数学ターミナル　線型代数の発想

ダイジェスト版　２

ねらい　線型代数の骨組

① 数と量の概念のちがい

② 旧法則保存の原理とは

③ 類別と対応 —— 加法と減法が成り立つのはどんな場合か

④ 関数の概念 —— 線型代数の基本

★ 本書0.2節

① 数と量の概念のちがい

★ 本書 pp.6 – 10

（前回の復習：pp. は pages の略号）

Q1　数と量を英語でいえますか**?**

日本語では「数量」ということがあり，数と量とを混同しがちですが，
英単語はまったくちがいます．

これらの概念が異なることがわかるでしょう．

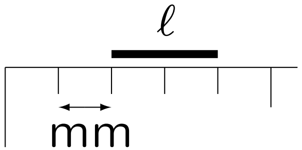
★ 本書の索引または英和辞典で調べてから，つぎのページを見よ．

数 number　　**量** quantity

物差を使って，量（ここでは，長さ）を数で表す方法を考えます．

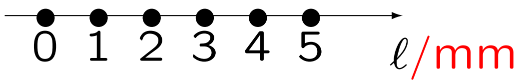
$$\boxed{\text{量} = (\text{何倍かを表す数}) \times \text{単位}}$$

ふつうの物差



長さ ℓ は単位長さ mm の２倍だから $\ell = 2 \times \mathrm{mm}$.

数値と文字との掛算だから，乗号 $\times$ を省いて $\ell = 2\ \mathrm{mm}$ と書く．

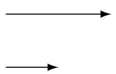


グラフの軸は数直線，目盛は数を表す．

例　$\ell = 3 \times \mathrm{mm}$ のとき $3 = \ell \div \mathrm{mm}$.

軸の読み方　$\ell/\mathrm{mm} = 5$ のとき $\ell = 5\ \mathrm{mm}$.

数　１対１対応　点（直線は点の集まりだから，実数全体の集合を表す図形）★本書 p.7, p.10



$\vec{a} = 2\vec{i}$ は $\ell = 2\ \mathrm{mm}$ と同じ表し方だから線型代数の基本になる．

$\vec{a}$

$\vec{i}$（単位ベクトル）

② 旧法則保存の原理

高校数学では習わない用語ですが，数学の基礎として，すでに中学以来，
意識していないだけで学んだはずです．

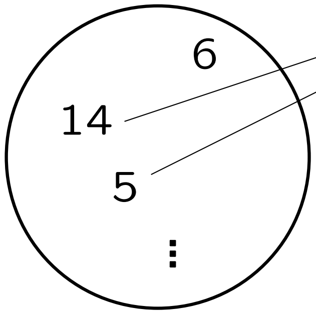
Q2「(正の数)×(負の数) はなぜ負の数なのか」という問いにどのように
答えますか?

★ ３分間 考えてわからなかったら，本書 pp.11 – 12 を見よ．

この問いに答えるためには，

「演算とは何か」

という問題から理解する必要があります．



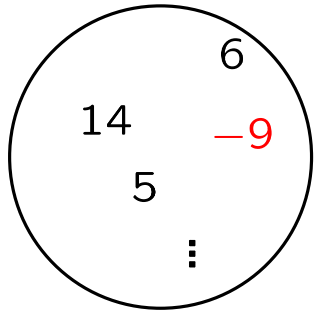
自然数の集合

同じ集合から２個の数を選び，
減法という演算で一つの数をつくる．

$5-14$ で決まる数は同じ集合の中にない．

どうする?

負の数をつくって集合を拡張する．



整数の集合

負の数という新しい仲間が増えたとき，数学は前例と合うように
正の数だけで成り立った演算規則を維持します．

この発想を旧法則保存の原理といいます．　★ 本書 pp.11 − 12

(正の数)×(負の数) とどのような関係があるのでしょうか?

