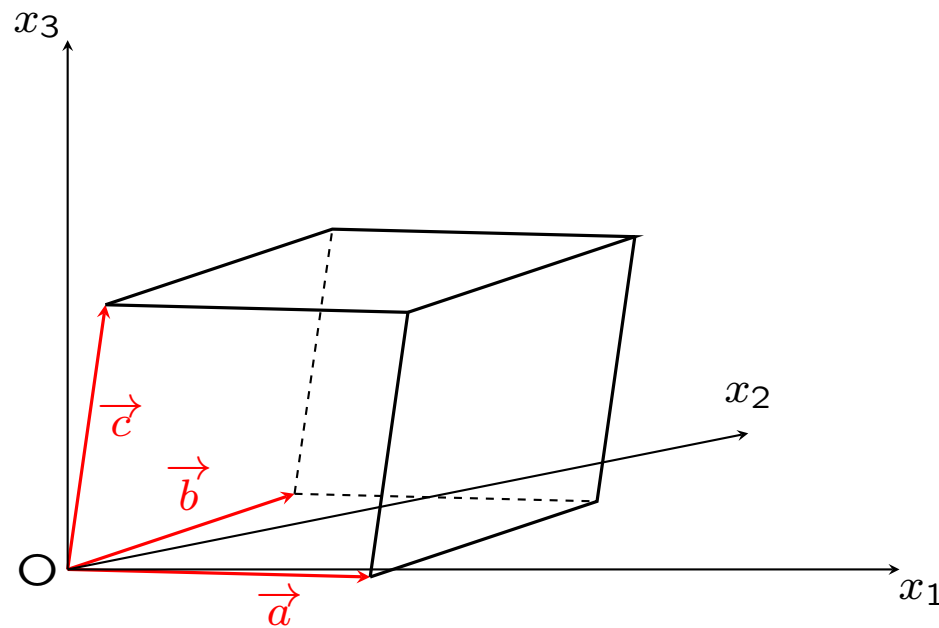
体積の正負



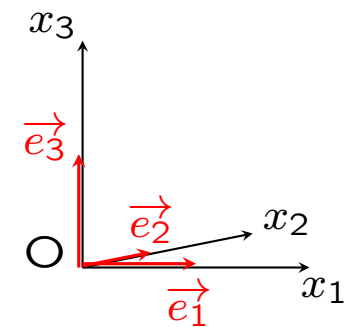
これらの向きが反対側だから負の体積

$$\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 = -1.$$

幾何ベクトル \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} は数ベクトル $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ で表せます。



基本ベクトル (ノルムは1)



問題2 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3 で表してください。

解 幾何ベクトル $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ は数ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で表せます。

\vec{a} を表す数ベクトルは

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} a_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} a_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} a_3$$

だから

$$\vec{a} = \vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2 + \vec{e}_3 a_3.$$

同様に,

$$\vec{b} = \vec{e}_1 b_1 + \vec{e}_2 b_2 + \vec{e}_3 b_3,$$

$$\vec{c} = \vec{e}_1 c_1 + \vec{e}_2 c_2 + \vec{e}_3 c_3.$$

問題3

外積の分配法則を使って、 $\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$ を計算してください.

★ \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を問題2のように \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3 で表す.

解

$$\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} = (\vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2 + \vec{e}_3 a_3) \wedge (\vec{e}_1 b_1 + \vec{e}_2 b_2 + \vec{e}_3 b_3) \wedge (\vec{e}_1 c_1 + \vec{e}_2 c_2 + \vec{e}_3 c_3)$$

見通しを立てて式を展開する.

- ▶ $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_1, \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2, \dots$ が現れることに着目して整理する.
- ▶ 添字 $1\ 1\ 1, 1\ 1\ 2, \dots$ に着目して, 何通りの外積が現れるかを考える.
- ▶ 同じ添字を含むと立方体にならないから体積は0.

