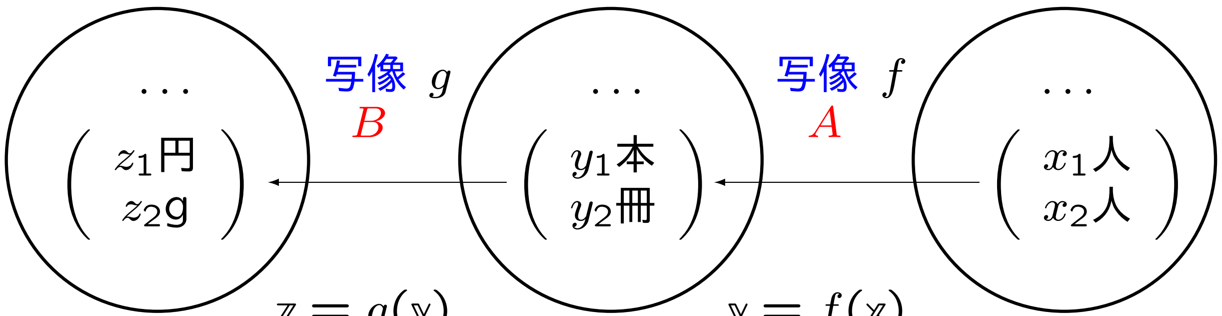
数学ターミナル　**線型代数の発想**

ダイジェスト版　15

$\boxed{\text{前回まで}}$　行列式の図形的意味 —— 写像で面積の倍率を表す．

$\boxed{\text{今回}}$　合成写像の図形的意味　★ ダイジェスト版 **5** p.16，ダイジェスト版 **6** p.2(再掲)