★ 本書 p.12

$$
\begin{array}{ccccc}
3 & \times & 2 & = & 6 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
3 & \times & 1 & = & 3 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
3 & \times & 0 & = & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
\hline
3 & \times & (-1) & = & ?
\end{array}
$$

ここで，旧法則とは何でしょう?

掛ける数を１だけ小さくすると
積は３だけ小さくなる．

３に -1 を掛けるとき，積をどんな数と決めると
正の数の乗法の規則に合うかを考えます．

$? = -3$ と約束する．

Q3 「$5 \div 6 = \dfrac{5}{6}$ をどのように説明するのか」という問いに答えることができますか**?**

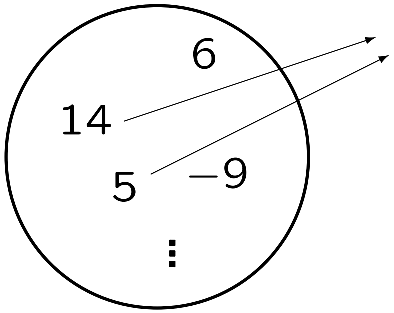
★ 「5 m のテープを 6 等分した長さ」などは $5 \div 6 = \dfrac{5}{6}$ を使う例であって**,** 分数の定義ではない**.**

★ 3分間 考えてわからなかったら**,** 本書 pp.13 – 14 を見よ**.**

この問いに答えるためには，

「除法とは何か」

という問題から理解する必要があります．



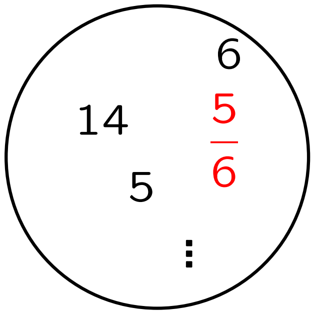
整数の集合

同じ集合から**2**個の数を選び，
除法という演算で一つの数をつくる．

$5 \div 6$ で決まる数は同じ集合の中にない．

どうする?

有理数をつくって集合を拡張する．



有理数の集合

有理数という新しい仲間が増えたとき，数学は前例と合うように

整数だけで決めた除法の定義を維持します．

$6 \div 3 = \square$ とは $\square \times 3 = 6$ をみたす数を求める演算．

$5 \div 6 = \square$ では $\square \times 6 = 5$ をみたす数を記号 $\dfrac{5}{6}$ で表すと決める．

★ 本書 pp.13 – 14

$\boxed{\text{自習}}$　除法の定義と $\dfrac{2}{3}$ の定義「3を掛けて2になる数」などを使って

$$\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5}$$

を説明せよ.

★ 本書 pp.13 – 14

Q4　有理数と分数の意味のちがいはいえるでしょうか **?**

同じ有理数

二分の一　$\frac{1}{2}$　0.5　one half

日本語　分数　小数　英語

表現 (表し方) のちがい

★ 本書 p.15

数の集合を表す記号

$\boldsymbol{N}$　自然数の集合 (natural numbers)
$\boldsymbol{Z}$　整数の集合 (ドイツ語 Zahlen)
$\boldsymbol{Q}$　有理数の集合 (商 quotient)
$\boldsymbol{R}$　実数の集合 (real numbers)

手書きの場合，太文字 (ボールド体) は $\boldsymbol{N}$ の代わりに $\mathbb{N}$ のように書きます.

★ 本書 p.27 注釈欄，p.19

★ $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ の書き方を練習してください.

これらの記号は大学数学の基本なので，
正しく読んだり書いたりすることが重要です.

③ 類別と対応

Q5　「リンゴ5個 − ミカン2個 ＝ 3個」という減法は正しいでしょうか?

★ 2分間 考えてわからなかったら, 本書 p.18 を見よ.

「計算できる」は「概念がわかる」とちがいます.

