数学ターミナル　線型代数の発想

ダイジェスト版　**18**

前回

(1) 空間の表し方 —— 空間内のあらゆる点の位置はどのように表せるか

(2) 平面の表し方 —— 空間内の平面上のあらゆる点の位置はどのように表せるか

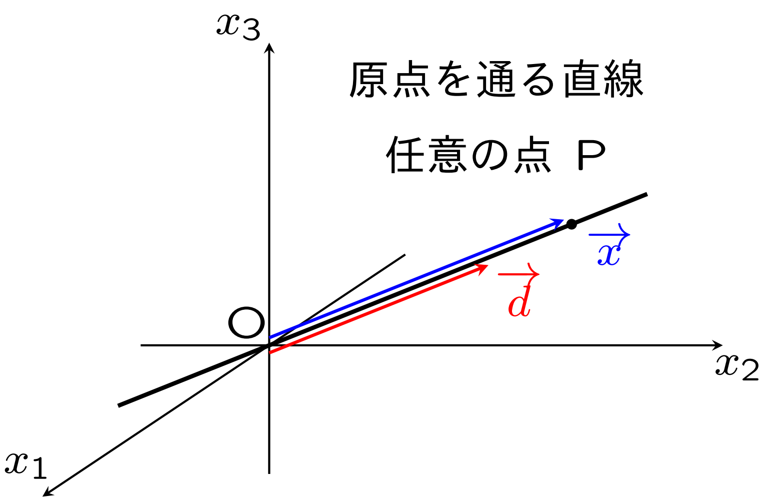
今回

(3) 直線の表し方 —— 空間内の直線上のあらゆる点の位置はどのように表せるか

(4) 点の表し方 —— 空間内の特定の点の位置はどのように表せるか

空間内の直線

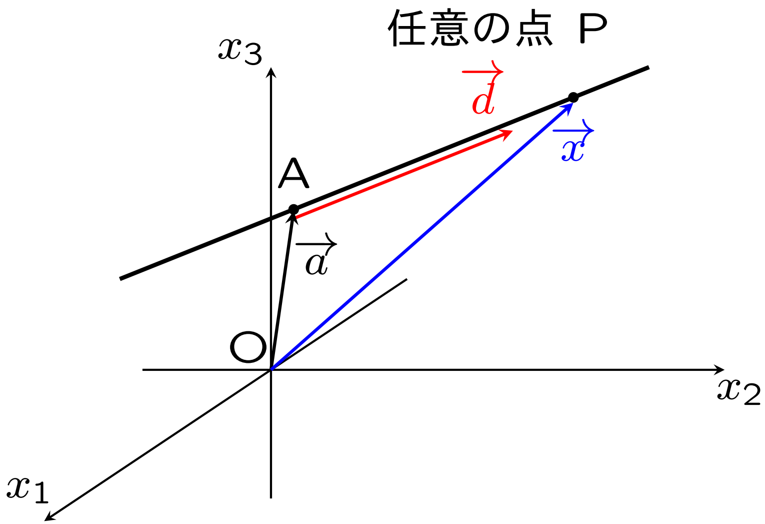
★ 本書 pp.163 – 164



幾何ベクトル $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{d}\,t$
(t は任意の実数).

数ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} t.$

直線のベクトル表示



幾何ベクトル $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{d}\,t$
(t は任意の実数).

数ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} t.$

直線のベクトル表示

直線の方程式

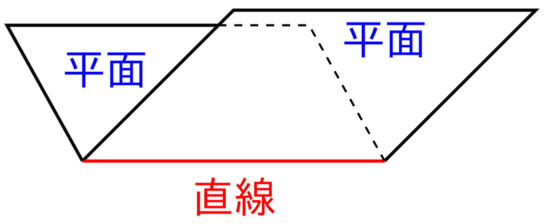
★ 本書 p.176

発想　２平面の交線 $\xrightarrow{\text{翻訳}}$ ３元連立１次方程式の解

直線は３元連立１次方程式で表します.

例
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 7 & \blacktriangleleft \text{ 平面の方程式} \\ -3x_1 + 2x_2 + 1x_3 = -1 & \blacktriangleleft \text{ 平面の方程式} \end{cases}$$

イメージ



紙を折ると, 折り目が直線になります.

