数学ターミナル　線型代数の発想

ダイジェスト版　２

ねらい 線型代数の骨組

① 数と量の概念のちがい

② 旧法則保存の原理とは

③ 類別と対応 —— 加法と減法が成り立つのはどんな場合か

④ 関数の概念 —— 線型代数の基本

★ 本書0.2節

① 数と量の概念のちがい

★ 本書 pp.6 – 10

（前回の復習：pp. は pages の略号）

Q1　数と量を英語でいえますか?

日本語では「数量」ということがあり，数と量とを混同しがちですが，
英単語はまったくちがいます.

これらの概念が異なることがわかるでしょう.

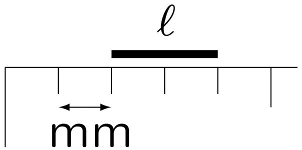
★ 本書の索引または英和辞典で調べてから，つぎのページを見よ.

数 number　　量 quantity

物差を使って，量（ここでは，長さ）を数で表す方法を考えます．

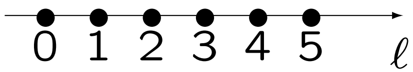
$$\boxed{量 = (何倍かを表す数) \times 単位}$$

ふつうの物差



長さℓ は単位長さ mm の２倍だから $\ell = 2 \times \mathrm{mm}$.

数値と文字との掛算だから，乗号 $\times$ を省いて$\ell = 2\ \mathrm{mm}$と書く．



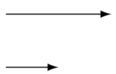
グラフの軸は数直線，目盛は数を表す．

例　$\ell = 3 \times \mathrm{mm}$ のとき $3 = \ell \div \mathrm{mm}$.

軸の読み方　$\ell/\mathrm{mm} = 5$ のとき$\ell = 5\ \mathrm{mm}$.

$\boxed{数\ \ 1対1対応\ \ 点}$（直線は点の集まりだから，実数全体の集合を表す図形）★本書 p.7，p.10

$\vec{a} = 2\vec{i}$ は $\ell = 2\ \mathrm{mm}$ と同じ表し方だから線型代数の基本になる．



$\vec{a}$

$\vec{i}$（単位ベクトル）

② 旧法則保存の原理

高校数学では習わない用語ですが，数学の基礎として，すでに中学以来，
意識していないだけで学んだはずです．

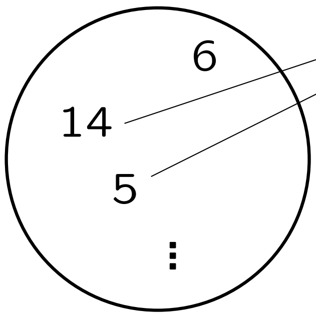
Q2「(正の数)×(負の数) はなぜ負の数なのか」という問いにどのように
答えますか**?**

★ ３分間 考えてわからなかったら，本書 pp.11 – 12 を見よ．

この問いに答えるためには，

「演算とは何か」

という問題から理解する必要があります．



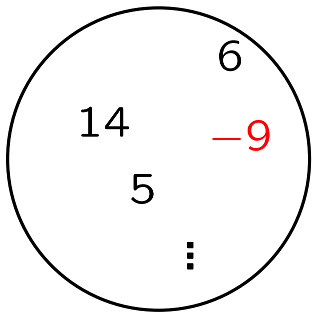
自然数の集合

同じ集合から２個の数を選び，
減法という演算で一つの数をつくる．

$5-14$ で決まる数は同じ集合の中にない．

どうする?

負の数をつくって集合を拡張する．



整数の集合

負の数という新しい仲間が増えたとき，数学は前例と合うように正の数だけで成り立った演算規則を維持します．

この発想を旧法則保存の原理といいます．

★ 本書 pp.11 – 12

(正の数)×(負の数) とどのような関係があるのでしょうか?