値域（出力の集合 Z）　定義域（入力の集合 Y）
値域（出力の集合 Y）　定義域（入力の集合 X）



１クラス，２クラスの人数の組

ペンの本数，ノートの冊数の組

価格，質量の組

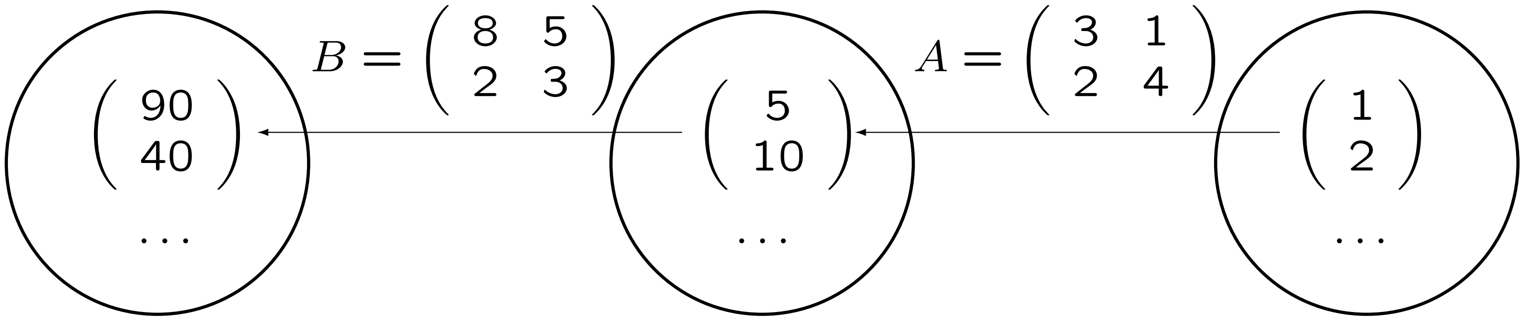
$\mathbb{z} = g(\mathbb{y})$
出力　入力

$\mathbb{y} = f(\mathbb{x})$
出力　入力

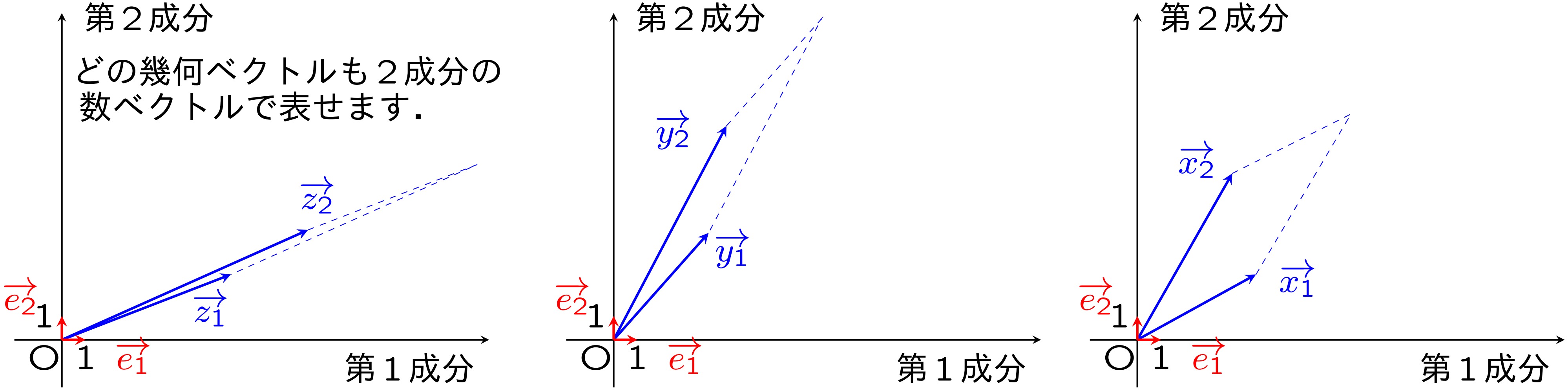
比例 $\mathbb{z} = B\mathbb{y}$.
比例 $\mathbb{y} = A\mathbb{x}$.
複比例 $\mathbb{z} = BA\mathbb{x}$.

A，B はマトリックス量，

BA はマトリックス量の乗法を表す．



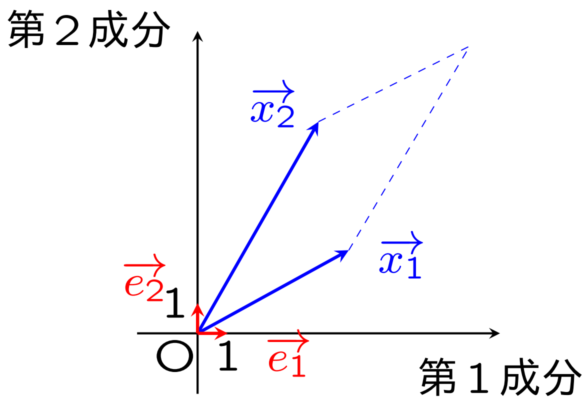
簡単のために，
量ではなく
数で考えます．



ねらい　$\overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{z_2}$ は $\overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{x_2}$ の何倍か ？

★ 本書 p.123

$\boxed{\textbf{問題 1}}$ 数ベクトル $\mathbb{x}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbb{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ で表せる x_1x_2 平面の幾何ベクトル $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{x_2}$ の張る平行四辺形の面積 $\overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{x_2}$ を求めてください.



$\boxed{解}$ 外積の分配法則を使って，

$$\overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{x_2} = (5\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}) \wedge (4\overrightarrow{e_1} + 7\overrightarrow{e_2})$$

を計算すると

$$\overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{x_2} \;=\; \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$$

◀ $\mathbb{x}_1$，$\mathbb{x}_2$ を並べたマトリックスの行列式．

となります．

$\boxed{問題2}$ マトリックス $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ で

$$\overrightarrow{x_1} \mapsto \overrightarrow{y_1}, \quad \overrightarrow{x_2} \mapsto \overrightarrow{y_2}$$

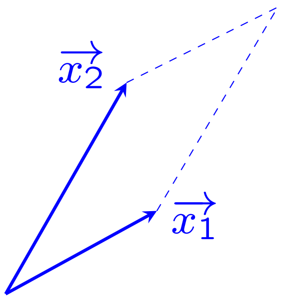
のようにうつすとき，$\overrightarrow{y_1} \wedge \overrightarrow{y_2}$ を求めてください．

★ $\overrightarrow{y_1}$，$\overrightarrow{y_2}$ を表す数ベクトルを求めなくても $\overrightarrow{y_1} \wedge \overrightarrow{y_2}$ を計算することができる．

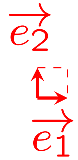
$\boxed{\text{解}}$

$$\overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$$

の式を読解すると



$$= \quad$$



$$\times \underbrace{\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}}_{\text{倍率を表す数値}}$$

