数学ターミナル　線型代数の発想

ダイジェスト版　**16**

今回から後半に進みます.

これから, どんな内容を扱うのでしょうか?

前半 (ダイジェスト版 **1–15**) で連立１次方程式の解法に習熟したので,

後半で連立１次方程式とその解の姿を目で見えるように

します.

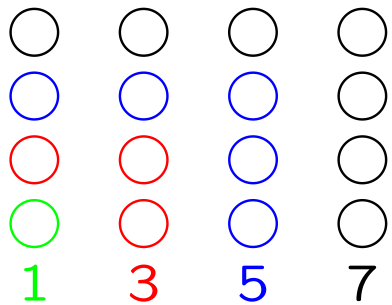
「解の姿を目で見る」とは?

連立１次方程式以外の単純な例を挙げてみます.

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

です. なぜ 15, 17 ではなく 16 になるのでしょう?

$1+3+5+7$ の姿を見ると，16でないとおかしいことがわかります．



奇数の和＝平方数

$$1+3+5+7=4^2.$$

主要項目

● 後半 (ダイジェスト版 **16–30**) は, どんな内容を扱うのでしょうか**?**

２章　連立１次方程式の図形的意味

３章　群・線型空間　　「空間」とは「集合」

４章　線型変換　　「式の変形」ではない.

５章　固有値問題

★ ２章の内容は, ３章, ４章, ５章でも必要です.

★ 後半は前半 (ダイジェスト版 **1–15**) の復習も含みます.

数・式と図形との結びつき

● 1元1次方程式 ★ 本書 p.139

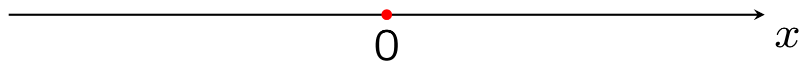
$\boxed{\textbf{問題 1}}$ $5x = 0$の解集合を図で表してください.

★ 数直線は実数全体の集合$\mathbb{R}$を表す図であることを思い出します.

★ 30秒間 考えてわからなかったら，つぎのページを見よ.

解　$5x = 0$ の解は $x = 0$ だから，解集合は $\{0\}$ であり，要素が１個の集合です．

$$\text{点という図形} \overset{\text{対応}}{\leftrightarrow} \text{数}$$



問題２　$0x = 0$ の解集合を図で表してください．

解　$0x = 0$ の解は不定だから，あらゆる実数が解です．

解集合は $\mathbb{R}$ であり，数直線全体です．

問題 **3**　$0x = 3$ の解集合を求めてください．

$\boxed{\text{解}}$　解は存在しないから不能です．

解集合は空集合 $\varnothing$ です．

注意　空集合は $\varnothing$ または $\{\ \ \}$ で表します．

$\{\varnothing\}$ は正しくありません．この記号では，要素が $\varnothing$ の意味になります．

$\boxed{\text{まとめ}}$

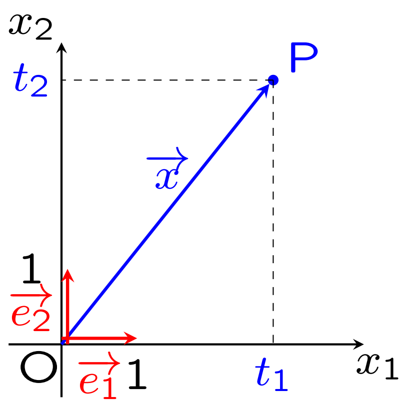
1元1次方程式	解集合	解集合を表す図形
$5x=0$	$\{0\}$	点
$0x=0$	$\mathbb{R}$	直線
$0x=3$	$\{\ \ \}$	存在しない．

２元連立１次方程式の図形的意味を理解するための準備

(1) 平面の表し方

★ 本書 p.141 問2.1

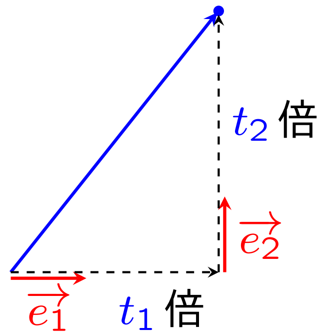
「平面内のあらゆる点の位置がどのように表せるか」



平面内の任意の点の位置

幾何ベクトル

点という図形



記号 $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{e_1} t_1 + \overrightarrow{e_2} t_2$

数ベクトル

数の組

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t_2.$$

記号 $\mathbb{x} = \mathbb{e}_1 t_1 + \mathbb{e}_2 t_2$.