★ 本書 p.12

$$
\begin{array}{ccccc}
3 & \times & 2 & = & 6 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
3 & \times & 1 & = & 3 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
3 & \times & 0 & = & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
\hline
3 & \times & (-1) & = & ?
\end{array}
$$

ここで，旧法則とは何でしょう？

掛ける数を１だけ小さくすると
積は３だけ小さくなる．

３に -1 を掛けるとき，積をどんな数と決めると
正の数の乗法の規則に合うかを考えます．

$? = -3$ と約束する．

Q3　「$5 \div 6 = \dfrac{5}{6}$ をどのように説明するのか」という問いに答えることができますか**?**

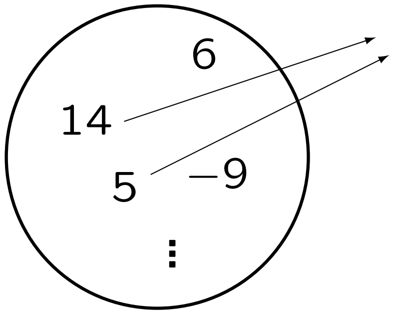
★ 「5 m のテープを 6 等分した長さ」などは $5 \div 6 = \dfrac{5}{6}$ を使う例であって，分数の定義ではない．

★ 3分間 考えてわからなかったら，本書 pp.13 – 14 を見よ．

この問いに答えるためには,

「除法とは何か」

という問題から理解する必要があります.



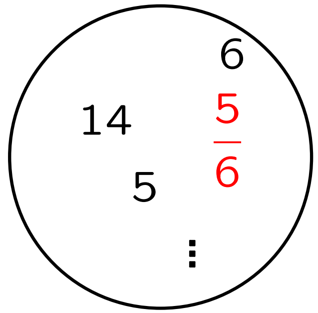
整数の集合

同じ集合から2個の数を選び,
除法という演算で一つの数をつくる.

$5 \div 6$ で決まる数は同じ集合の中にない.

どうする?

有理数をつくって集合を拡張する.



有理数の集合

有理数という新しい仲間が増えたとき,数学は前例と合うように
整数だけで決めた除法の定義を維持します.

$6 \div 3 = \square$ とは $\square \times 3 = 6$ をみたす数を求める演算.

$5 \div 6 = \square$ では $\square \times 6 = 5$ をみたす数を記号 $\dfrac{5}{6}$ で表すと決める.

★ 本書 pp.13 − 14

$\boxed{\text{自習}}$　除法の定義と $\dfrac{2}{3}$ の定義「3を掛けて2になる数」などを使って

$$\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5}$$

を説明せよ.

★ 本書 pp.13 – 14

Q4　有理数と分数の意味のちがいはいえるでしょうか **?**

同じ有理数

二分の一　$\frac{1}{2}$　0.5　one half

日本語　分数　小数　英語

表現 (表し方) のちがい

★ 本書 p.15

数の集合を表す記号

$\boldsymbol{N}$　自然数の集合 (natural numbers)
$\boldsymbol{Z}$　整数の集合（ドイツ語 Zahlen)
$\boldsymbol{Q}$　有理数の集合（商 quatient)
$\boldsymbol{R}$　実数の集合 (real numbers)

手書きの場合，太文字（ボールド体）は $\boldsymbol{N}$ の代わりに $\mathbb{N}$ のように書きます．

★ 本書 p.27 注釈欄，p.19

★ $\mathbb{Z}$，$\mathbb{Q}$，$\mathbb{R}$ の書き方を練習してください．

これらの記号は大学数学の基本なので，
正しく読んだり書いたりすることが重要です．

③ 類別と対応

Q5　「リンゴ５個 − ミカン２個 ＝ ３個」という減法は正しいでしょうか**?**

★ ２分間 考えてわからなかったら，本書 p.18 を見よ．

「計算できる」は「概念がわかる」とちがいます．

この問いに答えるためには，「数えるとは何か」という問題から理解する必要があります．

ステップ１　リンゴ５個の集合とミカン２個の集合に類別する．

ステップ２　リンゴ５個の集合と自然数の集合との間で要素どうしを１対１対応させる．

ミカン２個の集合と自然数の集合との間で要素どうしを１対１対応させる．

$$
\begin{array}{lllllllll}
\text{リンゴ} & \{ & \bigcirc, & \bigcirc, & \bigcirc, & \bigcirc, & \bigcirc & & \} \\
 & & | & | & | & | & | & & \text{５個と判断．} \\
\text{自然数} & \{ & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \ldots \quad \}
\end{array}
$$

