数学ターミナル　線型代数の発想

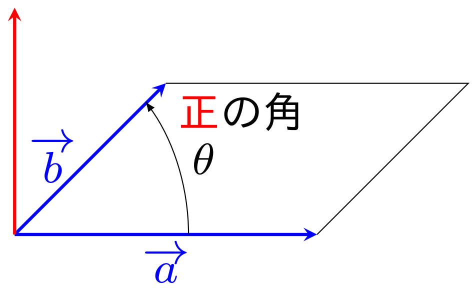
ダイジェスト版　**14**

前回まで　外積の演算規則と行列式との関係

今回　ベクトル積　★ ダイジェスト版 **12** p.16（再掲）

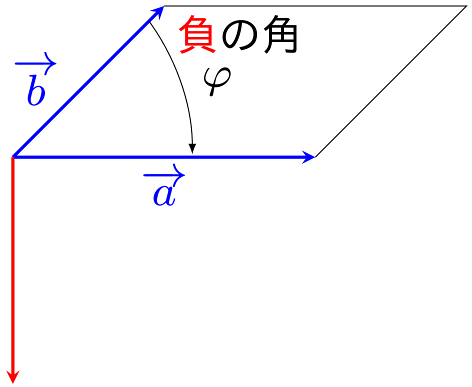
ベクトル積（面に垂直で正の向きの有向線分）

$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$(大きさは面積と同じと決める)



外積 $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$（正の面積）

外積 $\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}$（負の面積）



$\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$(大きさは面積と同じと決める)

ベクトル積（面に垂直で負の向きの有向線分）

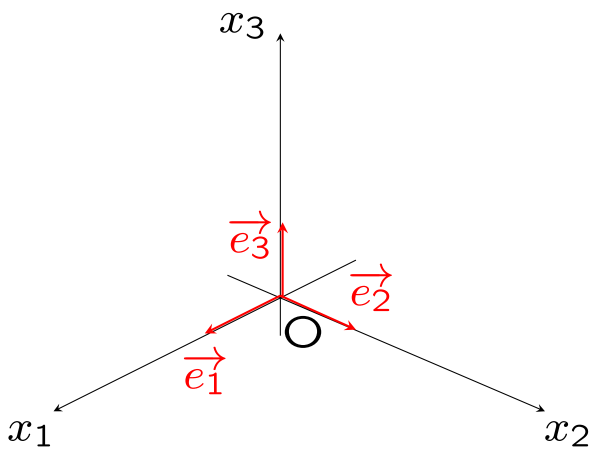
記号の見方　★ 本書 p.121

♣×♠　♣から♠に向かって右ねじを回したとき，ねじの進む向きの幾何ベクトル．

問題 1　各座標軸の方向の基本ベクトルどうしのベクトル積

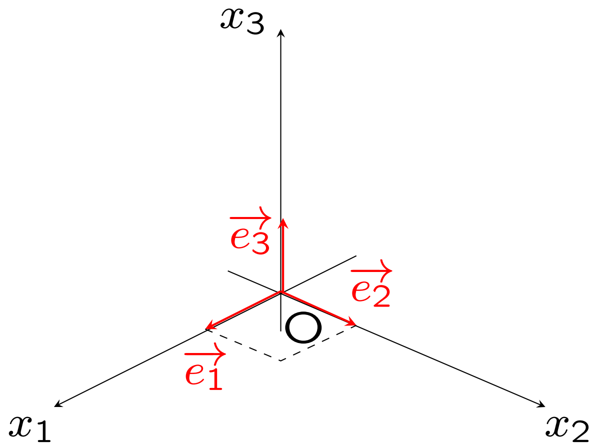
$$\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2},$$
$$\overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_3},$$
$$\overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_1}$$

