数学ターミナル　線型代数の発想

ダイジェスト版　**17**

前回

(1) 平面の表し方 —— 平面内のあらゆる点の位置はどのように表せるか

(2) 直線の表し方 —— 直線上のあらゆる点の位置はどのように表せるか

(3) 点の表し方 —— 平面内の特定の点の位置はどのように表せるか

今回

図形の観点から

斉次方程式と非斉次方程式との関係

を理解する.

問題演習

★ 本書 pp.146 – 148

ねらい

直線のベクトル表示 $\overset{\text{翻訳}}{\longleftrightarrow}$ 直線の方程式

例 $$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\text{直線のベクトル表示}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{通る点}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}}_{\text{平行な方向}} t$$

$$\begin{cases} x_1 = 5 - 2t \\ x_2 = 1 + 7t \end{cases}$$ t はパラメータ（媒介変数）. ★ 本書 p.171

t を消去する（$x_1 = \cdots$ に 7 を掛け，$x_2 = \cdots$ に 2 を掛けて足す）と，

直線の方程式 $7x_1 + 2x_2 = 37.$

問題 1　この直線が通る点を見つけてください.

解

★ 本書 p.143, ダイジェスト版 **16** p.19

$$7(x_1 - \underbrace{\spadesuit) + 2(x_2 - \clubsuit}_{\text{通る点}}) = 0.$$

$$7 \times \spadesuit + 2 \times \clubsuit = 37$$

をみたす数♠, ♣を求めます.

例　$\clubsuit = 1$ を選ぶと $\spadesuit = 5$.

$$7(x_1 - 5) + 2(x_2 - 1) = 0.$$

式の読解　$\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ で表せる方向に垂直で, 点 $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ 通る直線.

図の特徴は本書 p.143 図2.13, ダイジェスト版 **16** pp.19 – 20 を参考にすること.

自習　本書 p.155 [自習の方法] のとおりに計算, 図形の見方を練習すること.

斉次方程式と非斉次方程式との関係

★ 本書 p.153

	斉次方程式 (せいじ)	非斉次方程式 (せいじ)
例	$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 = 2 \end{cases}$
解ベクトル	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ 1t \end{pmatrix}.$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2t \\ 1t \end{pmatrix}.$
幾何的意味	原点を通る直線のベクトル表示	原点を通らない直線のベクトル表示

$\forall t \in \mathbb{R}$　Any「任意の(どんな値でもいい)」　$\mathbb{R}$ 実数の集合

Q1　例では,斉次方程式と非斉次方程式の「係数は同じ」という共通の特徴があります．解も共通の特徴があるのでしょうか?

★ この問題を考えるために,どちらの方程式もマトリックスで表すと見通しがよくなります．

せいじ

斉次方程式

非斉次方程式

マトリックス表示 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

記号 $A\mathbb{x}_0 = \mathbb{0}.$ $A\mathbb{x}_1 = \mathbb{b}.$

マトリックス A は大文字（太字でなくていい）.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} -2t \\ 1t \end{pmatrix}}_{\text{斉次方程式の一般解}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{非斉次方程式の特殊解}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