直線上に無数の点が存在するから,
解は無数に存在します.

問題１　これらの２平面の交線をベクトル表示してください.

★ 掃き出し法で３元連立１次方程式の解を求めよ.

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 5 & 3 & 7 \\ -3 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(①+②)\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -7 & -4 & -6 \\ \boxed{-3} & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

◀ 2を1に書き換えるには? 丸数字は直前の式の番号.

$$\xrightarrow{②+①\times 3} \begin{pmatrix} 1 & -7 & -4 & -6 \\ 0 & \boxed{-19} & -11 & -19 \end{pmatrix}$$

◀ -3を0に書き換えるには? 丸数字は直前の式の番号.

$$\xrightarrow{②\times\left(-\frac{1}{19}\right)} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{-7} & -4 & -6 \\ 0 & 1 & \frac{11}{19} & 1 \end{pmatrix}$$

◀ -19を1に書き換えるには? 丸数字は直前の式の番号.

$$\xrightarrow{①+②\times 7} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{19} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{11}{19} & 1 \end{pmatrix}$$

◀ -7を0に書き換えるには? 丸数字は直前の式の番号.

順序
$$\begin{matrix} 1 & & 0 \\ \downarrow & & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + \frac{1}{19}x_3 = 1 \\ 0x_1 + 1x_2 + \frac{11}{19}x_3 = 1 \end{cases}$$

◀ 真の姿 ($1, 0, \frac{1}{19}, 1, \ldots$ は「本当はこれらの式」という意味)

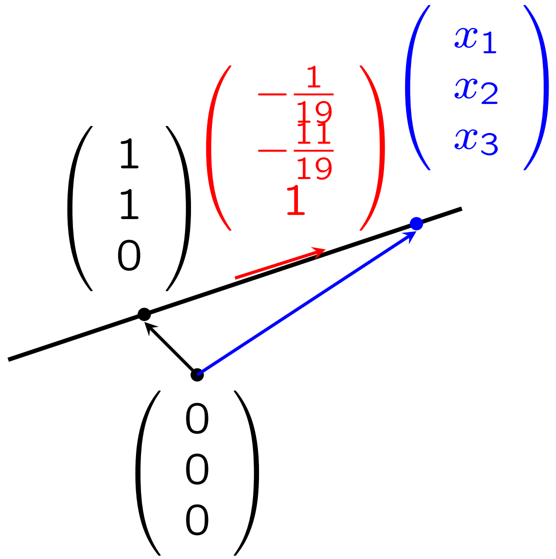
$x_3 = t$ (t は任意の実数) とおくと

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \frac{1}{19}t \\ x_2 = 1 - \frac{11}{19}t \end{cases}$$

だから，ベクトル表示すると

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{19} \\ -\frac{11}{19} \\ 1 \end{pmatrix} t$$

となります．



t の値は，直線上の点の位置によって異なります．

文字の使い方

★ 本書 pp.164 – 165

２平面の交線 $\xrightarrow{\text{翻訳}}$ ３元連立１次方程式の解

直線は３元連立１次方程式で表します.

$$\begin{cases} n_{11}x_1 + n_{12}x_2 + n_{13}x_3 = C_1 & \blacktriangleleft \text{ 平面の方程式} \\ n_{21}x_1 + n_{22}x_2 + n_{23}x_3 = C_2 & \blacktriangleleft \text{ 平面の方程式} \end{cases}$$

n normal（垂直な）

添字 suffix マトリックスの行・列番号

$$\begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & C_1 \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & C_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \text{掃き出し法}$$

問題２ 原点を通る直線と原点を通らない直線は,つぎのどの場合ですか?

C_1	C_2
$= 0$	$= 0$
$= 0$	$\neq 0$
$\neq 0$	$= 0$
$\neq 0$	$\neq 0$

$\boxed{\text{解}}$ ★ 本書 p.165

C_1	C_2	直線（交線）
$= 0$	$= 0$	原点を通る.
$= 0$	$\neq 0$	原点を通らない.
$\neq 0$	$= 0$	原点を通らない.
$\neq 0$	$\neq 0$	原点を通らない.