注意　２×１マトリックス（２行１列）と

１×１マトリックス（１行１列）との乗法

$$2 \times \underbrace{1 \quad 1}_{\text{一致}} \times 1$$

線型結合

★ 本書 pp.139 – 140

$\boxed{\text{線型従属}}$ 一つのベクトルが他のベクトルの線型結合で表せます．

$\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$.

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} 1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (-t_1) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (-t_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

「すべての係数が0」でなくても零ベクトルがつくれます．

$\boxed{\text{線型独立}}$

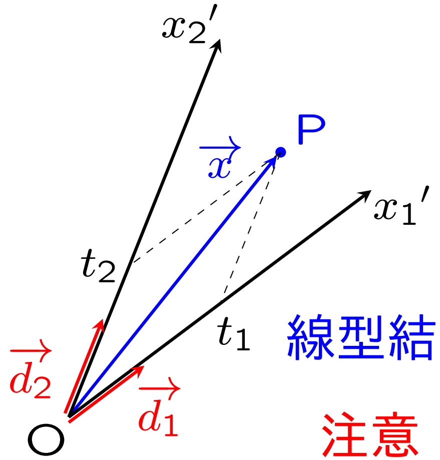
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で表せません．

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \square + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \square = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

「すべての係数が0」のとき零ベクトルがつくれます．

斜交座標

★ 本書 p.139



幾何ベクトル

$$\vec{x} = \vec{d_1}t_1 + \vec{d_2}t_2$$

スカラー（倍率）

線型結合の係数(倍率を表す)t_1, t_2 を座標とします.

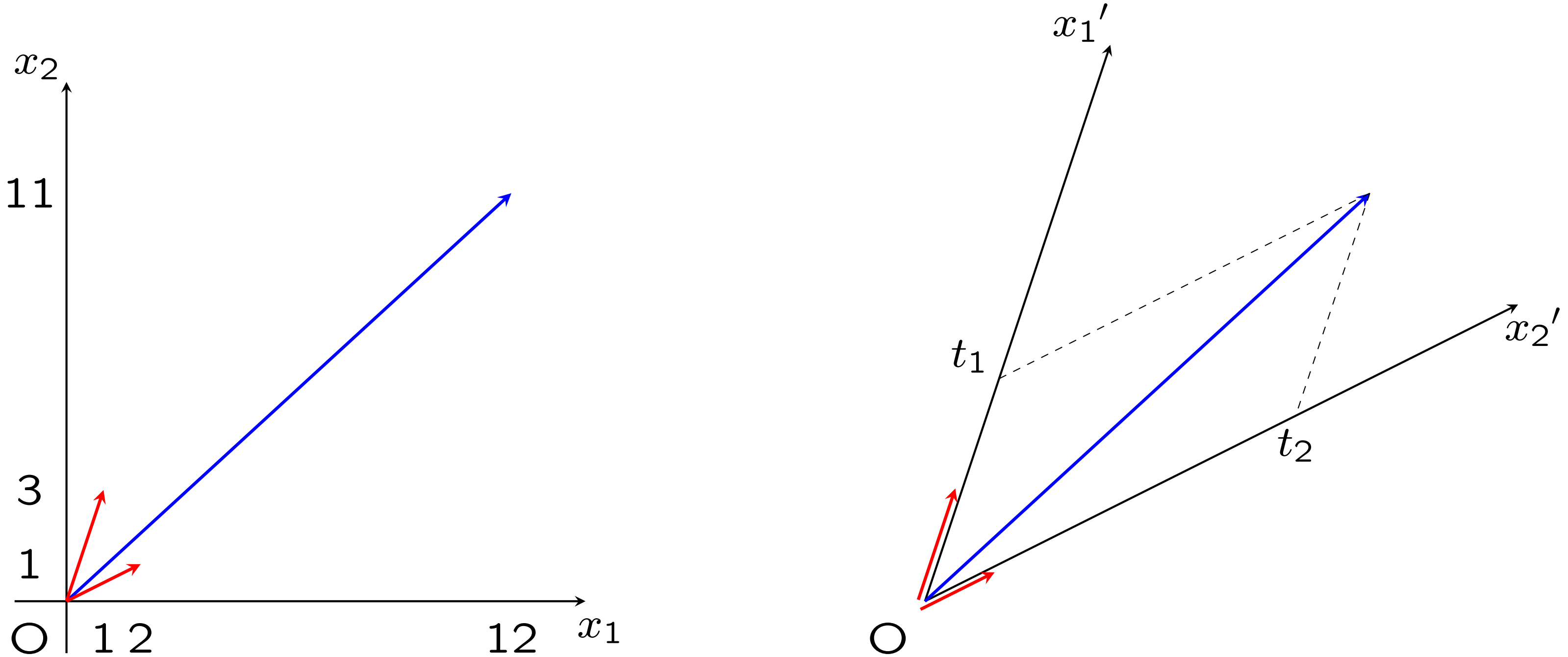
注意　$\|\vec{d_1}\| = 1$, $\|\vec{d_2}\| = 1$ と限りません.