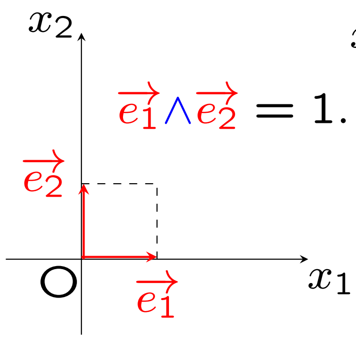
を求めてください．



★ 1分間 考えてわからなかったら，本書 p.121 を見よ．

解

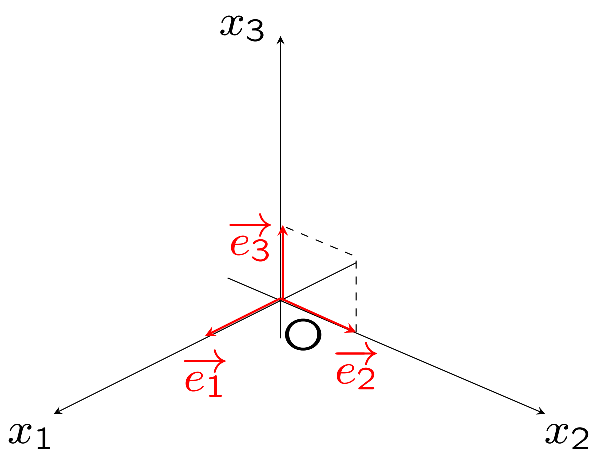


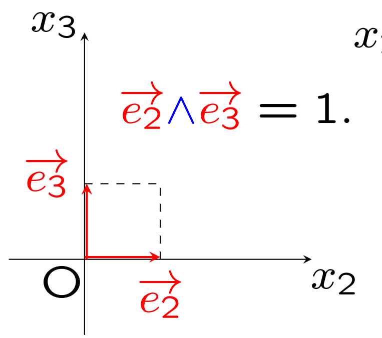


$\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2} = 1.$

x_1x_2 平面に垂直で大きさが 1 の幾何ベクトルは $\overrightarrow{e_3}$.

$\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3}.$

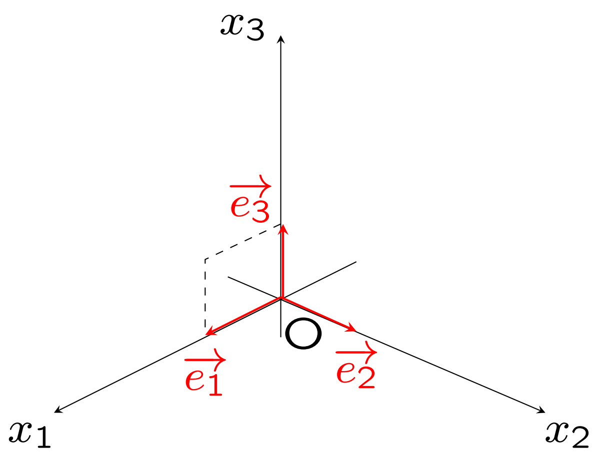


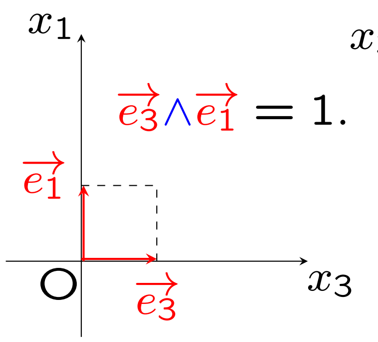


$\overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{e_3} = 1.$

x_2x_3 平面に垂直で大きさが 1 の幾何ベクトルは $\overrightarrow{e_1}$.