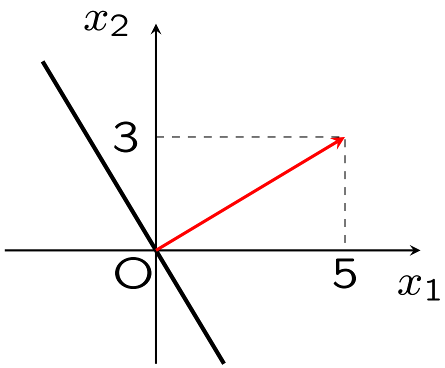
注意「$C_1 = 0$ かつ (and) $C_2 = 0$」(両方とも) 原点を通る平面

「$C_1 \neq 0$ または (or) $C_2 \neq 0$」(どちらか一方ではない) 原点を通らない平面

方程式の読み方

Q1 $5x_1 + 3x_2 = 0$ は「原点を通る直線」と「原点を通る平面」とのどちらを表すのでしょうか？

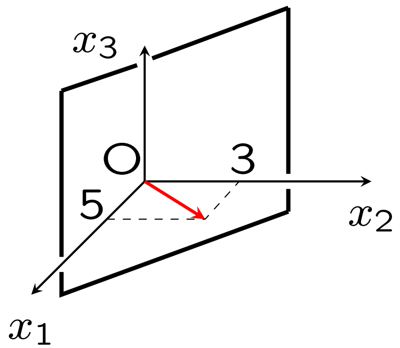
● x_1x_2平面の世界で方程式$5x_1+3x_2=0$を読むとき　★ 本書 p.162[注意2]



$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$で表せる方向に垂直で

原点を通る直線

● $x_1x_2x_3$空間の世界で方程式$5x_1+3x_2=0$を読むとき



$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$で表せる方向に垂直で

原点を通る平面

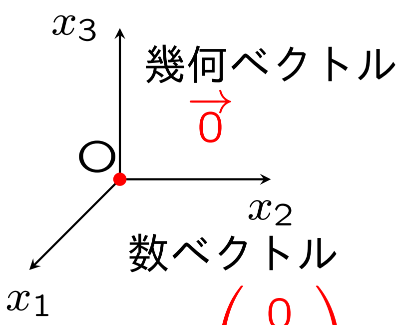
$$5x_1+3x_2+0x_3=0.$$

空間内の点

★ 本書 p.166

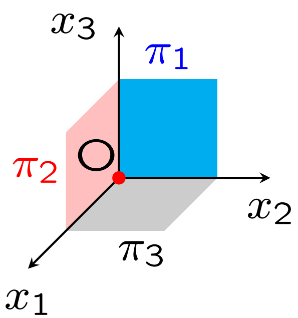
例 原点

点のベクトル表示



$$\mathbb{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

点の方程式

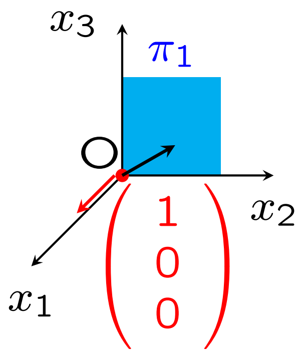


３元連立１次方程式の解

原点を通る３平面の交点

問題３ 平面 π_1, π_2, π_3 の方程式を求めてください．

$\boxed{\text{解}}$



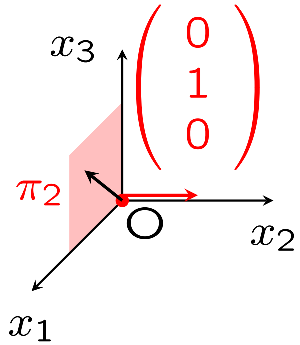
平面 π_1　原点を通り, 数ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で表せる方向に垂直な平面

図を見て

$$\text{内積} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

と書きます.