添字	左側 の ()	中央 の ()	右側 の ()	体積	係数
1 1 1	\vec{e}_1	$\wedge \vec{e}_1$	$\wedge \vec{e}_1$	0	$a_1 b_1 c_1$
1 1 2	\vec{e}_1	$\wedge \vec{e}_1$	$\wedge \vec{e}_2$	0	$a_1 b_1 c_2$
1 1 3	\vec{e}_1	$\wedge \vec{e}_1$	$\wedge \vec{e}_3$	0	$a_1 b_1 c_3$
1 2 1	\vec{e}_1	$\wedge \vec{e}_2$	$\wedge \vec{e}_1$	0	$a_1 b_2 c_1$
1 2 2	\vec{e}_1	$\wedge \vec{e}_2$	$\wedge \vec{e}_2$	0	$a_1 b_2 c_2$
1 2 3	\vec{e}_1	$\wedge \vec{e}_2$	$\wedge \vec{e}_3$	1	$a_1 b_2 c_3$
1 3 1	\vec{e}_1	$\wedge \vec{e}_3$	$\wedge \vec{e}_1$	0	$a_1 b_3 c_1$
1 3 2	\vec{e}_1	$\wedge \vec{e}_3$	$\wedge \vec{e}_2$	-1	$a_1 b_3 c_2$
1 3 3	\vec{e}_1	$\wedge \vec{e}_3$	$\wedge \vec{e}_3$	0	$a_1 b_3 c_3$

添字	左側 の()	中央 の()	右側 の()	体積	係数
2 1 1	\vec{e}_2	$\wedge \vec{e}_1$	$\wedge \vec{e}_1$	0	$a_2 b_1 c_1$
2 1 2	\vec{e}_2	$\wedge \vec{e}_1$	$\wedge \vec{e}_2$	0	$a_2 b_1 c_2$
2 1 3	\vec{e}_2	$\wedge \vec{e}_1$	$\wedge \vec{e}_3$	-1	$a_2 b_1 c_3$
2 2 1	\vec{e}_2	$\wedge \vec{e}_2$	$\wedge \vec{e}_1$	0	$a_2 b_2 c_1$
2 2 2	\vec{e}_2	$\wedge \vec{e}_2$	$\wedge \vec{e}_2$	0	$a_2 b_2 c_2$
2 2 3	\vec{e}_2	$\wedge \vec{e}_2$	$\wedge \vec{e}_3$	0	$a_2 b_2 c_3$
2 3 1	\vec{e}_2	$\wedge \vec{e}_3$	$\wedge \vec{e}_1$	1	$a_2 b_3 c_1$
2 3 2	\vec{e}_2	$\wedge \vec{e}_3$	$\wedge \vec{e}_2$	0	$a_2 b_3 c_2$
2 3 3	\vec{e}_2	$\wedge \vec{e}_3$	$\wedge \vec{e}_3$	0	$a_2 b_3 c_3$
3 1 1	\vec{e}_3	$\wedge \vec{e}_1$	$\wedge \vec{e}_1$	0	$a_3 b_1 c_1$
3 1 2	\vec{e}_3	$\wedge \vec{e}_1$	$\wedge \vec{e}_2$	1	$a_3 b_1 c_2$
3 1 3	\vec{e}_3	$\wedge \vec{e}_1$	$\wedge \vec{e}_3$	0	$a_3 b_1 c_3$
3 2 1	\vec{e}_3	$\wedge \vec{e}_2$	$\wedge \vec{e}_1$	-1	$a_3 b_2 c_1$
3 2 2	\vec{e}_3	$\wedge \vec{e}_2$	$\wedge \vec{e}_2$	0	$a_3 b_2 c_2$
3 2 3	\vec{e}_3	$\wedge \vec{e}_2$	$\wedge \vec{e}_3$	0	$a_3 b_2 c_3$
3 3 1	\vec{e}_3	$\wedge \vec{e}_3$	$\wedge \vec{e}_1$	0	$a_3 b_3 c_1$
3 3 2	\vec{e}_3	$\wedge \vec{e}_3$	$\wedge \vec{e}_2$	0	$a_3 b_3 c_2$
3 3 3	\vec{e}_3	$\wedge \vec{e}_3$	$\wedge \vec{e}_3$	0	$a_3 b_3 c_3$

$$\begin{aligned}
& \vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} \\
= & \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 a_1 b_2 c_3 + \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 a_1 b_3 c_2 \\
& + \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 a_2 b_1 c_3 + \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 a_2 b_3 c_1 \\
& + \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 a_3 b_1 c_2 + \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 a_3 b_2 c_1 \\
= & \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 (a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1).
\end{aligned}$$