$\overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_1}.$



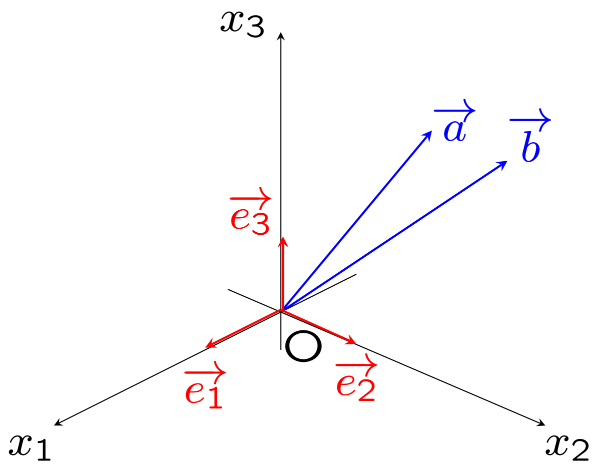


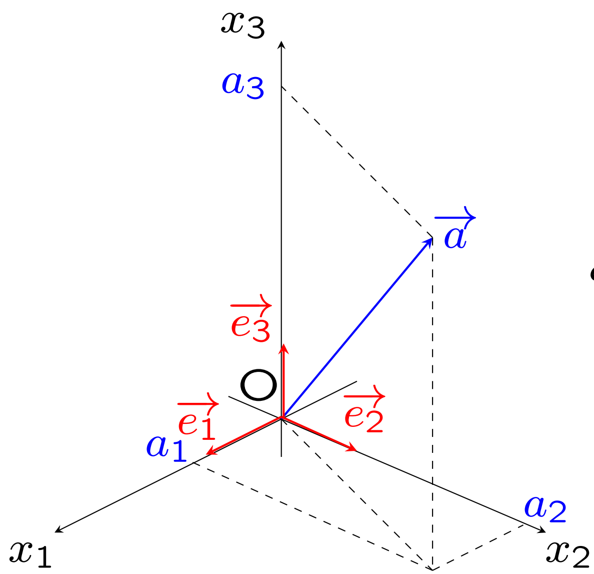
$\overrightarrow{e_3}\wedge\overrightarrow{e_1} = 1.$

首を傾けて図を見ます.

x_3x_1 平面に垂直で大きさが 1 の幾何ベクトルは $\overrightarrow{e_2}$.

$$\overrightarrow{e_3}\times\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2}.$$





図を見ながら

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{e_1}a_1 + \overrightarrow{e_2}a_2 + \overrightarrow{e_3}a_3$$

と書きます.

同様に,

$$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{e_1}b_1 + \overrightarrow{e_2}b_2 + \overrightarrow{e_3}b_3.$$

問題２

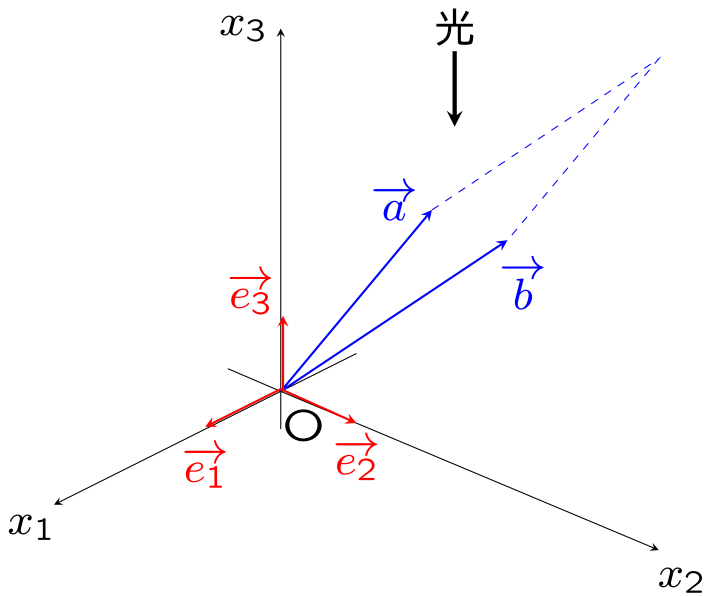
$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (\overrightarrow{e_1}a_1 + \overrightarrow{e_2}a_2 + \overrightarrow{e_3}a_3) \times (\overrightarrow{e_1}b_1 + \overrightarrow{e_2}b_2 + \overrightarrow{e_3}b_3)$$