だから，$\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2}$ が何倍になるかを考えます．

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

◀ うつり先が簡単にわかります．

$$\overrightarrow{y_1} \wedge \overrightarrow{y_2} = \left\{ \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \right\} \times \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}.$$

$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ は e_1，e_2 のうつり先を並べた行列式です．

$\boxed{\text{問題3}}$ マトリックス $B = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ で

$$\overrightarrow{y_1} \mapsto \overrightarrow{z_1}, \quad \overrightarrow{y_2} \mapsto \overrightarrow{z_2}$$

のようにうつすとき，$\overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{z_2}$ を求めてください．

★ 問題２の方法を使うと，$\overrightarrow{z_1}$，$\overrightarrow{z_2}$ を表す数ベクトルを求めなくても $\overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{z_2}$ を計算することができる．

$\boxed{\text{解}}$

$$\overrightarrow{y_1} \wedge \overrightarrow{y_2} = \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$$

だから，$\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2}$ が何倍になるかを考えます．

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

◀ うつり先が簡単にわかります．

$$\overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{z_2} = \left\{ \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2} \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \right\} \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}.$$

$\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ は $\mathbb{e}_1$，$\mathbb{e}_2$ のうつり先を並べた行列式です．

$\boxed{\text{問題4}}$ 合成写像を表すマトリックス BA を求めてください.

★ BA は（あとの写像）（はじめの写像）の順であることに注意.

★ $\mathbb{z} = BA\mathbb{x}$.

$\boxed{解}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

左側のマトリックスをヨコベクトルの並び, 右側のマトリックスをタテベクトルの並びと見て, スカラー積（ヨコベクトル × タテベクトル）を計算して並べる.

$$\begin{array}{l} 第1行 \\ 第2行 \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{\bullet \quad \bullet} \\ \boxed{\bullet \quad \bullet} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{cc} 第 & 第 \\ 1 & 2 \\ 列 & 列 \\ & \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \bullet \\ \bullet \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \bullet \\ \bullet \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

★ 本書 p.48, ダイジェスト版 **6** pp.10 – 12

$$
\begin{aligned}
BA &= \begin{pmatrix} \boxed{8 \quad 5} \\ \boxed{2 \quad 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 8 \times 3 + 5 \times 2 & 8 \times 1 + 5 \times 4 \\ 2 \times 3 + 3 \times 2 & 2 \times 1 + 3 \times 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 34 & 28 \\ 12 & 14 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
2 \times 2 \arrow[dr] & \text{一致} & 2 \times 2 \arrow[dl] \\
& 2 \times 2 &
\end{tikzcd}
$$

$\boxed{\textbf{問題5}}$ マトリックス $BA = \begin{pmatrix} 34 & 28 \\ 12 & 14 \end{pmatrix}$ で

$$\overrightarrow{x_1} \mapsto \overrightarrow{z_1}, \quad \overrightarrow{x_2} \mapsto \overrightarrow{z_2}$$

のようにうつすとき，$\overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{z_2}$ を求めてください．

★ 問題２の方法を使うと，$\overrightarrow{z_1}$，$\overrightarrow{z_2}$ を表す数ベクトルを求めなくても $\overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{z_2}$ を計算することができる．

★ BA は合成写像を表す．

$\boxed{\text{解}}$

$$\overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$$

だから，$\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2}$ が何倍になるかを考えます．

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 34 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 28 \\ 14 \end{pmatrix}$$

◀ うつり先が簡単にわかります．

$$\overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{z_2} = \left\{ \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2} \begin{vmatrix} 34 & 28 \\ 12 & 14 \end{vmatrix} \right\} \times \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}.$$

$\begin{vmatrix} 34 & 28 \\ 12 & 14 \end{vmatrix}$ は $\mathbb{e}_1$，$\mathbb{e}_2$ のうつり先を並べた行列式です．

$\boxed{\text{問題 6}}$　問題３と問題５を比べるために，

$$\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \qquad \blacktriangleleft\ |B||A|$$

と

$$\begin{vmatrix} 34 & 28 \\ 12 & 14 \end{vmatrix} \qquad \blacktriangleleft\ |BA|$$

を計算してください．

$\boxed{解}$

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\
=\ & (8 \times 3 - 5 \times 2)(3 \times 4 - 1 \times 2) \\
=\ & 14 \times 10 \\
=\ & 140.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 34 & 28 \\ 12 & 14 \end{vmatrix} &= 34 \times 14 - 28 \times 12 \\
&= 140.
\end{aligned}
$$