$\vec{d_1}$ の1倍の位置の座標を $t_1 = 1$, $\vec{d_2}$ の1倍の位置の座標を $t_2 = 1$ とします.

Q1　座標はどのようにして求めるのでしょうか?

問題4　直交座標系で $\mathbb{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix}$, $\mathbb{d}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbb{d}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表せるとき，斜交座標系で $\mathbb{x}$ の座標 t_1, t_2 を求めてください．

★ Cramer の方法で計算すること．



$\boxed{\text{復習}}$ Cramer の方法を忘れたとき

$$2x = 3$$

の解は

$$x = \frac{3}{2} \qquad \frac{\text{定数項}}{\text{係数}}$$

であることを手がかりにして発展させます.

$\boxed{\text{解}}$ $\mathbb{x} = \mathbb{a}_1 t_1 + \mathbb{a}_2 t_2$ は

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t_2$$

だから, 2元連立1次方程式

$$\begin{cases} 1t_1 + 2t_2 = 12 \\ 3t_1 + 1t_2 = 11 \end{cases}$$

を t_1, t_2 について解きます.

$$t_1 = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 11 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{12 \times 1 - 2 \times 11}{1 \times 1 - 2 \times 3} = \frac{-10}{-5} = 2. \qquad t_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1 \times 11 - 12 \times 3}{1 \times 1 - 2 \times 3} = \frac{-25}{-5} = 5.$$

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} 2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} 5.$$

意味　$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ の２倍と $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の５倍とをつなぎ合わせると $\begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix}$ を表せます．

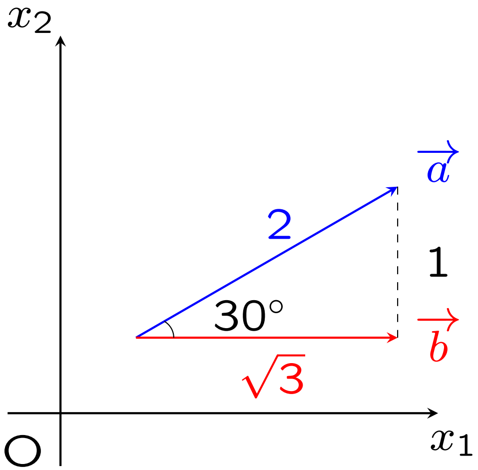
$\begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix}$ の ${x_1}'$ 軸で測った座標は２，${x_2}'$ 軸で測った座標は５です．

(2) 直線の表し方

★ 本書 pp.140 − 145

「直線上のあらゆる点の位置がどのように表せるか」

$\boxed{\text{準備}}$ 内積



幾何ベクトル

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\| \cos 30^\circ$$

dot

$$= 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= 3.$$

数ベクトル

$$\mathbb{a} \cdot \mathbb{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \sqrt{3} \times \sqrt{3} + 1 \times 0$$
$$= 3.$$

$\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$ のとき $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0.$

「通る特定の点」と「方向」が同じ直線は１通りしかありません.

