数学ターミナル　線型代数の発想

ダイジェスト版　**19**

代数系（代数構造）── 演算規則を決めた集合　　★ 本書 p.186

● 連立１次方程式の解が存在する集合を考えます.

今後, どのような集合が出てくるのでしょうか?

群

体

線型空間（「空間」は演算規則を決めた集合）

ねらい　どの集合でどのような演算を定義すると,
連立１次方程式の解が表せるのかを理解します.

導入

集合と演算との関係

例 1　除法の定義　　　　★ 本書 pp.13 – 14

$$a \div b = \Box$$

とは

$$\Box \times b = a \text{ をみたす数を求める演算}$$

と定義します.

２$\div$３の商は集合 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ に存在しません.

商を表すために, 集合を $\mathbb{Q}$ に拡張します.

$2 \div 3$ の商を

★ ダイジェスト版 **2** p.2

記号
$$\begin{array}{c} 2 \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{c} 2 \longrightarrow \cdot \\ \text{—} \longrightarrow \text{—} \\ 3 \longrightarrow \cdot \end{array}$$
除号

で表すことに決めます．この記号の

定義は「３を掛けて２になる数」

です．

$\boxed{\textbf{問題 1}}$　除法の定義と $\dfrac{4}{3}$, $\dfrac{7}{5}$ の定義にしたがって，

$$\frac{4}{3} \div \frac{7}{5} = \square$$

にあてはまる数を求めてください．

★ 本書 pp.13 – 14

★ 除法 $\dfrac{4}{3} \div \dfrac{7}{5} = \square$ の定義を式で表せ．

$\boxed{解}$　除法

$$\frac{4}{3} \div \frac{7}{5} = \square$$

は

$$\frac{4}{3} = \square \times \frac{7}{5}$$

をみたす数を求める演算です. $\dfrac{7}{5}$ は「5を掛けると7になる数」だから, 両辺に5を掛けると

$$\frac{4}{3} \times 5 = \square \times \underbrace{\frac{7}{5} \times 5}_{7}$$

となります.

$\frac{1}{7}$ は「7 を掛けると 1 になる数」だから，両辺に $\frac{1}{7}$ を掛けると

$$\frac{4}{3} \times 5 \times \frac{1}{7} = \square \times \underbrace{7 \times \frac{1}{7}}_{1}$$

となります．

$$\square \times 1 = \square$$

だから

$$\square = \frac{4}{3} \times \frac{5}{7}$$

です．

重要　$\square$ にあてはまる数は有理数の集合に属します．

$$\square \in \mathbb{Q}.$$

例２　３元連立１次方程式の解ベクトル　　★ 本書 p.187

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

問題２　掃き出し法で解を求めてください.

★ 解のベクトル表示 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \cdots$ を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{②+①\times(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

◀ 2を0に書き換えるには?
丸数字は直前の式の番号.

実質的な方程式は

$$1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

だけだから, $x_2 = t_1$, $x_3 = t_2$ (t_1, t_2は任意の実数)とおくと

$$x_1 = -2t_1 - 3t_2$$

です. 解ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t_2$$

と表せます.

Q1 解ベクトルは, どの集合でどのような演算を定義しないと表せないでしょうか?

演算 数ベクトルの加法

$$
\begin{array}{rccccccc}
 & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & t_1 & + & \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & t_2 \\
 & & & & \rotatebox{90}{$\in$} & & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
 & & & & \mathbb{R} & & & \mathbb{R} \\
 & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & & \rotatebox{90}{$\in$} & \\
\text{集合} & \mathbb{R}^3 & & \mathbb{R}^3 & & & \mathbb{R}^3 &
\end{array}
$$

演算 数ベクトルのスカラー倍

解ベクトルを求めることができるのは

集合 $\mathbb{R}^3$ で数ベクトルの加法,

集合 $\mathbb{R}^3$ の要素に倍率として集合 $\mathbb{R}$ の要素を掛ける

という演算を定義しているからです.