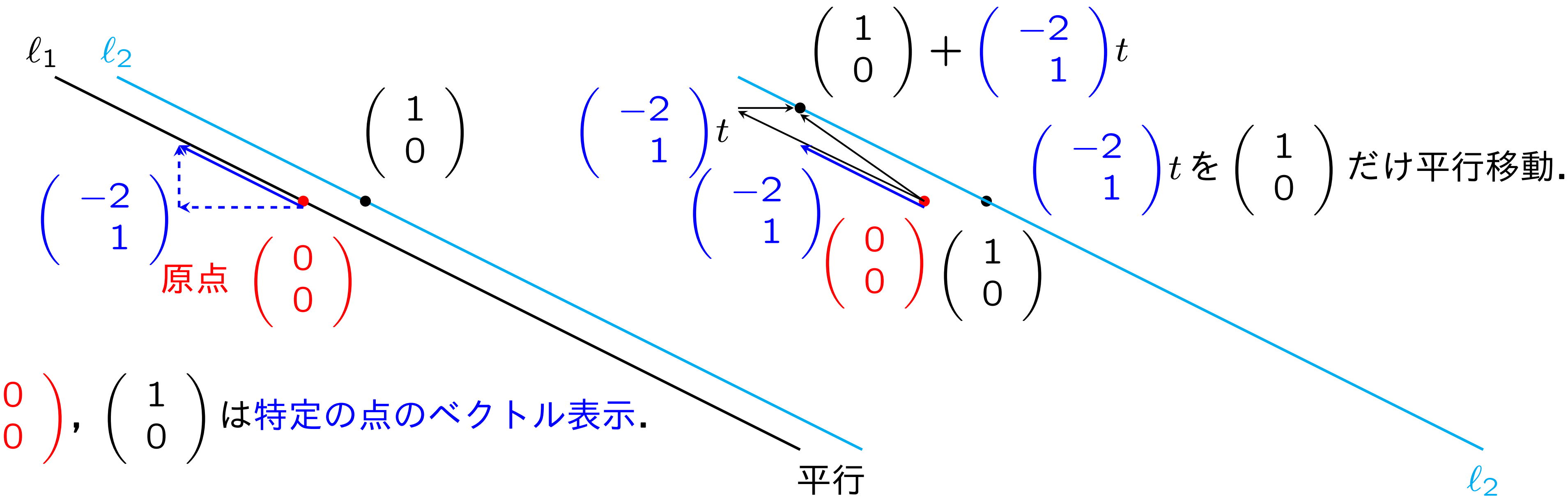
非斉次方程式の特殊解

例 $t = 0$ の特別な場合

+)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\underbrace{\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2t \\ 1t \end{pmatrix}\right\}}_{\text{非斉次方程式の一般解}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{非斉次方程式の一般解} = (\text{非斉次方程式の特殊解}) + (\text{斉次方程式の一般解})}$ ★ 本書 p.153



$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は特定の点のベクトル表示.

解の姿

直線 ℓ_1 上の点 $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} t$ は斉次方程式の解.

直線 ℓ_2 上の点 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} t$ は非斉次方程式の解.