$$1x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0.$$



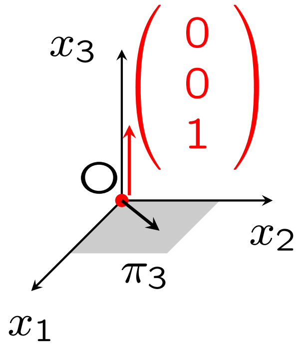
平面 π_2　原点を通り, 数ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で表せる方向に垂直な平面

図を見て

$$\text{内積} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

と書きます.

$$0x_1 + 1x_2 + 0x_3 = 0.$$



平面 π_3　原点を通り，数ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で表せる方向に垂直な平面

図を見て

内積 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$

と書きます．

$$0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 0.$$

原点は３元連立１次方程式

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 0 \end{cases}$$

で表せます．

３平面の交点 $\xrightarrow{\text{翻訳}}$ ３元連立１次方程式の解

点は３元連立１次方程式で表します.

$$\begin{cases} n_{11}x_1 + n_{12}x_2 + n_{13}x_3 = C_1 & \blacktriangleleft \text{ 平面の方程式} \\ n_{21}x_1 + n_{22}x_2 + n_{23}x_3 = C_2 & \blacktriangleleft \text{ 平面の方程式} \\ n_{31}x_1 + n_{32}x_2 + n_{33}x_3 = C_3 & \blacktriangleleft \text{ 平面の方程式} \end{cases}$$

n　normal（垂直な）　　　添字 suffix マトリックスの行・列番号

$$\begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & C_1 \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & C_2 \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} & C_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \text{掃き出し法}$$

問題４　解が原点と原点以外の点である３元連立１次方程式は, つぎのどの場合ですか?

C_1	C_2	C_3	交点
$=0$	$=0$	$=0$	
⋮	⋮	⋮	⋮

★ この表を順序正しく書くこと.

$\boxed{解}$ C_1, C_2, C_3 のそれぞれに $=0$, $\neq 0$ の２通りあります. ★ 本書 p.165

2^3 通りを順序正しく書きます.

C_1	C_2	C_3	交点
$=0$	$=0$	$=0$	原点
$=0$	$=0$	$\neq 0$	原点以外
$=0$	$\neq 0$	$=0$	原点以外
$=0$	$\neq 0$	$\neq 0$	原点以外
$\neq 0$	$=0$	$=0$	原点以外
$\neq 0$	$=0$	$\neq 0$	原点以外
$\neq 0$	$\neq 0$	$=0$	原点以外
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	原点以外

$\boxed{参考}$

真理値表

命題演算

命題 p, q, r

真：T

偽：F

p	q	r
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

第１列：上から $=0$ を４個, $\neq 0$ を４個書く.
第２列：上から $=0$ を２個, $\neq 0$ を２個, $=0$ を２個, $\neq 0$ を２個書く.
第３列：上から $=0$, $\neq 0$ を交互に書く.

$\boxed{\text{発展}}$ 核と像

★ 本書 p.335

写像の観点から連立１次方程式の解の仕組みを理解します.

Why?