① どの点を通るか

② どの方向か $\begin{cases} \text{幾何ベクトル } \vec{d} \text{ に平行} & \boxed{\text{直線のベクトル表示}} \\ \text{幾何ベクトル } \vec{n} \text{ に垂直} & \boxed{\text{直線の方程式}} \end{cases}$

$\vec{d}$ direction 方向　　$\vec{n}$ normal 垂直な

「通る特定の点」が

原点である直線の表し方

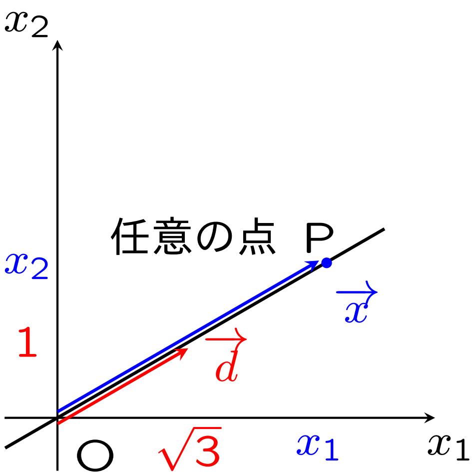
と

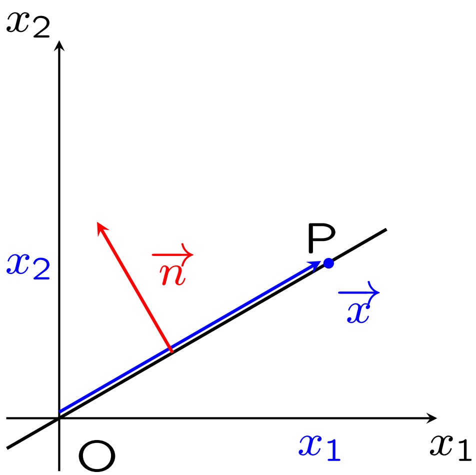
原点以外である直線の表し方

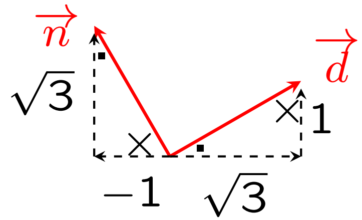
に進みます.

$\boxed{\text{原点を通る直線}}$ 暗記するのではなく，図を描いて式で表せるように練習してください.

例







幾何ベクトル $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{d}\,t$
(t は任意の実数).

数ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} t.$

直線のベクトル表示

内積 $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{x} = 0.$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