◀ $14\begin{vmatrix} 34 & 2 \\ 12 & 1 \end{vmatrix} = 14(34 - 24).$

$\boxed{まとめ}$ $\boxed{|B||A| = |BA|}$ ★ 本書 p.122

$AB \neq BA$ ですが，行列式は一つの値だから

$$|A||B| = |B||A|$$

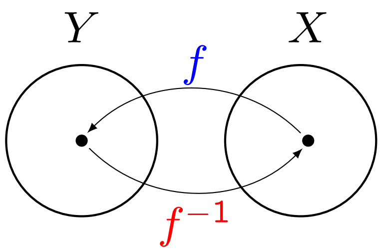
$\boxed{例}$ $10 \times 14 = 14 \times 10.$

が成り立ちます．

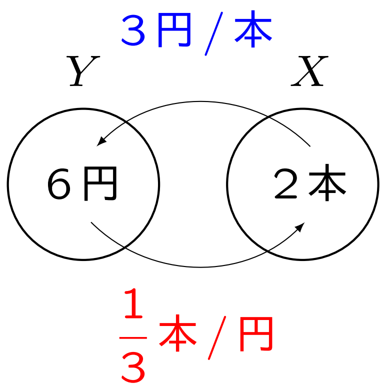
逆写像

★ 本書 p.130

導入



注意　$\dfrac{1}{f}$ を表す記号ではありません．



量の関係式：６円 ＝ ３円/本 $\times$ ２本

出力　　写像　　入力

単位で割ると

数の関係式：$6 = 3 \times 2$.

量の関係式：２本 ＝ $\dfrac{1}{3}$本/円 $\times$ ６円

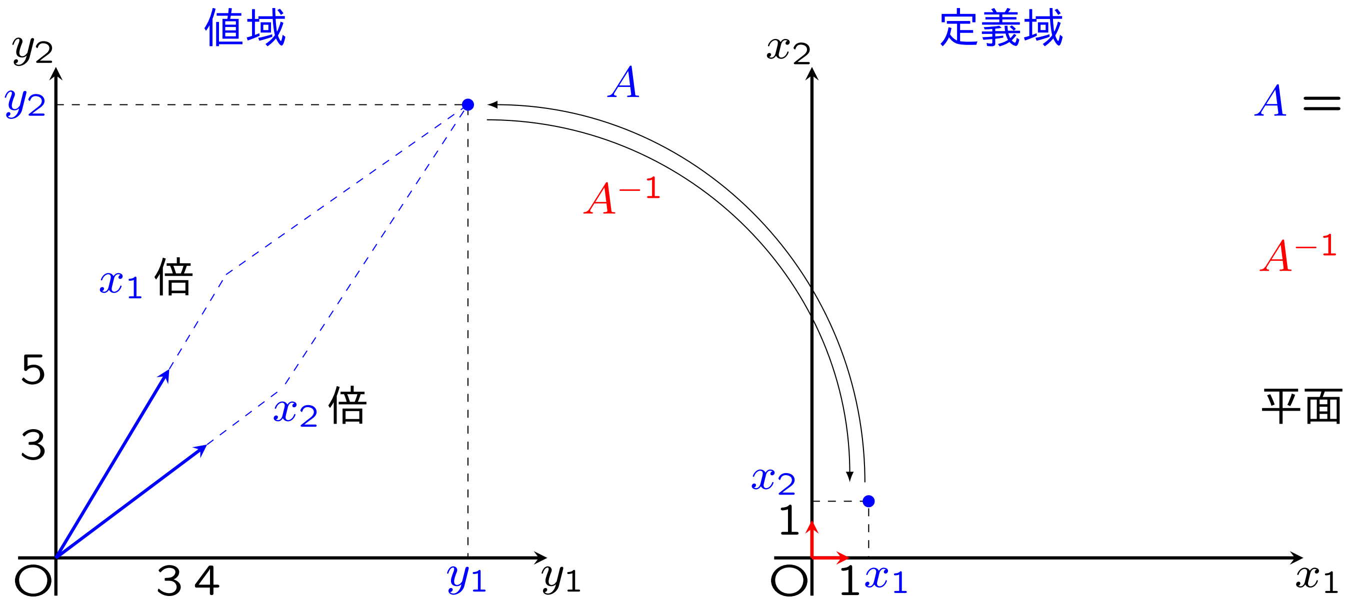
逆写像

数の関係式：$2 = \dfrac{1}{3} \times 6$.