ほかの例で写像(関数)と方程式との関係を思い出してみます. ★ 本書 p.v

$$y = x^2 - 5x + 4$$

と

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

とを比べて

$$x^2 - 5x + 4$$

の意味は同じでしょうか **?**

★ ２次関数と２次方程式とのちがい

２次方程式 １個の数値

$$x^2 - 5x + 4 = 0.$$

未知数

２次関数の値 定数関数の値

$$x^2 - 5x + 4 = 0.$$

変数

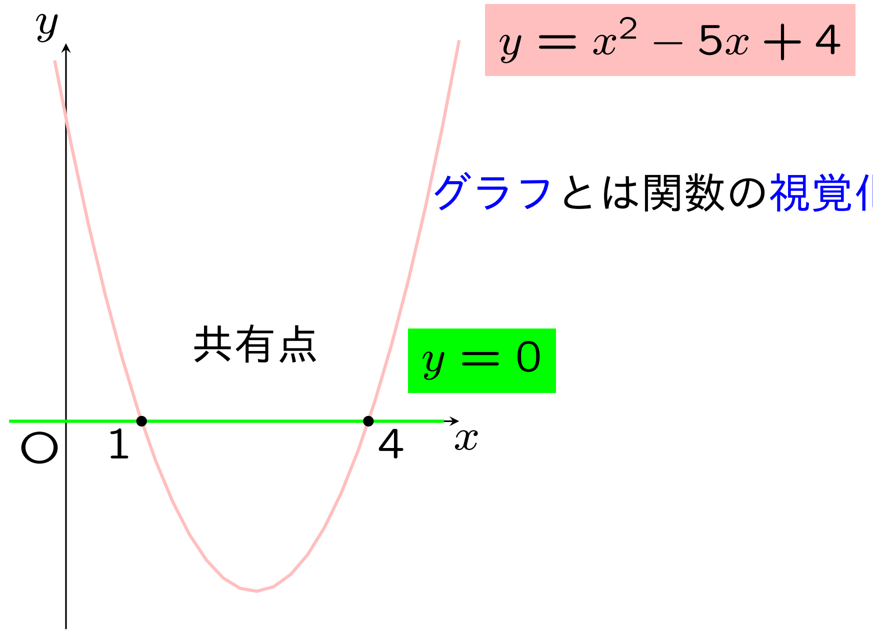
Q2 これらの式を比べて，

２次関数の観点から２次方程式はどのような意味があるでしょうか **？**

変数xはあらゆる値を取り得ますが,
それらの値の中で
$y = x^2 - 5x + 4$ (２次関数の値)
と
$y = 0$ (定数関数の値)
が一致するxの値(数値)を求める
ために,変数xを未知数xとして
２次方程式を解かなければなりません.

このように,写像(関数)の観点から
方程式の意味を理解することができます.

連立１次方程式の解の仕組みを
写像(関数)の観点から理解するためには,
図形の見方が役立ちます.



グラフとは関数の視覚化.

