数学ターミナル　線型代数の発想

ダイジェスト版　**20**

前回の復習　群の四つの性質をみたす集合

今回　加法・乗法以外の演算

数学では,

数の集合と演算で考えた概念を

数以外の集合と演算に拡張して

発展します.

例 1　関数の集合　$\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$　★ 本書 p.206

関数 $f_5(\quad)$「1 から入力を引くはたらき (function)」

$$\text{関数値 } 1-x \longleftarrow \boxed{\qquad\qquad} \longleftarrow x$$

Black box（暗箱）

$f_5(\quad)$ は暗箱のはたらきと同じ．　★ 本書 p.21

関数（対応の規則）$f_5(\quad)$ を $1-(\quad)$，関数値 $f_5(x)$ を $1-(x)$ と表す．

$1-(x)$ の $(\quad)$ を省いてもいい．

関数 $f_2(\quad)$「1 から入力を引いて逆数を求めるはたらき (function)」

$$\text{関数値 } \frac{1}{1-x} \longleftarrow \boxed{\qquad\qquad} \longleftarrow x$$

Black box（暗箱）

関数（対応の規則）$f_2(\quad)$ を $\dfrac{1}{1-(\quad)}$，関数値 $f_2(x)$ を $\dfrac{1}{1-(x)}$ と表す．

関数の演算 $(f_2 \circ f_5)(\quad)$ の意味

$$
\begin{aligned}
(f_2 \circ f_5)(x) &\overset{\text{定義}}{=} f_2(f_5(x)) \\
&= f_2(1 - x) \\
&= \cdots
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{問題}\,\mathbf{1}}$ あとを続けてください.

$\boxed{\text{解}}$ ★ f_1，f_2，f_3，f_4，f_5，f_6 の定義は本書 p.206 のとおり．

$$
\begin{aligned}
(f_2 \circ f_5)(x) &\overset{\text{定義}}{=} f_2(f_5(x)) \\
&= f_2(1-x) \\
&= \frac{1}{1-(1-x)} \\
&= \frac{1}{(x)} \qquad \blacktriangleleft \ (\ \ ) \text{ を省いてもいい.} \\
&\overset{\text{定義}}{=} f_4(x)
\end{aligned}
$$

だから

$$f_2 \circ f_5 = f_4$$

です．

36通りの $f_i \circ f_j$ を求めると，演算表（本書 p.206）が完成します．

$$
\begin{array}{c|ccc}
\circ & \cdots & f_5 & \cdots \\
\hline
\vdots & \ddots & & \\
f_2 & & f_4 & \\
\vdots & & & \ddots \\
\hline
\end{array}
$$

完成した演算表で結合法則が成り立つかどうかを調べます．

$\boxed{\text{問題２}}$ $(f_2 \circ f_5) \circ f_3$ と $f_2 \circ (f_5 \circ f_3)$ とを調べてください．

$\boxed{\text{解}}$

$$
\begin{aligned}
(f_2 \circ f_5) \circ f_3 &= f_4 \circ f_3 \\
&= f_6.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2 \circ (f_5 \circ f_3) &= f_2 \circ f_4 \\
&= f_6.
\end{aligned}
$$

他も同様に,結合法則が成り立ちます.

演算表(本書 p.206)で i が $1, 2, \ldots, 6$ のどれでも

同じ

$$f_i \circ f_1 = f_1 \circ f_i = f_i$$

同じ

だから f_1 は単位元です.

i が $1, 2, \ldots, 6$ のどれでも

$$f_i \circ f_k = f_k \circ f_i = f_1 \quad （単位元）$$

をみたす f_k が存在します．f_k は f_i の逆元です．

問題3　演算表(本書 p.206)で f_1，f_2，f_3，f_4，f_5，f_6 の逆元を調べてください．

★ 本書 p.207

例　f_2 は f_3 の逆元，f_3 は f_2 の逆元です．

$\circ$	$\cdots$	f_3	$\cdots$
$\vdots$	$\ddots$		
f_2		f_1	
$\vdots$			$\ddots$

$\circ$	$\cdots$	f_2	$\cdots$
$\vdots$	$\ddots$		
f_3		f_1	
$\vdots$			$\ddots$

$$f_2 \circ f_3 = f_3 \circ f_2 = f_1.$$

集合 $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ で演算 $\circ$ を定義して，

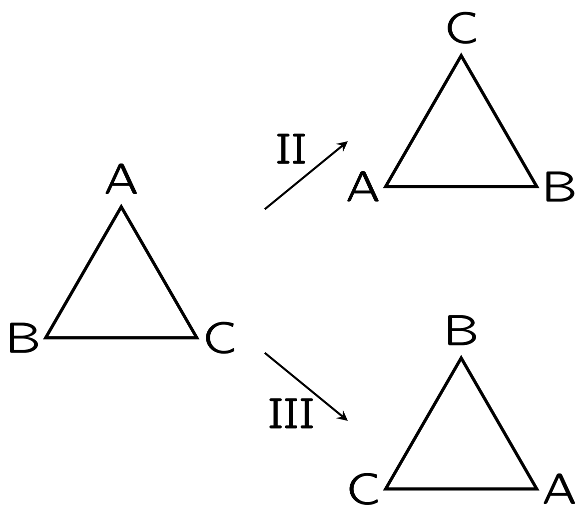
$\boxed{\text{四つの性質}}\left\{\begin{array}{l}\text{(i) 閉じている（演算表が完成する）} \\ \text{(ii) 結合法則} \\ \text{(iii) 単位元の存在} \\ \text{(iv) 逆元の存在}\end{array}\right.$