逆数　積が１になる二つの数の一方を他方の逆数といいます．

拡張

★ 本書 p.131



$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1}.$$

平面は点の集合.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{\text{出力}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{写像}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\text{入力}}. \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1}}_{\text{逆写像}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

記号 $\mathbb{y} = A\mathbb{x}$. $\mathbb{y} = f(\mathbb{x})$ の $f(\ \ )$ をマトリックス A で表した形.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

図形的意味　　うつり先

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 \right\} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} x_2. \end{aligned}$$

逆写像　$\boxed{\text{うつり先} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{から結合係数 } x_1,\ x_2 \text{ を求める規則}}$

正方マトリックス A の逆マトリックスは

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \qquad \text{（単位マトリックス）}$$

をみたすマトリックスです.

逆数の拡張

$$3 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times 3 = 1.$$

注意 $\quad \dfrac{1}{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}}, \dfrac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}}$ のような分数は定義できません.

$$A\square = \square A = I$$

同じ ？

$\boxed{\text{方針}}$

$$AB = I,$$

$$CA = I$$

とおき，

$$B = C$$

を示します．

★ 本書 p.132

$$CA = I$$

の両辺に右からBを掛けると

$$(CA)B = IB.$$

$$\begin{aligned} \text{左辺}\quad (CA)B &= C(AB) \\ &= CI \\ &= C. \end{aligned}$$

◀ マトリックスの乗法の結合法則

$$\text{右辺}\quad IB = B.$$

したがって,

$$C = B.$$

記号　B, C を A^{-1} と表します.

逆マトリックスの求め方

★ 本書 p.132

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\boxed{\begin{matrix} 3x_{11} + 4x_{21} \\ 5x_{11} + 3x_{21} \end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix} 3x_{12} + 4x_{22} \\ 5x_{12} + 3x_{22} \end{matrix}} \right) = \left(\boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} \right)$$

どちらの連立１次方程式も係数は同じであることに着目します.

$\boxed{\text{方法1}}$ Gauss − Jordan の消去法（掃き出し法） ★ 本書 p.133

$$\left(\boxed{\begin{matrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} \right), \quad \left(\boxed{\begin{matrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} \right)$$

まとめて

$$\left(\boxed{\begin{matrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \right)$$

と表して，左半分を

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

に書き換えます．

$$\left(\boxed{\begin{matrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \right) \to \cdots \to \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix} -\frac{3}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{5}{11} & -\frac{3}{11} \end{matrix}} \right)$$ 右半分が逆マトリックスです．

$\boxed{\text{方法２}}$ Cramer の方法 ★ 本書 p.133

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3x_{11}+4x_{21} \\ 5x_{11}+3x_{21} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 3x_{12}+4x_{22} \\ 5x_{12}+3x_{22} \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_{11}+4x_{21}=1 \\ 5x_{11}+3x_{21}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_{12}+4x_{22}=0 \\ 5x_{12}+3x_{22}=1 \end{cases}$$

$$\text{分母} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -11.$$

$$x_{11}\text{の分子} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

◀ 分子の行列式は 1,0 を含むから計算が簡単.

など.

逆マトリックスの使い方

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \qquad \blacktriangleleft \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{5}{11} & -\frac{3}{11} \end{pmatrix}.$$

例

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{5}{11} & -\frac{3}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

◀ $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}$ の場合.

の右辺を計算すると

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} x_2$$

の結合係数 x_1, x_2 が求まります.