核の意味を考える準備

例
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 0 \end{cases}$$

◀ 斉次方程式
◀ 斉次方程式

問題 5　写像をマトリックスで表して，入力と出力との関係式を求めてください．

★ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \cdots$ のように表す．

$\boxed{解}$ $$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{出力} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{写像} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{入力}.$$

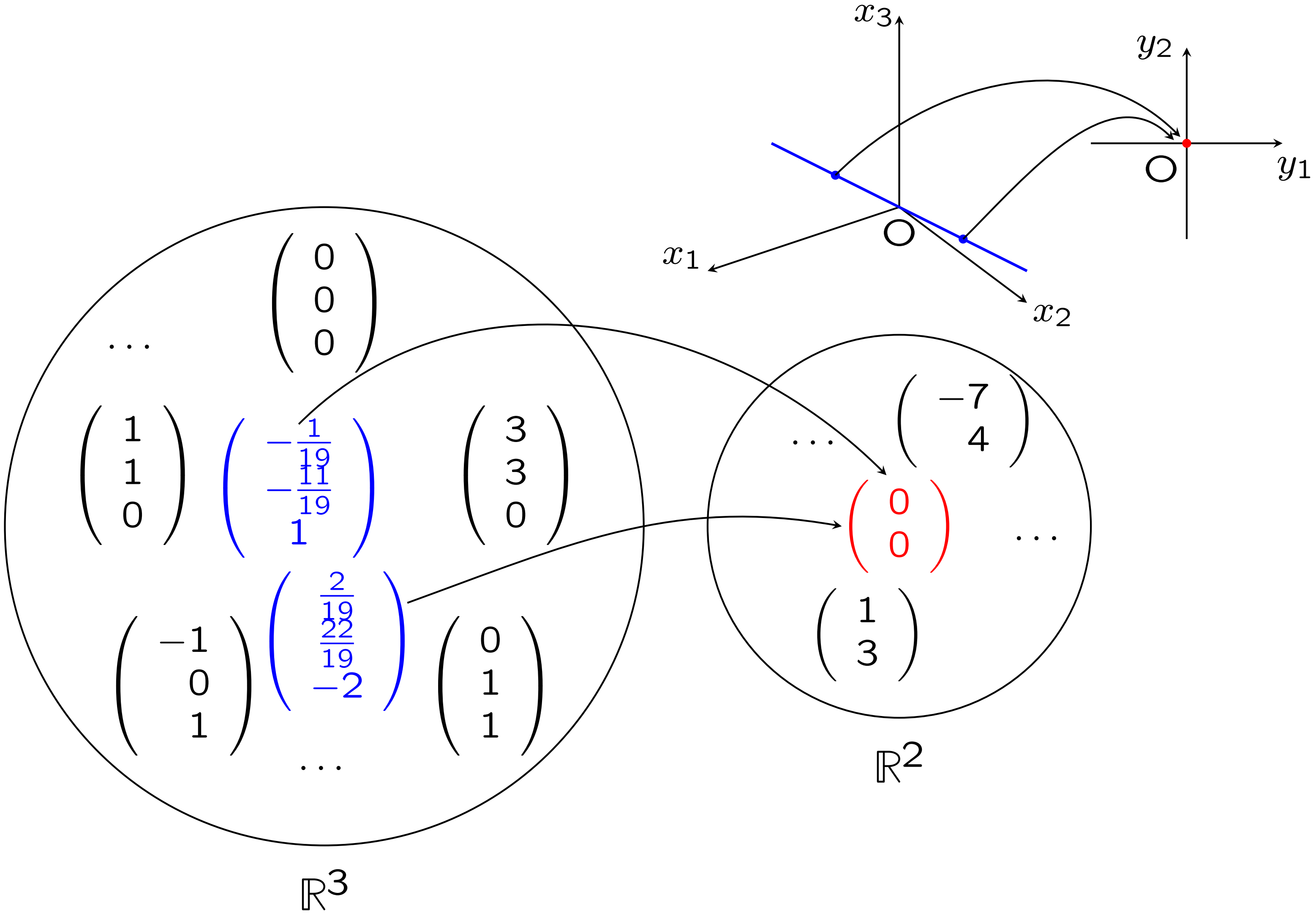
$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^3$ の要素 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ のうち斉次方程式にあてはまる３実数の組 (数ベクトル) は