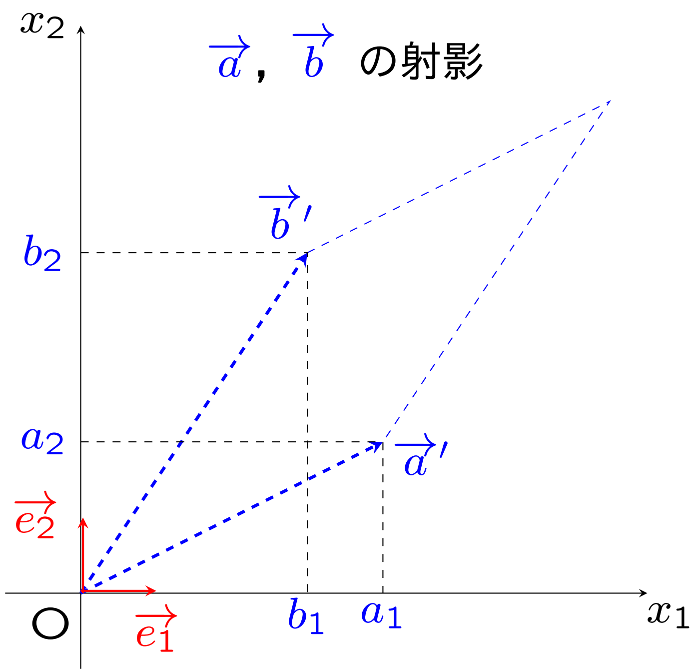
の右辺を計算してください.

$\boxed{\text{解}}$ 分配法則を使って展開します.

$$
\begin{aligned}
& (\overrightarrow{e_1}a_1 + \overrightarrow{e_2}a_2 + \overrightarrow{e_3}a_3) \times (\overrightarrow{e_1}b_1 + \overrightarrow{e_2}b_2 + \overrightarrow{e_3}b_3) \\
= \ & \overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_1}a_1b_1 + \overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2}a_1b_2 + \overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_3}a_1b_3 \\
& + \overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_1}a_2b_1 + \overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_2}a_2b_2 + \overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_3}a_2b_3 \\
& + \overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_1}a_3b_1 + \overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_2}a_3b_2 + \overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_3}a_3b_3 \\
= \ & \overrightarrow{e_3}a_1b_2 - \overrightarrow{e_2}a_1b_3 - \overrightarrow{e_3}a_2b_1 + \overrightarrow{e_1}a_2b_3 + \overrightarrow{e_2}a_3b_1 - \overrightarrow{e_1}a_3b_2 \\
= \ & \overrightarrow{e_1}(a_2b_3 - a_3b_2) + \overrightarrow{e_2}(a_3b_1 - a_1b_3) + \overrightarrow{e_3}(a_1b_2 - a_2b_1).
\end{aligned}
$$

Q1 $\overrightarrow{e_1}(a_2b_3 - a_3b_2)$, $\overrightarrow{e_2}(a_3b_1 - a_1b_3)$, $\overrightarrow{e_3}(a_1b_2 - a_2b_1)$ の表す意味をいえるでしょうか ?