問題 7 逆マトリックス A^{-1} の行列式 $|A^{-1}|$ は，もとのマトリックス A の行列式 $|A|$ の逆数であることを示してください．

$\boxed{\text{解}}$

$$|AA^{-1}| = |I| = 1$$

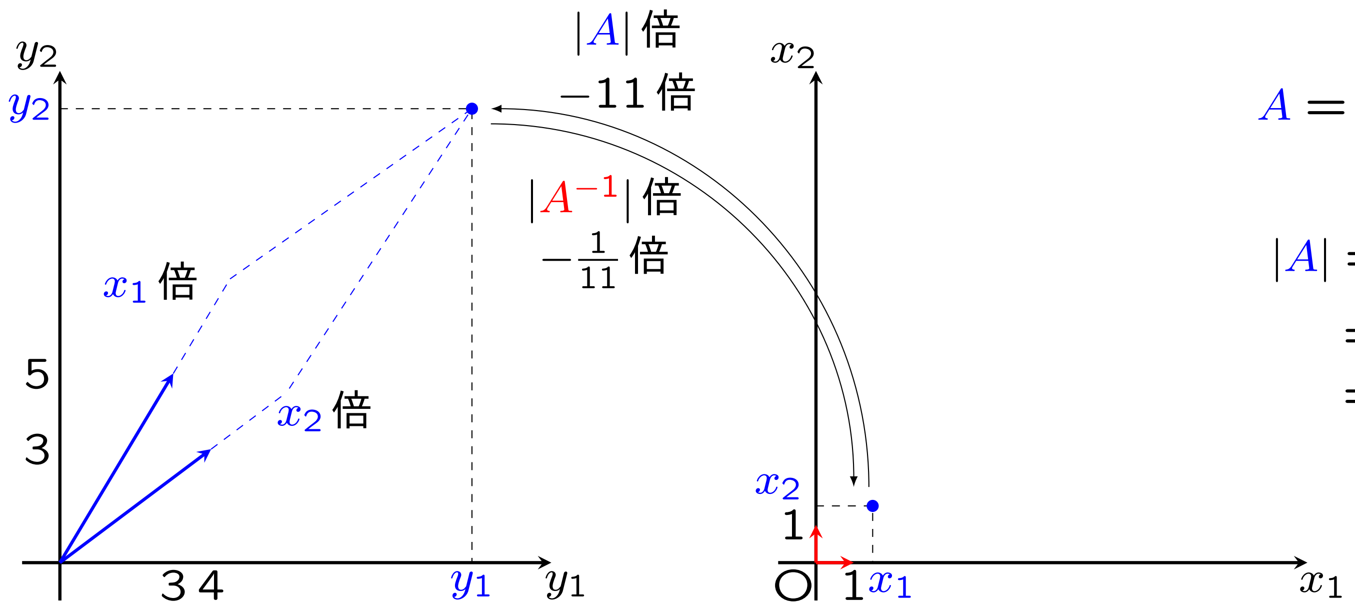
◀ I は単位マトリックス.

と

$$|AA^{-1}| = |A||A^{-1}|$$

を比べると

$$|A^{-1}| = 1/|A|.$$

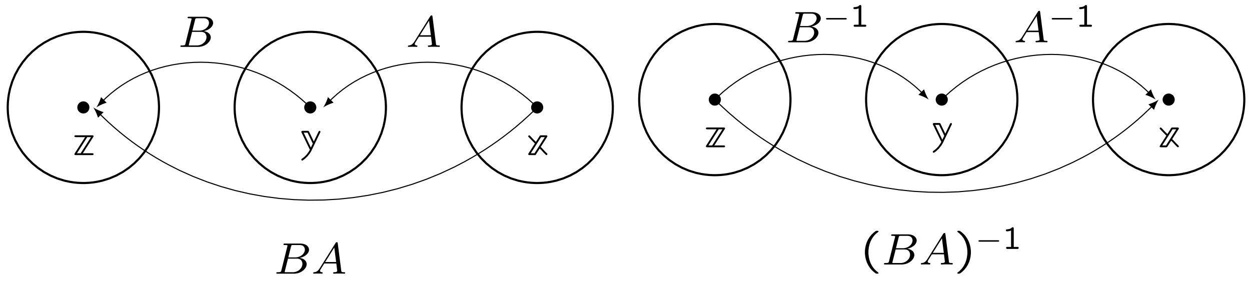


$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 3 \times 3 - 4 \times 5 \\ &= -11. \end{aligned}$$

合成写像の逆写像

★ 本書 p.135



$$\mathbb{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},\ \mathbb{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ \mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

この図のとおり

$$(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}.$$

◀（あとの写像）（はじめの写像）の順であることに注意.

$$\begin{aligned} \mathbb{y} &= A\mathbb{x}. \\ \mathbb{z} &= B\mathbb{y}. \\ \mathbb{z} &= BA\mathbb{x}. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbb{y} &= B^{-1}\mathbb{z}. \\ \mathbb{x} &= A^{-1}\mathbb{y}. \\ \mathbb{x} &= A^{-1}B^{-1}\mathbb{z}. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{次回のための予習}}$

平面内の直線・点の表し方　本書 pp.139 – 148