例 $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 = -1,$
 $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = 1$

だから

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 = -\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3.$$

$$\begin{aligned}
& a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 &< \text{右辺の () の式} \\
= & a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - b_1 (a_2 c_3 - a_3 c_2) + c_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2). &< a_1, b_1, c_1 \text{ でくくる.}
\end{aligned}$$

Q1 この式を行列式で表せないでしょうか？

$$\begin{aligned}
& a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) \\
= & a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

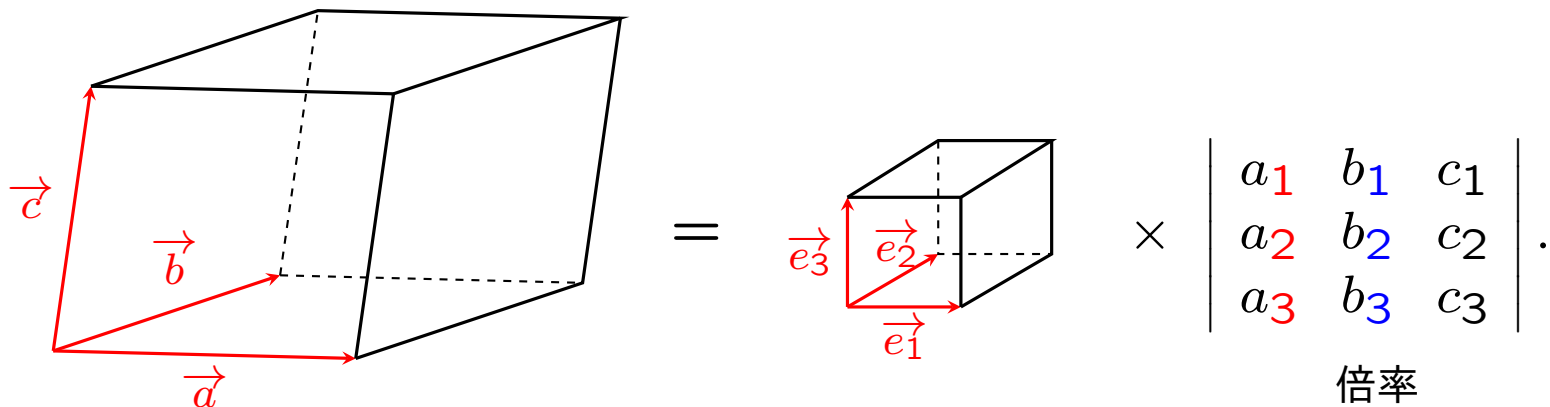
この式は3次の行列式の定義

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

と同じであることに気づきます。

Q2 何がわかったことになるのでしょうか？

まとめ $\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$. ★ 本書 p.116



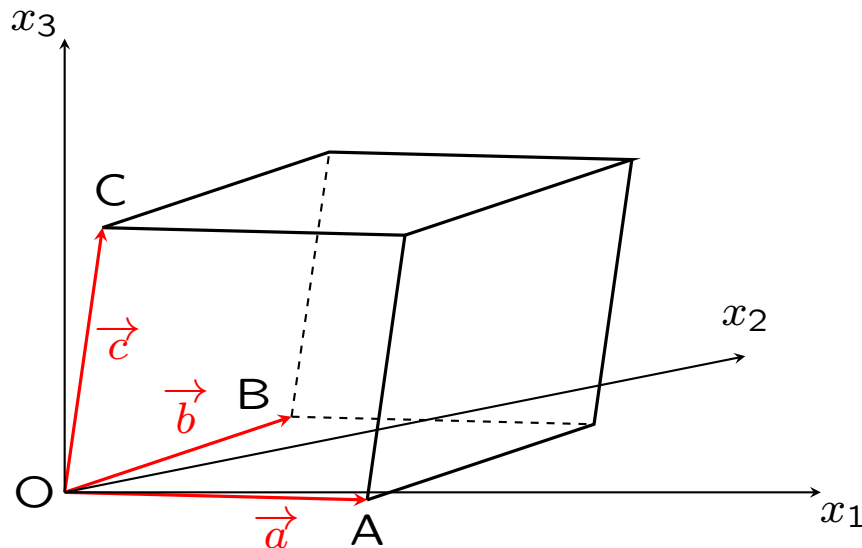
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を表す数ベクトル $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ を並べたマトリックスの行列式