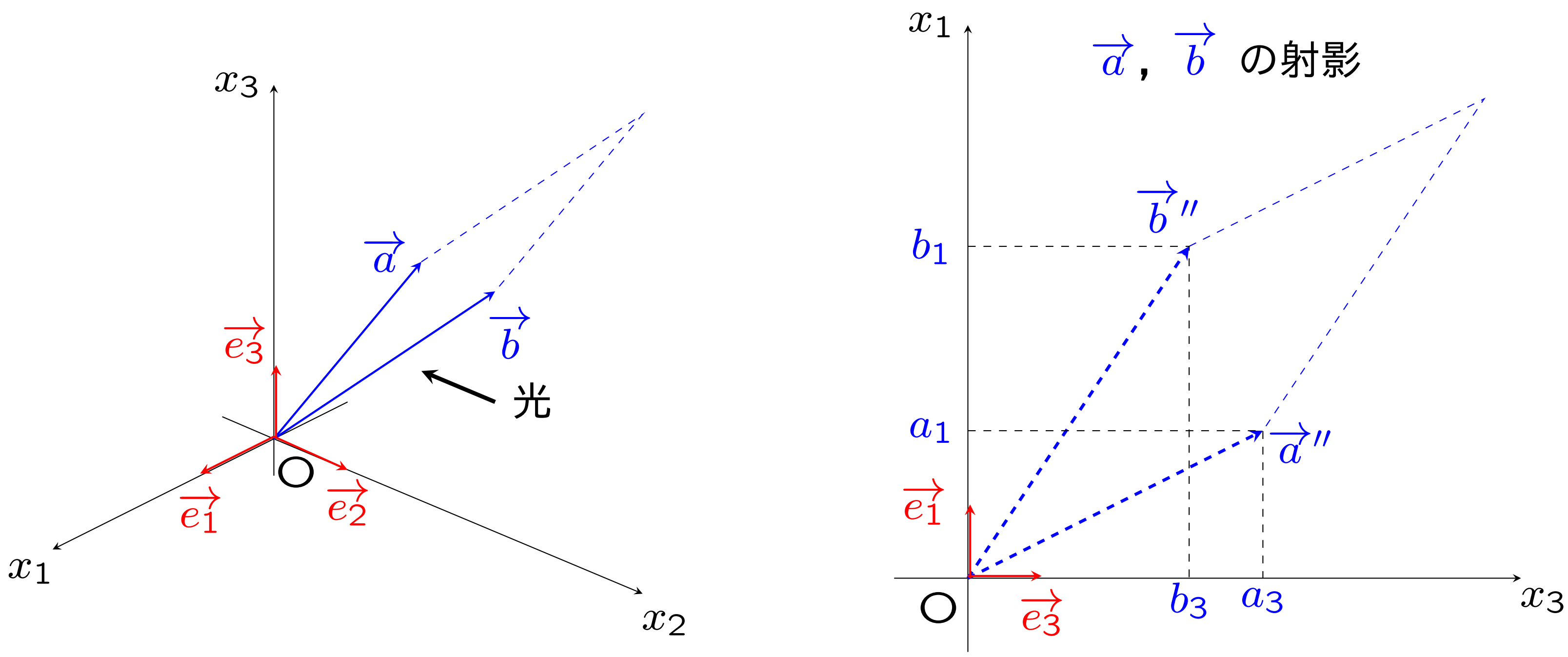
$\boxed{\textbf{問題3}}$ 平行四辺形の面積 $\overrightarrow{a}' \wedge \overrightarrow{b}'$ を行列式で表してください．

$\boxed{解}$ $\quad \overrightarrow{a}' \wedge \overrightarrow{b}' = \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$

x_1x_2平面内の平行四辺形に垂直で
大きさが平行四辺形の面積
である幾何ベクトルは

$$\overrightarrow{a}' \times \overrightarrow{b}' = \overrightarrow{e_3} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

注意　$\overrightarrow{a}'$ から $\overrightarrow{b}'$ に向かう角の正負は，成分の数値で決まります．



$\boxed{\text{問題4}}$ 平行四辺形の面積 $\overrightarrow{a}'' \wedge \overrightarrow{b}''$ を行列式で表してください.

$\boxed{解}$ $\overrightarrow{a}'' \wedge \overrightarrow{b}'' = \overrightarrow{e_3} \wedge \overrightarrow{e_1} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}.$

x_3x_1 平面内の平行四辺形に垂直で
大きさが平行四辺形の面積
である幾何ベクトルは

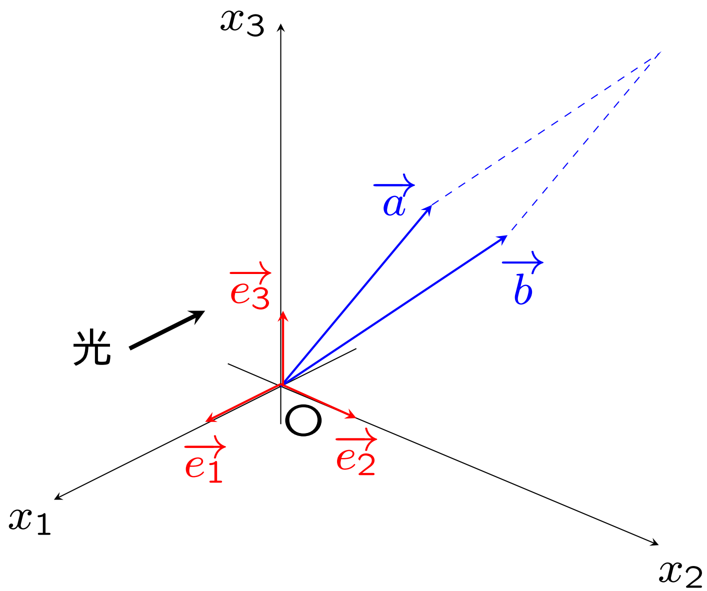
$$\overrightarrow{a}'' \times \overrightarrow{b}'' = \overrightarrow{e_2} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}.$$