例１, **例２** によって

どの集合で

どのような演算を定義するか

を決めないと解を表せないことがわかりました.

この考え方を理解するために,

群, 体, 線型空間

という集合を取り上げます.

群 group

★ 本書 p.188

基本の考え方 —— どのような性質をもつ集合か

① 自由に演算できる(集合の中で解が求まる).

② 逆演算できる(検算と考えるといい).

例 集合 $\mathbb{Z}$, 演算 加法

について①, ②を調べてみます.

① $\underset{\mathbb{Z}}{\underset{\cap}{(-2)}} + \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\cap}{5}} = \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\cap}{3}}$ など.

集合 $\mathbb{Z}$ は「加法について閉じている」といいます.

② ３から -2 に戻るには?

加法という演算を考えているので, 減法を混在してはいけません.

$$(-2)+5=3$$

の左辺を -2 にするために, 両辺に -5 を足します.

$$(-2)+5+(-5)=\boxed{3}+(-5).$$

等号で結んでいますが, 左辺と右辺とでは式の見方がちがいます.

Q2 左辺と右辺とで, 式の見方がどのようにちがうのでしょうか?

左辺では,

$$(-2)+\underbrace{5+(-5)}_{0},$$

右辺では

$$\underbrace{(-2)+5}_{3}+(-5)$$

と見ています．どちらの見方で計算しても -2 となって一致するように

$$\text{結合法則}\ (-2)+\{5+(-5)\}=\{(-2)+5\}+(-5)$$

が成り立つと決めました．

検算（逆演算）するとき，この演算規則を使っていることに注意します．

Q3 結合法則を決めるだけで検算できると考えていいでしょうか?

★ 集合 $\mathbb{Z}$ にどんな数がないと逆演算できないかを考えよ．

- 集合 $\mathbb{Z}$ の要素 a に対して，逆元 $-a$ が存在し，
- 集合 $\mathbb{Z}$ に単位元 0 が存在する

から逆演算できます．

例 5 の逆元 -5　　単位元 0

集合 $\mathbb{Z}$ に -5 と 0 がないと，

$$(-2)+5=3$$

から

$$-2=3+(-5)$$

に戻れません．

群とは　　　　★ 詳細は本書 p.187参照.

集合 G で演算 $\circ$ を定義して,

$$\boxed{\text{四つの性質}}\begin{cases}\text{(i) 閉じている}\\ \text{(ii) 結合法則}\\ \text{(iii) 単位元の存在}\\ \text{(iv) 逆元の存在}\end{cases}$$

が成り立つとき

「集合 G は演算 $\circ$ について群をつくっている」

といいます.

例 集合 $\mathbb{Z}$ は加法という演算について群をつくっています.

記号　集合 G（group の頭文字）　具体的には $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ など.

演算 $\circ$ 具体的には $+$, $\times$ など.

集合が演算について群をつくっている例とそうでない例

$\boxed{\textbf{問題3}}$ 集合 $\mathbb{Z}$ は減法という演算について群をつくっているかどうかを調べてください．

★ 四つの性質が成り立つかどうかを確かめよ．

★ 30秒間 考えてわからなかったら，本書 p.189 を見よ．

$\boxed{\text{解}}$

(i) 整数 − 整数 ＝ 整数 だから
　集合 $\mathbb{Z}$ は減法という演算について閉じている.

(ii) $a-(b-c) \neq (a-b)-c$
だから結合法則は成り立たない.

例 $2-(3-5) \neq (2-3)-5$.

集合 $\mathbb{Z}$ は減法という演算について群をつくりません.

イメージ　(i) １次試験 合格　(ii) ２次試験 不合格

$\boxed{\text{自習}}$ ★ 本書 p.205 14.1

次回のための予習

加法・乗法以外の演算　本書 pp.206 – 207

体　本書 p.190