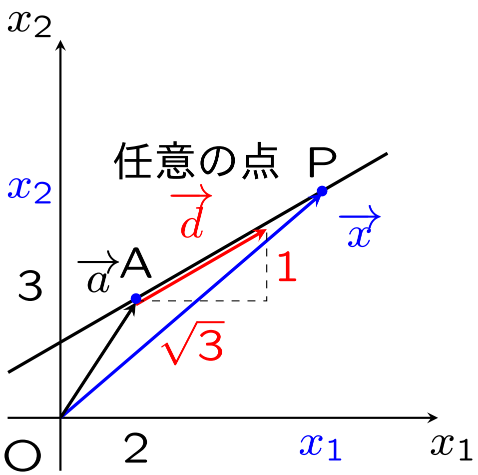
$$-1x_1 + \sqrt{3}x_2 = 0.$$

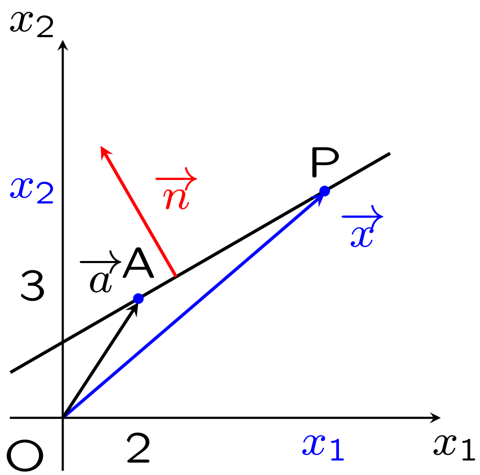
直線の方程式

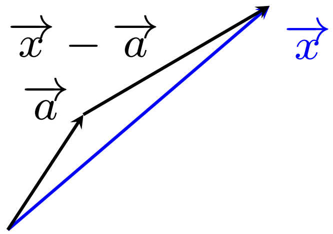
原点以外の特定の点を通る直線

図を描いて式で表せるように練習してください.

例







幾何ベクトル $\vec{x} = \vec{a} + \vec{d}\,t$
(t は任意の実数).

数ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} t.$

直線のベクトル表示　通る点　平行な方向

内積 $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0.$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 3 \end{pmatrix} = 0.$$

$$-1(x_1 - 2) + \sqrt{3}(x_2 - 3) = 0.$$

$$-1x_1 + \sqrt{3}x_2 = 3\sqrt{3} - 2.$$

直線の方程式

まとめ　２元１次方程式

★ 本書 p.143

直線の方程式の見方

$$\underbrace{-1x_1 + \sqrt{3}x_2}_{} = \begin{cases} 0 & （原点を通る） \\ 0\text{以外} & （原点を通らない） \end{cases}$$

係数 垂直な方向 $\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

$$-1(x_1 - 2) + \sqrt{3}(x_2 - 3) = 0.$$

通る点 $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

直線の方程式の使い方

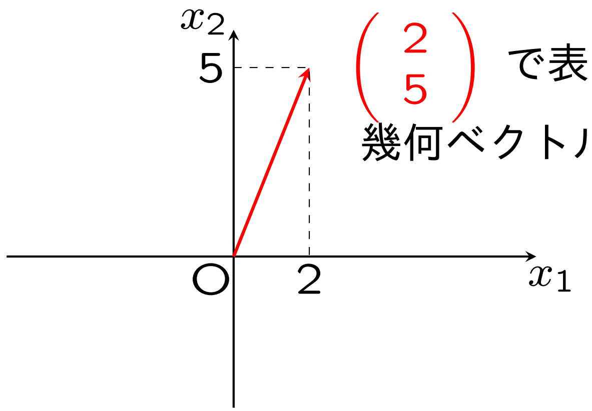
★ 本書 p.143 下から５行目

例 1　x_1x_2 平面内に直線 $2x_1 + 5x_2 = 0$ を引くとき

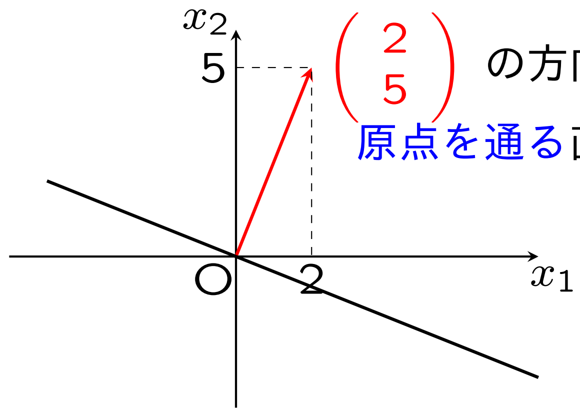
★ 中学数学とちがって $x_2 = \cdots$ と書き換えない.

右辺の定数項が 0 だから「原点を通る」ことがわかり,

左辺の係数を成分とする数ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ で表せる方向に垂直と読み取る.



$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ で表せる方向の幾何ベクトル $\vec{n}$ を描く.