原点を通る直線 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{19} \\ -\frac{11}{19} \\ 1 \end{pmatrix} t$ 上の点を表す数ベクトルに限られます.

★ ダイジェスト版 **18** p.5 の計算で定数項が１ではなく０の場合を考える.



x_3
y_2
y_1
O
x_1
O
x_2
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
. . .
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -\frac{1}{19} \\ -\frac{11}{19} \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \frac{2}{19} \\ \frac{22}{19} \\ -2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
. . .
$\mathbb{R}^3$
. . .
$\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
. . .
$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}^2$

核

① 方程式の観点：斉次方程式の解集合.

② 写像の観点：出力が零ベクトルになる入力の集合(定義域).

★ 本書 p.336

像の意味を考える準備

係数が同じでも定数項の値によって，
連立１次方程式の解が存在する場合と存在しない場合がある
ことに着目します．

例 $\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$

の解は無数に存在します．

例 $\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$

の解は存在しません．

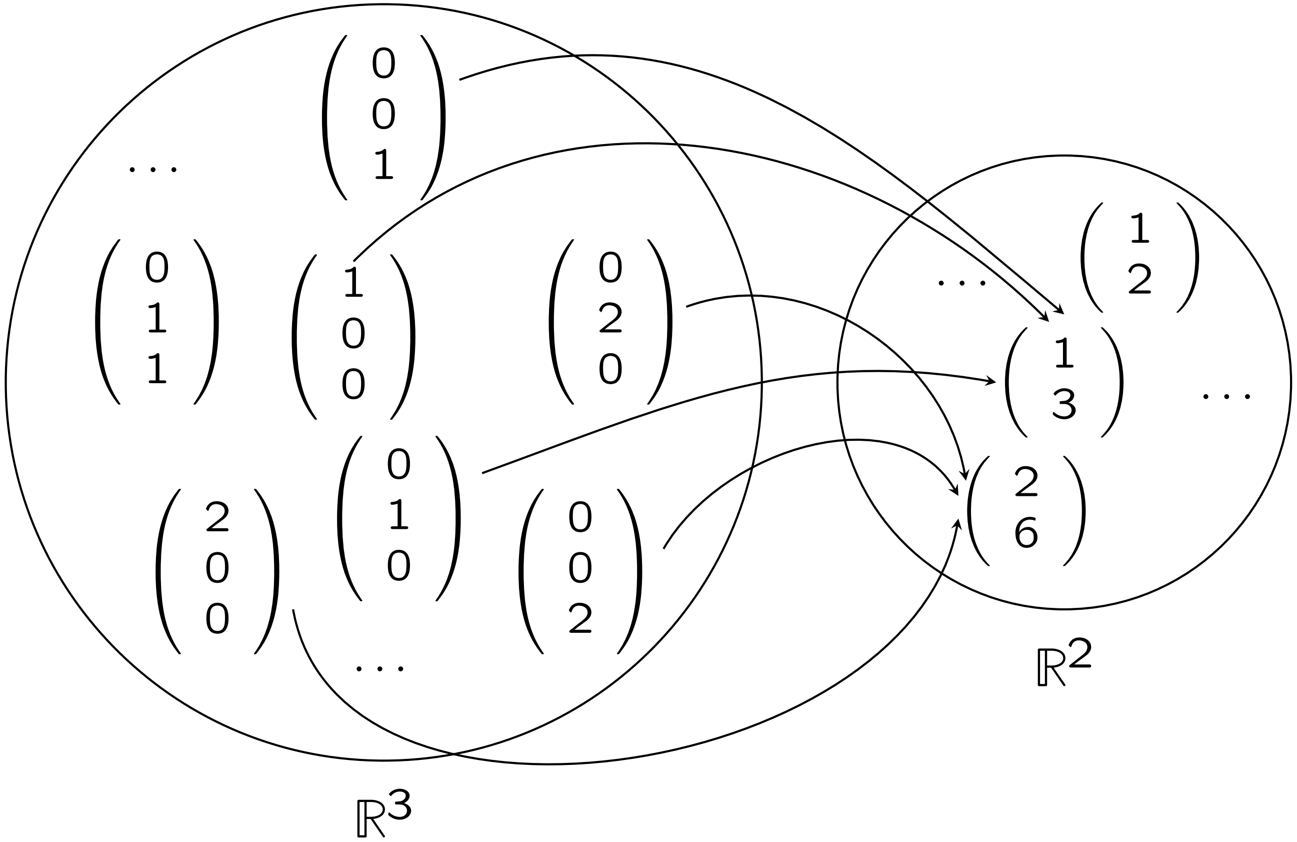
問題６ 写像をマトリックスで表して，入力と出力との関係式を求めてください．

★ 出力は $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \cdots$ とする．

$\boxed{解}$ $$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{出力} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}}_{写像} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{入力}.$$

$\mathbb{R}^2$ の要素 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ のうち定数項になる２実数の組 (数ベクトル) は限られます.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ は定数項になりますが, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は定数項になりません.



$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$に対応する

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$は存在しない.

像

① 方程式の観点：解が存在するような定数項の取り得る数ベクトルの集合.

② 写像の観点：出力の集合(値域).

★ 本書 p.337

Q3　核と像の間には，どのような関係があるのでしょうか ?

$\boxed{\text{問題7}}$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = y_1 \\ -3x_1 + 2x_2 + 1x_3 = y_2 \end{cases}$$

◀ 問題５の例

の解ベクトルを求めてください.

★ ダイジェスト版**18** p.5のマトリックスの第４列を y_1, y_2 におきかえる.

解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{19} \\ \frac{3}{19} \\ 0 \end{pmatrix} y_1 + \begin{pmatrix} -\frac{5}{19} \\ \frac{2}{19} \\ 0 \end{pmatrix} y_2 + \begin{pmatrix} -\frac{1}{19} \\ -\frac{11}{19} \\ 1 \end{pmatrix} t.$$