「数える」とは「自然数の集合の要素と１対１対応させて番号付けする操作」

リンゴ５個とミカン２個とを比べるとき

リンゴ５個の集合とミカン２個の集合との間で要素どうしを
１対１対応させる．

リンゴ $\{\ \bigcirc,\ \bigcirc,\ \bigcirc,\ \bigcirc,\ \bigcirc\ \}$

ミカン $\{\ \triangle,\ \triangle\ \}$

リンゴの集合にミカンは入っていないから，
リンゴの集合 $\{\bigcirc, \bigcirc, \ldots\}$ からミカン△を引くことはできません．

$\bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ -\ \bigcirc\ \bigcirc\ =\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc$

（ミカンに対応するリンゴの個数）　（ミカンに対応しないリンゴの個数）

減法はリンゴどうしの間で成り立つ．

$\boxed{\text{今後の展望}}$　線型代数では，つぎのようなベクトル量（量の組）を考えるとき，類別の概念が基礎になります．

$$\begin{array}{cccc} & \text{情報} & & \text{共生} \\ \begin{array}{c}\text{男}\\ \text{女}\end{array} & \begin{pmatrix} 5\text{人} \\ 2\text{人} \end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix} 3\text{人} \\ 7\text{人} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\text{人} \\ 9\text{人} \end{pmatrix} \end{array}$$

男女別に合計人数を計算する．

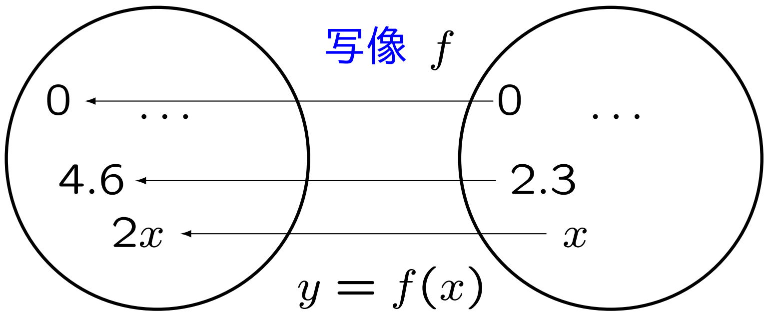
★ 本書 p.25

④ 関数の概念

ねらい　対応の規則　★ 本書 p.19 例題 0.17　③ 類別と対応も復習.

写像　一方の集合の要素 から 他方の集合の要素 に
1 対 1 または 多対 1 に対応させる規則

値域（出力の集合 Y）　定義域（入力の集合 X）



出力　入力

この例では，$y = 2x$.

- 文字の使い方

大文字：集合の名称

小文字：要素

- 記号

$f : X \to Y$

$f : x \mapsto y$

★ 本書 p.20

数の集合を考えるとき，写像(像を写す)を関数ということが多い．

★ 本書 p.20

関数 $f(\quad)$「入力を２倍するはたらき（function)」

関数値 $2x \longleftarrow \boxed{\qquad\qquad} \longleftarrow x$

Black box (暗箱)

$f(\quad)$は暗箱のはたらきと同じ．

★ 本書 p.21

例 関数（対応の規則） $f(\quad)$ を $2(\quad)$ と表す．

関数値（出力の値） $f(x)$ を $2(x)$ と表す．$(\quad)$ を省くことが多い．

意味：「$f(\quad)$ に x を入力すると $2x$ を出力する」

$\boxed{\text{次回のための予習}}$

線型性の意味　本書pp.22 – 23

ベクトルとベクトル量　本書pp.25 – 29