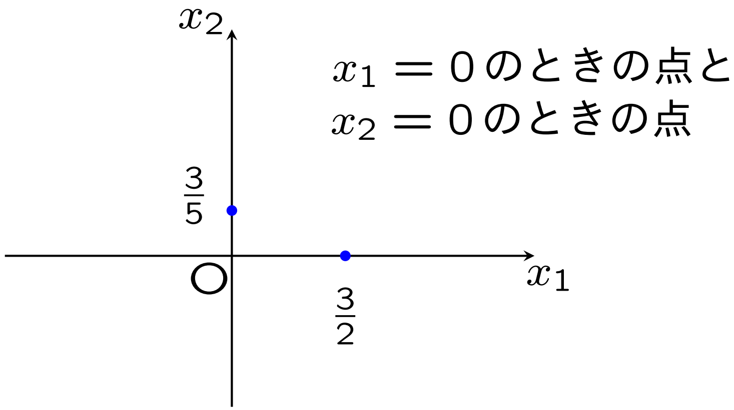


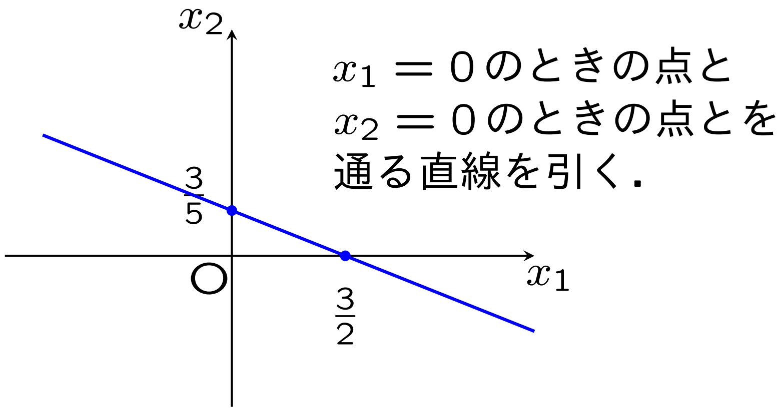
$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ の方向に垂直に原点を通る直線を引く.

例2　x_1x_2 平面内に直線 $2x_1 + 5x_2 = 3$ を引くとき

★ 中学数学とちがって $x_2 = \cdots$ と書き換えない.

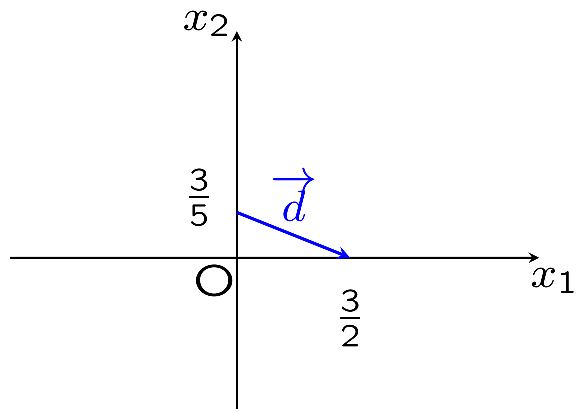
★ 本書 p.54 例題1.4

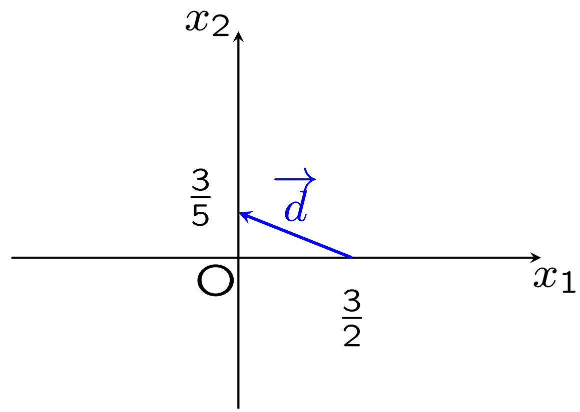




問題5　この直線に平行な方向の幾何ベクトル $\vec{d}$ を表す数ベクトル $\mathbb{d}$ を答えてください.

$\boxed{解}$





$$\mathbb{d} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \text{ または } \mathbb{d} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

$\boxed{問題 6}$ $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{d} = 0$ を示してください.