重要 平行六面体の体積は，底面積と高さとを求めなくても計算できることがわかります。

問題4

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ で表せるとき、
平行六面体の体積を求めてください。

★ (i) 行列式の定義どおりの計算, (ii) 行列式の性質を活用する計算
の2通りで求めて一致することを確認する。



解 $\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 \begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$

(i) 行列式の定義どおりの計算

$$\begin{aligned} \text{行展開} \quad & 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2(3 \times 5 - 2 \times 2) + 2\{(-1) \times 5 - 2 \times (-1)\} - 2\{(-1) \times 2 - 3 \times (-1)\} \\ &= 14. \end{aligned}$$

(ii) 行列式の性質を活用した計算

多くの0, 1をつくる

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{第2列} + \text{第1列} \\ \text{第3列} + \text{第1列} \\ \hline \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \\ & \begin{array}{l} \text{行展開} \\ \hline \\ \hline \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ & = 14. \end{aligned}$$

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = 1$$

だから

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} &= \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 \begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 14. \end{aligned}$$

Cramerの方法と外積との関係

★ 本書 p.117

3元連立1次方程式

例

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 7 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 6 \\ 7x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

問題5

この連立方程式を数ベクトルの線型結合で表してください。

解
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

記号 $ax_1 + bx_2 + cx_3 = p.$

幾何ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{p}$ を表す数ベクトルが $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$
であると考えると,

$$\vec{a}x_1 + \vec{b}x_2 + \vec{c}x_3 = \vec{p}$$

のように表せます.

問題3で確かめたように、 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} の中に同じ幾何ベクトルがあると、これらを3隣辺とする平行六面体がつくれないから、 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} の外積は

$$\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} = 0 \quad \leftarrow \text{平行六面体の体積}$$

です。



問題6

$$\vec{a}x_1 + \vec{b}x_2 + \vec{c}x_3 = \vec{p}$$

に \vec{b} , \vec{c} の順に外積すると

$$(\vec{a}x_1 + \vec{b}x_2 + \vec{c}x_3) \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} = \vec{p} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$$

になります。この式から x_1 を求めてください。

解 左辺に外積の分配法則を使うと

★ 本書 p.117

$$\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} x_1 + \vec{b} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} x_2 + \vec{c} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} x_3 = \vec{p} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$$

になります。

$$\vec{b} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} = 0,$$

$$\vec{c} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} = 0$$

だから

$$x_1 = \frac{\vec{p} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}}{\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}}$$

です。

問題 7 分子・分母を行列式で表してください。

解

分子： $\vec{p}, \vec{b}, \vec{c}$ を表す数ベクトル $\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ を並べたマトリックスの行列式

分母： $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を表す数ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ を並べたマトリックスの行列式

$$x_1 = \frac{\begin{array}{c|ccc} \cancel{\vec{e}_1} \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 & 7 & 3 & 4 \\ \hline & 6 & 6 & 7 \\ & 5 & 8 & 2 \end{array}}{\begin{array}{c|ccc} \cancel{\vec{e}_1} \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 & 2 & 3 & 4 \\ \hline & 3 & 6 & 7 \\ & 7 & 8 & 2 \end{array}}. \quad \leftarrow \text{Cramer の方法で得る解と一致.}$$

Q3 分子, 分母, x_1 は何を表しているのでしょうか？

★ 本書 p.117

分子： $\vec{p}, \vec{b}, \vec{c}$ を3隣辺とする平行六面体の体積 V_1

分母： $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を3隣辺とする平行六面体の体積 V

x_1 ：体積 V_1 は体積 V の何倍かを表す。

自習 x_2, x_3 も求めてください。

次回のための予習

ベクトル積 本書 pp.118 – 122