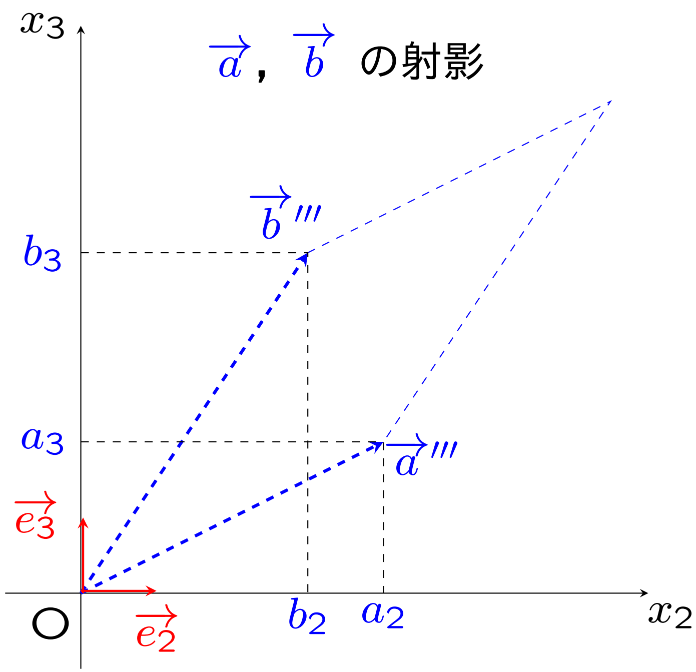
注意 1 $\overrightarrow{a}''$ から $\overrightarrow{b}''$ に向かう角の正負は,成分の数値で決まります.

注意 2 $\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_3}$ でも表せます.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{e_3} \wedge \overrightarrow{e_1} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} &= -\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_3} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ &= \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_3} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

◀ 行列式の行を交換すると
符号が変わる.
$\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_3} = -\overrightarrow{e_2}.$





問題 5 平行四辺形の面積 $\overrightarrow{a}''' \wedge \overrightarrow{b}'''$ を行列式で表してください.

$\boxed{解}$ $\quad \vec{a}''' \wedge \vec{b}''' = \vec{e_2} \wedge \vec{e_3} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$

x_1x_2平面内の平行四辺形に垂直で

大きさが平行四辺形の面積

である幾何ベクトルは

$$\vec{a}''' \times \vec{b}''' = \vec{e_1} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

注意 $\vec{a}'''$ から $\vec{b}'''$ に向かう角の正負は,成分の数値で決まります.

$\boxed{\text{まとめ}}$

★ 本書 p.121

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} &= \overrightarrow{e_1}(a_2b_3 - a_3b_2) + \overrightarrow{e_2}(a_3b_1 - a_1b_3) + \overrightarrow{e_3}(a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= \overrightarrow{e_1}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \overrightarrow{e_2}\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + \overrightarrow{e_3}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

x_2x_3 平面上の射影の面積　x_3x_1 平面上の射影の面積　x_1x_2 平面上の射影の面積

$\boxed{\text{問題 5}}$　$\boxed{\text{問題 4}}$　$\boxed{\text{問題 3}}$

Q2　この式はどのように使うのでしょうか ?