$\boxed{解}$

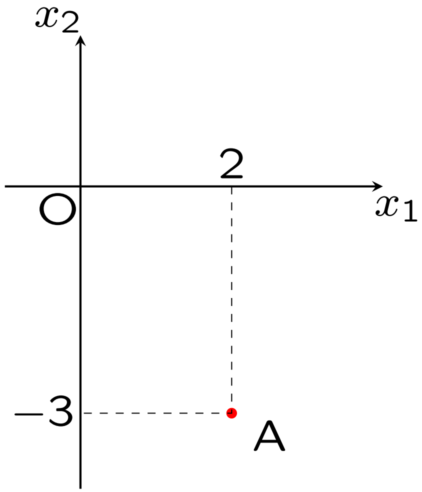
$$\begin{aligned}\mathbb{n}\cdot\mathbb{d} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \\ &= 2\times\frac{3}{2}+5\times\left(-\frac{3}{5}\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

$\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{d}$ を確かめることができました.

点のベクトル表示

★ 本書 p.144

$$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$



点の方程式

★ 本書 pp.144 – 145

Q2 特定の点を一つの方程式で表せるでしょうか**?**

一つの方程式は直線を表し，直線上には無数の点が存在します．

発想　２直線の交点 $\xrightarrow{\text{翻訳}}$ ２元連立１次方程式の解

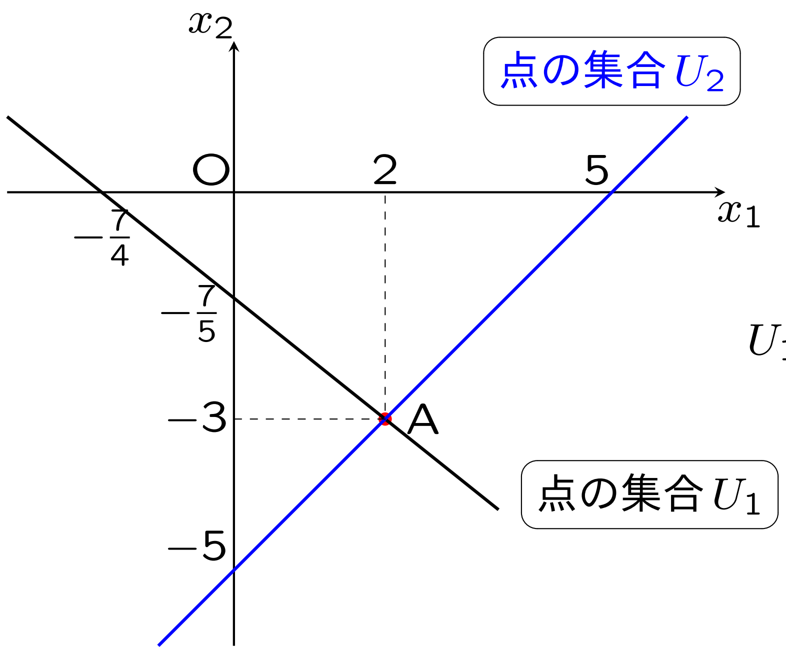
例 $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = -7 \\ -1x_1 + 1x_2 = -5 \end{cases}$ ◀ 直線の方程式 ◀ 直線の方程式

$\boxed{\textbf{問題 7}}$　x_1x_2平面に２直線を引いてください．

★ $x_2 = \cdots$ と書き換えないで，$x_1 = 0$のときの点と$x_2 = 0$のときの点とを通るように直線を引く．

★ 本書 p.54 例題1.4，ダイジェスト版 **16** p.21

解　直線は無数の点の集合です.



解集合 (要素は 1 個の解ベクトル)

$$U_1 \cap U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}.$$

積集合 (交わり)

cap(帽子) $\cap$

Cramer の方法で連立方程式を解くと, 点のベクトル表示が求まります.

重要　平面内の点の方程式は 2 直線を表す 2 元連立 1 次方程式です.

$\boxed{\text{次回のための予習}}$

斉次方程式と非斉次方程式との関係　本書 pp.145 – 155