３元連立１次方程式の図形的意味を理解するための準備

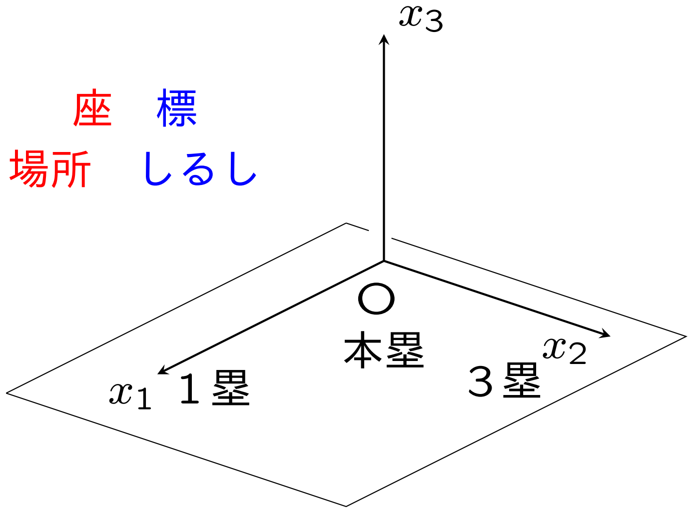
(1) 空間の表し方

★ 本書 p.159

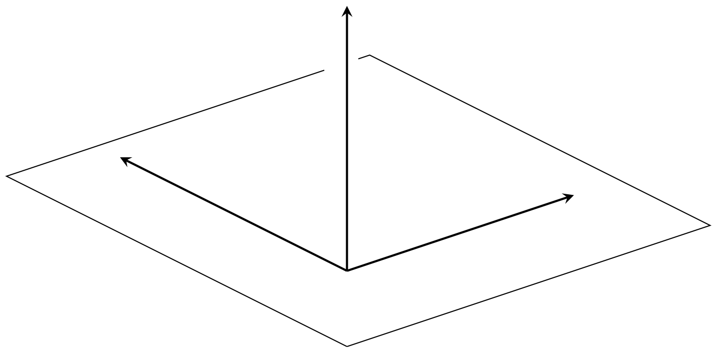
「空間内のあらゆる点の位置はどのように表せるか」

直交座標系

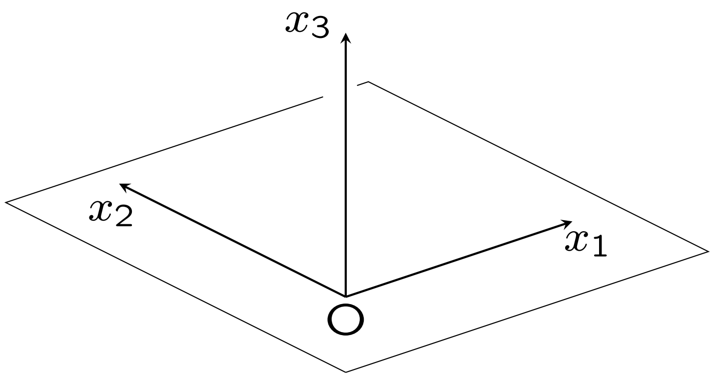
座　標
場所　しるし

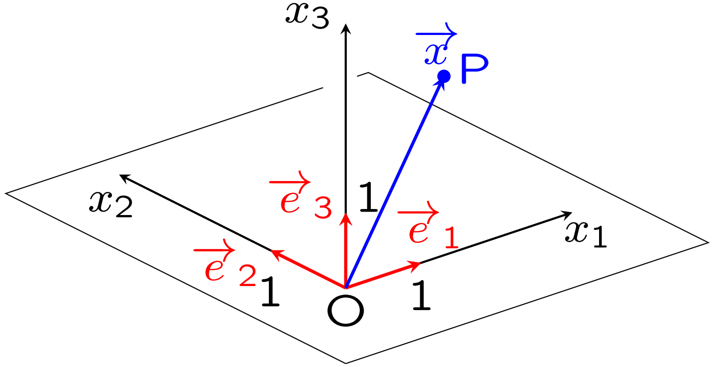


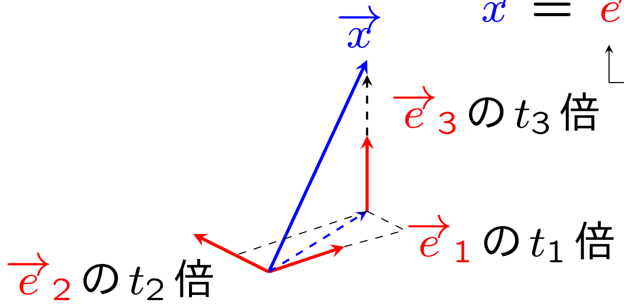
問題２　x_1, x_2, x_3 を記入してください.



$\boxed{解}$







線型結合

線型従属

$$\vec{x} = \vec{e}_1 t_1 + \vec{e}_2 t_2 + \vec{e}_3 t_3.$$

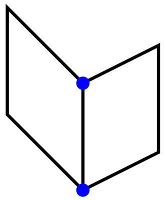
線型独立

(2) 平面の表し方

★ 本書 pp.159 – 162

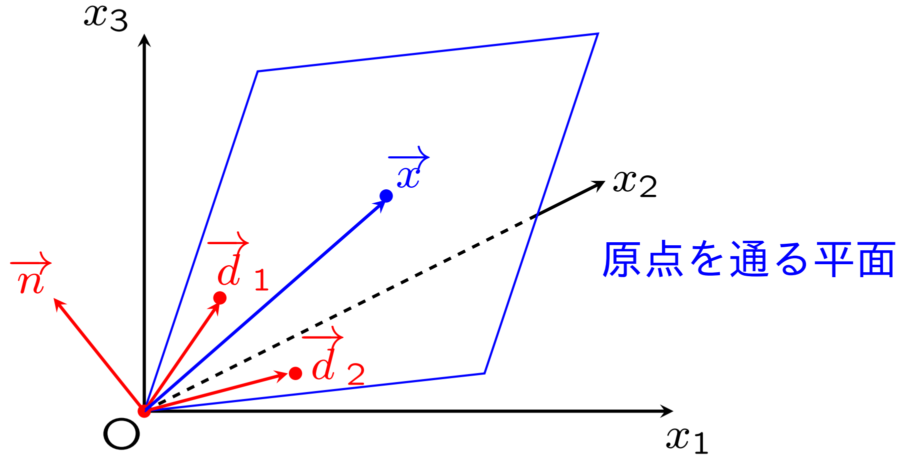
「平面内のあらゆる点の位置がどのように表せるか」

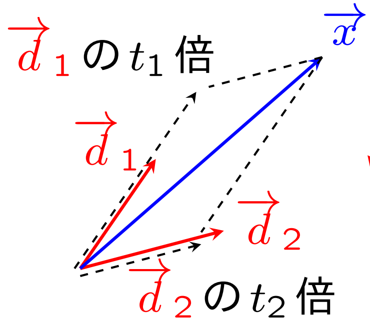
Q2　２個の点を通る平面は１通りに決まるでしょうか?