掃き出し法の過程でわかるように，y_1，y_2 がどんな値でも解は存在します．

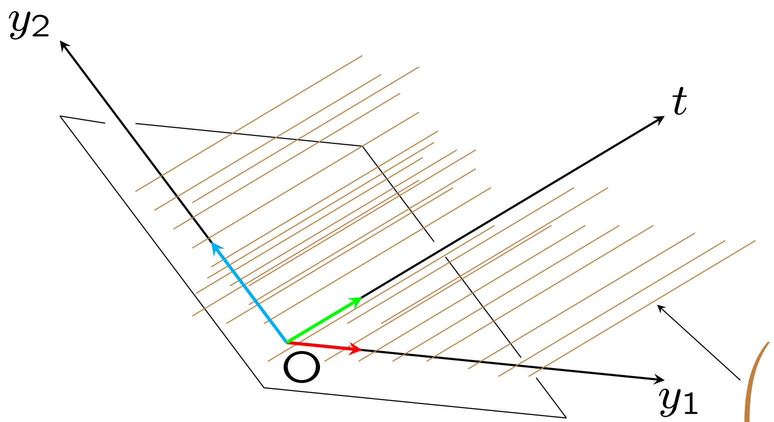
問題8 この解ベクトルの表す図形を読み取ってください．

★ 右辺全体の表す図形，$\begin{pmatrix} \frac{2}{19} \\ \frac{3}{19} \\ 0 \end{pmatrix} y_1 + \begin{pmatrix} -\frac{5}{19} \\ \frac{2}{19} \\ 0 \end{pmatrix} y_2$ の表す図形，$\begin{pmatrix} -\frac{1}{19} \\ -\frac{11}{19} \\ 1 \end{pmatrix} t$ の表す図形．

$\boxed{\text{解}}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{19} \\ \frac{3}{19} \\ 0 \end{pmatrix} y_1 + \begin{pmatrix} -\frac{5}{19} \\ \frac{2}{19} \\ 0 \end{pmatrix} y_2}_{\text{原点を通る平面のベクトル表示}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{19} \\ -\frac{11}{19} \\ 1 \end{pmatrix} t}_{\text{原点を通る直線}}}^{\text{空間のベクトル表示}} .$$

y_1，y_2，t は座標.



$$\begin{pmatrix} \frac{2}{19} \\ \frac{3}{19} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{5}{19} \\ \frac{2}{19} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{19} \\ -\frac{11}{19} \\ 1 \end{pmatrix}$$ の方向の斜交座標軸

平面内の特定の点で y_1，y_2 は特定の値 b_1，b_2 を取るから

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{19} \\ \frac{3}{19} \\ 0 \end{pmatrix} b_1 + \begin{pmatrix} -\frac{5}{19} \\ \frac{2}{19} \\ 0 \end{pmatrix} b_2}_{\text{特定の点のベクトル表示}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{19} \\ -\frac{11}{19} \\ 1 \end{pmatrix} t}_{\text{原点を通る直線}}}^{\text{特定の点を通る直線のベクトル表示}} .$$

平面内の点の y_1，y_2 の値の組は
定数項の値の組.

★ 本書 pp.158 – 164，p.338

$\boxed{\text{幾何の見方}}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{19} \\ \frac{3}{19} \\ 0 \end{pmatrix} b_1 + \begin{pmatrix} -\frac{5}{19} \\ \frac{2}{19} \\ 0 \end{pmatrix} b_2}_{\substack{y_1,y_2\text{が特定の値}b_1,b_2\text{のとき} \\ \text{特定の点のベクトル表示}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{19} \\ -\frac{11}{19} \\ 1 \end{pmatrix} t}_{\text{原点を通る直線}}}^{\text{特定の点を通る直線のベクトル表示}}$$

$\boxed{\text{方程式の見方}}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{19} \\ \frac{3}{19} \\ 0 \end{pmatrix} b_1 + \begin{pmatrix} -\frac{5}{19} \\ \frac{2}{19} \\ 0 \end{pmatrix} b_2}_{\substack{y_1,y_2\text{が特定の値}b_1,b_2\text{のとき} \\ \text{非斉次方程式の特殊解}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{19} \\ -\frac{11}{19} \\ 1 \end{pmatrix} t}_{\text{斉次方程式の一般解}}}^{\text{非斉次方程式の一般解}}$$

像の要素 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ のそれぞれに対して　　核の要素

求まる連立１次方程式の解

次回のための予習

集合と演算との関係　本書 pp.186 – 190

群