$\boxed{\textbf{問題 6}}$ $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ は $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ とのどちらにも垂直であることを示してください．

★ $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{a}$ との内積，$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{b}$ との内積を求める．

$\boxed{解}$　基本ベクトルの内積

$$\overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_j} = \begin{cases} 1 & (i = j). \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{a} \\
= \ & \{\overrightarrow{e_1}(a_2b_3 - a_3b_2) + \overrightarrow{e_2}(a_3b_1 - a_1b_3) + \overrightarrow{e_3}(a_1b_2 - a_2b_1)\} \cdot (\overrightarrow{e_1}a_1 + \overrightarrow{e_2}a_2 + \overrightarrow{e_3}a_3) \\
= \ & \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_1}(a_2b_3 - a_3b_2)a_1 + \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2}(a_2b_3 - a_3b_2)a_2 + \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_3}(a_2b_3 - a_3b_2)a_3 \\
& + \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_1}(a_3b_1 - a_1b_3)a_1 + \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_2}(a_3b_1 - a_1b_3)a_2 + \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_3}(a_3b_1 - a_1b_3)a_3 \\
& + \overrightarrow{e_3} \cdot \overrightarrow{e_1}(a_1b_2 - a_2b_1)a_1 + \overrightarrow{e_3} \cdot \overrightarrow{e_2}(a_1b_2 - a_2b_1)a_2 + \overrightarrow{e_3} \cdot \overrightarrow{e_3}(a_1b_2 - a_2b_1)a_3 \\
= \ & (a_2b_3 - a_3b_2)a_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)a_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)a_3 \\
= \ & a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1 \\
= \ & 0.
\end{aligned}$$

注意 1　アルファベット順，番号順に整理しないと項どうしを比べにくい．

注意 2　$\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) = 0$ を示してもよい．

$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{b}$ も同じように示せます．

$\boxed{\textbf{問題7}}$　$\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$ を行列式で表してください.

★ 問題６ の

$$\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) = a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1)$$

に着目.

$\boxed{\text{解}}$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}) &= a_1(a_2b_3-a_3b_2)+a_2(a_3b_1-a_1b_3)+a_3(a_1b_2-a_2b_1) \\
&= a_1(a_2b_3-a_3b_2)-a_2(a_1b_3-a_3b_1)+a_3(a_1b_2-a_2b_1) \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

◀ この行列式を行展開して確かめよ.

Q3 この行列式から何がわかるでしょうか ?

二つの行が同じマトリックスの行列式の値は 0.

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_1} & \cancel{a_2} & \cancel{a_3} \\ \cancel{a_1} & \cancel{a_2} & \cancel{a_3} \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

問題 8　$\overrightarrow{b} \cdot (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$ を行列式で表してください.

解

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

の第１行を $\vec{b}$ の成分に書き換えます.

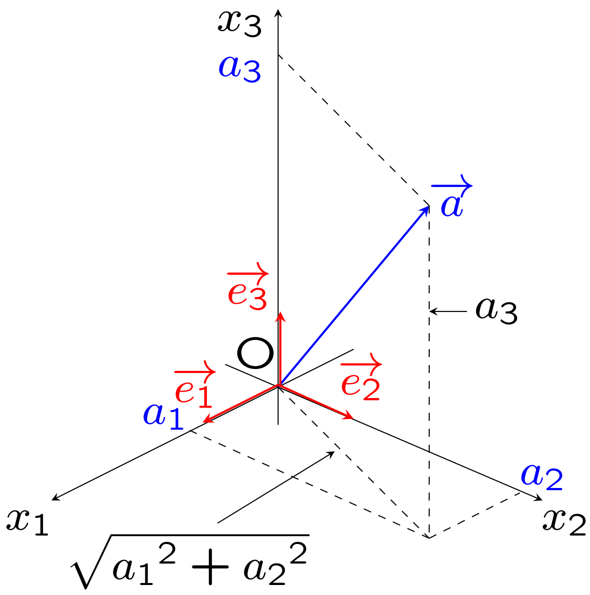
$$\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

注意　二つの行が同じマトリックスの行列式の値は 0.

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

三平方の定理の拡張

★ 本書 p.120 問題1.33



$$\vec{a} = \vec{e_1}a_1 + \vec{e_2}a_2 + \vec{e_3}a_3$$

のノルムの２乗は

$$\|\vec{a}\|^2 = {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2.$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{e_1}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{e_2}\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + \vec{e_3}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2.$$

次回のための予習

合成写像 —— 外積で図形的意味を理解する方法　本書 pp.122 – 123

逆写像　本書 1.7 節