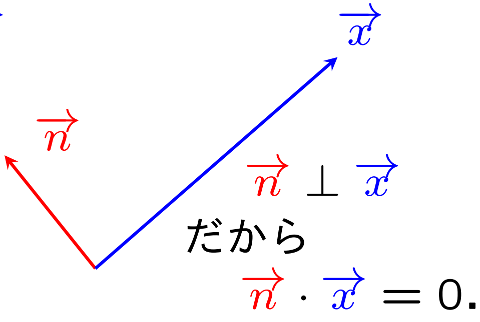


本, ノート, 新聞紙などを, このように立てるとわかるように,
２点を共有する平面は１通りではありません.

基本　３点を通る平面は１通りに決まります.







原点を通る平面のベクトル表示

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ d_{31} \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} d_{12} \\ d_{22} \\ d_{32} \end{pmatrix} t_2.$$

$$\mathbb{x} = \mathbb{d}_1 t_1 + \mathbb{d}_2 t_2.$$

添字 例 d_{32}
$\mathbb{d}_2$ の第 3 成分

原点を通る平面の方程式

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0. \qquad n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = 0.$$

内積 $\mathbb{n} \cdot \mathbb{x} = 0.$

問題 3　平面の方程式を和の記号で表してください.

$\boxed{解}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} n_k x_k = 0.$ 　斉次(せいじ)方程式だから「原点を通る」と判断できます.

番号 $i,\ j,\ k,\ \ell,\ m,\ n.$ 　$x,\ y,\ z$ と書くと和の記号を使うことができません.

原点を通る平面を

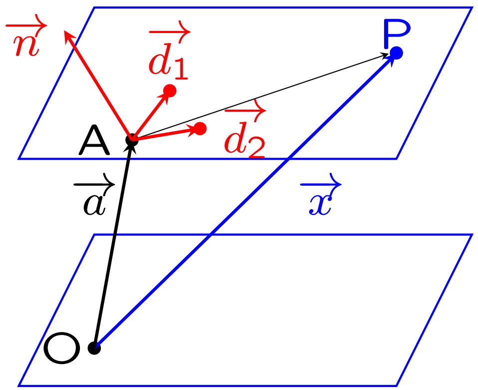
平行移動すると

原点を通らない平面

（原点以外の３点を通る）

になります.

$\vec{n} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}}$



$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{d_1} t_1 + \vec{d_2} t_2,$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{x} - \vec{a}$

だから

$\vec{d_1} t_1 + \vec{d_2} t_2 = \vec{x} - \vec{a}.$

原点を通らない平面のベクトル表示

$\vec{x} = \vec{a} + \vec{d_1} t_1 + \vec{d_2} t_2.$

$\vec{n} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ だから $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$ を数ベクトルで表すと

原点を通らない平面の方程式 $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ x_3 - a_3 \end{pmatrix} = 0.$ ◀ 内積

$$n_1(x_1 - a_1) + n_2(x_2 - a_2) + n_3(x_3 - a_3) = 0.$$

$\boxed{\text{問題 4}}$ $$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - (-1) \\ x_3 - 1 \end{pmatrix} = 0$$ が原点を通らないことがわかりやすい形に書き換えてください.

★ 非斉次方程式であることを示す.

$\boxed{解}$　内積を計算すると

$$4(x_1 - 2) + 2\{x_2 - (-1)\} + (-3)(x_3 - 1) = 0$$

となるから

$$4x_1 + 2x_2 + (-3)x_3 = 3$$

と表せます.

$$4x_1 + 2x_2 + (-3)x_3 \neq 0$$

は非斉次方程式だから原点を通らない平面の方程式です.

$\boxed{問題 5}$　この平面の方程式をベクトル表示してください.

★ この方程式を解いて解ベクトルで表す.

★ 未知数は３個あるが, 方程式は１個しかない.

$\boxed{解}$ $x_1 = t_1$, $x_2 = t_2$ (t_1, t_2 は任意の実数)とおくと

$$x_3 = -1 + \frac{4}{3}t_1 + \frac{2}{3}t_2$$

となるから,平面のベクトル表示は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{通る点}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}}_{\text{平面を張る二つのベクトル}} t_2$$

です.

$\boxed{\text{まとめ}}$ 平面のいろいろな表し方

★ 式には表情があり，顔つきによって語りかけるメッセージがちがいます．
つぎのそれぞれの式のつくり方と読み取り方を復習すること．

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - (-1) \\ x_3 - 1 \end{pmatrix} = 0.$$