この問いに答えるためには，「数えるとは何か」という問題から理解する必要があります．

ステップ１　リンゴ５個の集合とミカン２個の集合に類別する．

ステップ２　リンゴ５個の集合と自然数の集合との間で要素どうしを１対１対応させる．

ミカン２個の集合と自然数の集合との間で要素どうしを１対１対応させる．

リンゴ	｛	○，	○，	○，	○，	○	｝		
		｜	｜	｜	｜	｜		５個と判断．	
自然数	｛	１，	２，	３，	４，	５，	６，	...	｝

「数える」とは「自然数の集合の要素と１対１対応させて番号付けする操作」

リンゴ５個とミカン２個とを比べるとき

リンゴ５個の集合とミカン２個の集合との間で要素どうしを
１対１対応させる．

リンゴ　{　○，　○，　○，　○，　○　}

ミカン　{　△，　△　}

リンゴの集合にミカンは入っていないから，
リンゴの集合 $\{\bigcirc, \bigcirc, \ldots\}$ からミカン△を引くことはできません．

○　○　○　○　○　−　○　○　＝　○　○　○

（ミカンに対応するリンゴの個数）　　（ミカンに対応しないリンゴの個数）

減法はリンゴどうしの間で成り立つ．

今後の展望　線型代数では，つぎのようなベクトル量（量の組）を考えるとき，類別の概念が基礎になります．

$$\begin{array}{c} \\ \text{男} \\ \text{女} \end{array} \begin{array}{c} \text{情報} \\ \begin{pmatrix} 5\text{人} \\ 2\text{人} \end{pmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} \text{共生} \\ \begin{pmatrix} 3\text{人} \\ 7\text{人} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} 8\text{人} \\ 9\text{人} \end{pmatrix} \end{array}$$

男女別に合計人数を計算する．

★ 本書 p.25

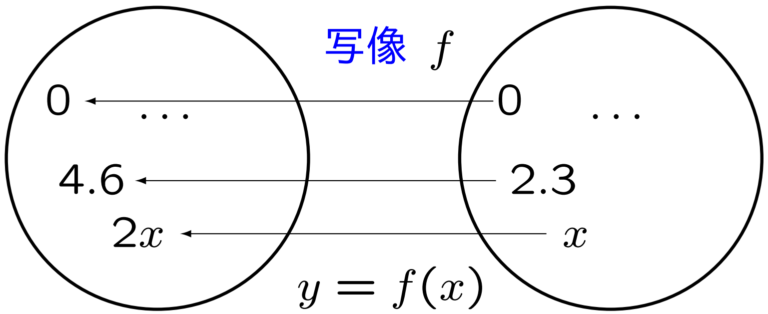
④ 関数の概念

ねらい　対応の規則　★ 本書 p.19 例題 0.17　③ 類別と対応も復習.

写像　一方の集合の要素 から 他方の集合の要素 に

1 対 1 または 多対 1 に対応させる規則

値域（出力の集合 Y）　定義域（入力の集合 X）



出力　入力

この例では，$y = 2x$.

- 文字の使い方

大文字：集合の名称

小文字：要素

- 記号

$f : X \to Y$

$f : x \mapsto y$

★ 本書 p.20

数の集合を考えるとき，写像(像を写す)を関数ということが多い．

★ 本書 p.20

関数 $f(\quad)$「入力を２倍するはたらき（function)」

関数値 $2x \longleftarrow \boxed{} \longleftarrow x$

Black box (暗箱)

$f(\quad)$は暗箱のはたらきと同じ．　　★ 本書 p.21

例　関数（対応の規則）　$f(\quad)$ を $2(\quad)$ と表す．

関数値（出力の値）　$f(x)$ を $2(x)$ と表す．$(\quad)$ を省くことが多い．

意味：「$f(\quad)$ に x を入力すると $2x$ を出力する」

$\boxed{\text{次回のための予習}}$

線型性の意味　本書 pp.22 – 23

ベクトルとベクトル量　本書 pp.25 – 29