◀ 内積が 0 だから垂直．

$$4(x_1 - 2) + 2\{x_2 - (-1)\} + (-3)(x_3 - 1) = 0.$$

垂直な方向　　通る点

$$4x_1 + 2x_2 + (-3)x_3 = 3.$$

◀ 定数項が 0 でないから原点を通らない平面．

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} t_2.$$

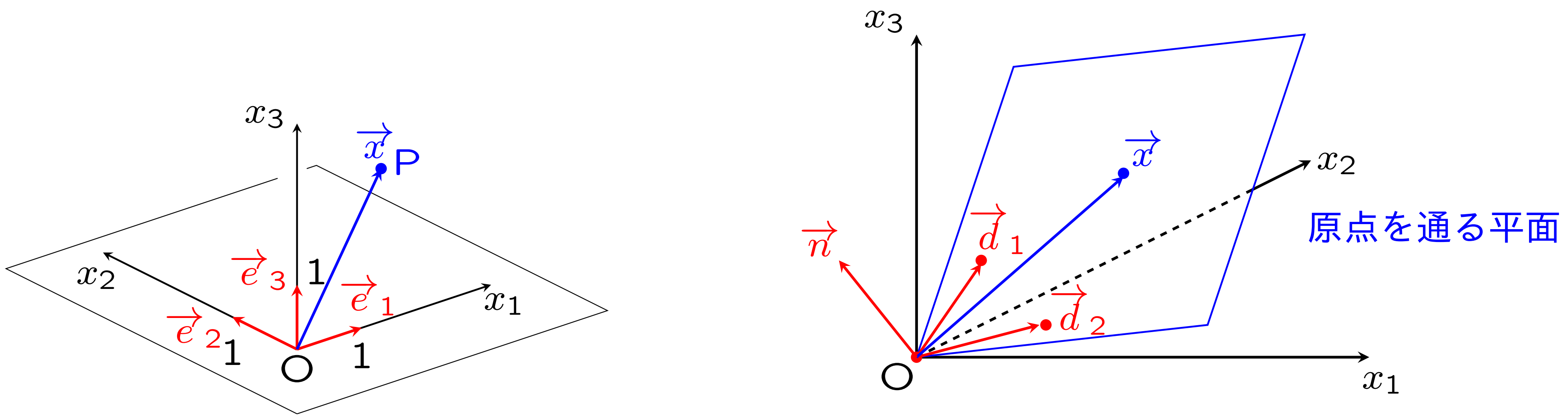
質問　平面内の点は

$$\vec{x} = \vec{d}_1 t_1 + \vec{d}_2 t_2$$

の代わりに

$$\vec{x} = \vec{e}_1 x_1 + \vec{e}_2 x_2 + \vec{e}_3 x_3$$

と表せますか ？



回答　平面内の点も空間内にあるので,

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{e}_1 x_1 + \overrightarrow{e}_2 x_2 + \overrightarrow{e}_3 x_3$$

と表せます.

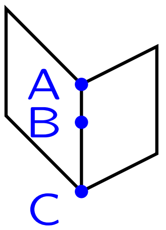
このベクトル表示は,空間内のどんな点も表すので,
この式を見ても,平面内にあるかどうかはわかりません.

特定の３点を通る平面であることを表すために,

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{d}_1 t_1 + \overrightarrow{d}_2 t_2$$

のベクトル表示を使います.

質問　３点を共有する平面も１通りではないのではありませんか ？



回答　この図の３点は同じ直線上にあります．
２点 (たとえばＡとＢ) を通る直線は１通りです．
この直線上に２点以外の点は無数に存在し，それらの中の１点がＣです．
したがって，この図では，２点を共有する平面は１通りではないことを
示しているのと変わりません．この図は

ＡとＢの２点を共有する平面，
ＡとＣの２点を共有する平面，
ＢとＣの２点を共有する平面

は，どれも１通りではないことを表していると考えます．

$\boxed{\text{問題演習}}$

★本書 pp.167 – 174, pp.183 – 185

$\boxed{\text{ねらい}}$

平面のベクトル表示 $\overset{\text{翻訳}}{\longleftrightarrow}$ 平面の方程式

例
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} t_2$$

平面のベクトル表示　通る点　平面の張る方向

$$\begin{cases} x_1 = 1t_1 \\ x_2 = 1t_2 \end{cases}$$

t_1,t_2 はパラメータ(媒介変数). ★ 本書 p.171

x_3 の表式の t_1,t_2 に代入すると,

平面の方程式 $2x_1 + 3x_2 - 1x_3 = 5.$

平面の方程式 $2x_1 + 3x_2 - 1x_3 = 5$

をみたす点(平面内の点)を求めるために3元1次方程式を解くと，解ベクトルは

平面のベクトル表示 $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} t_2$$

です．

$\boxed{\text{次回のための予習}}$

空間内の直線・点の表し方　本書 pp.163 – 185

核と像　本書 pp.335 – 338