が成り立つから，集合 $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ は演算 $\circ$ について群をつくっています．

例２　操作の集合　$\{\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}\}$　★ 本書 p.207

回転の中心は重心．　時計の針のまわる向きの反対向きに回転させるはたらき

操作 I : 0° 回転，操作 II : 120° 回転，操作 III : 240° 回転．



$\mathrm{II} \circ \mathrm{III}$ の意味 :「120° 回転させてから 240° 回転させる」

I の意味 :「360° 回転 (0° 回転) させる」

$$\mathrm{II} \circ \mathrm{III} = \mathrm{I}.$$

この考え方で, $\mathrm{III} \circ \mathrm{II}$, $\mathrm{III} \circ \mathrm{III}$ なども求めると, 演算表 (本書 p.208) が完成します.

この演算表を使って, 操作の集合 $\{\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}\}$ が群をつくるかどうかを調べます.

操作の集合 $\{\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}\}$ で回転をつづける操作を演算として定義して,

四つの性質

- (i) 閉じている (演算表が完成する)
- (ii) 結合法則 $\mathrm{I} \circ (\mathrm{II} \circ \mathrm{II}) = (\mathrm{I} \circ \mathrm{II}) \circ \mathrm{II}$ など.
- (iii) 単位元の存在 単位元は I.
- (iv) 逆元の存在 I の逆元は I, II の逆元は III, III の逆元は II.

が成り立つから, 集合 $\{\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}\}$ は回転をつづける演算について群をつくっています.

問題 4 $(\mathrm{II} \circ \mathrm{III}) \circ \mathrm{II}$ と $\mathrm{II} \circ (\mathrm{III} \circ \mathrm{II})$ の意味を答えてください.

$\boxed{解}$

$(\mathrm{II} \circ \mathrm{III}) \circ \mathrm{II}$:「120° 回転させてから 240° 回転させる」操作につづけて「120° 回転させる」操作を行う.

$\mathrm{II} \circ (\mathrm{III} \circ \mathrm{II})$:「120° 回転させる」操作につづけて「240° 回転させてから 120° 回転させる」操作を行う.

どちらも「$(120^\circ + 240^\circ + 120^\circ)$ 回転させる」操作ですから, 結合法則

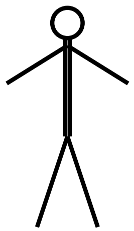
$$(\mathrm{II} \circ \mathrm{III}) \circ \mathrm{II} = \mathrm{II} \circ (\mathrm{III} \circ \mathrm{II})$$

の成り立つ理由がわかります.

体　基本の考え方 ── どのような性質をもつ集合か　　★ 本書 p.190

０で割る除法を除いた四則演算が自由にできる集合

体 （四則を４本の手足にあたると考える）

加法

減法（符号を変えて加法）

乗法　　除法（逆数で乗法）

２種類の演算（加法・乗法）について

I　加法群

II　乗法群

III　分配法則　$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,\ (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

が成り立つ集合

問題５　加法群であることから必ず含む要素を答えてください.

解　単位元 0

問題6　乗法群であることから必ず含む要素を答えてください.

解　単位元 1

例　２を法とする剰余系, ５を法とする剰余系など.　★ 本書 p.208

問題７　３を法とする剰余系 (整数を３で割った余りの集合) の加法の演算表と乗法の演算表を作成してください.

★ まず, この集合の要素を挙げる.

解　整数を３で割った余りは0,1,2だから，３を法とする剰余系は

$$\{0,1,2\}$$

です.

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\times$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

★ ０で割る除法を除くことに注意する.

問題8　３で割った余りの集合は体でしょうか?

★ 演算表で判断する.

$\boxed{\text{解}}$　つぎのように，I，II，III が成り立つから，3で割った余りの集合は体です．

I　集合$\{0, 1, 2\}$で加法を定義して，

$\boxed{\text{四つの性質}}$
- (i) 閉じている（演算表が完成する）
- (ii) 結合法則　$1 + (2 + 1) = (1 + 2) + 1$など．
- (iii) 単位元の存在　単位元は0．
- (iv) 逆元の存在　0の逆元は0，1の逆元は2，2の逆元は1．

が成り立つから，集合$\{0, 1, 2\}$は加法について群をつくっています．

★ ０で割る除法を除くことに注意する．

II　集合 $\{0, 1, 2\}$ で乗法を定義して，

$\boxed{\text{四つの性質}}$
- (i) 閉じている（演算表が完成する）
- (ii) 結合法則　$1 \times (2 \times 2) = (1 \times 2) \times 2$ など．
- (iii) 単位元の存在　単位元は１．
- (iv) 逆元の存在　０を除いて１の逆元は１，２の逆元は２．

が成り立つから，集合 $\{0, 1, 2\}$ は乗法について群をつくっています．

III　分配法則が成り立ちます.

$$2 \cdot (1+2) = 2 \cdot 0 = 0,$$

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 2 + 1 = 0$$

だから

$$2 \cdot (1+2) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2.$$

$$(1+1) \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 1,$$

$$1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 2 + 2 = 1$$

だから

$$(1+1) \cdot 2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2.$$

他も同様です.

$\boxed{\text{体の例}}$　★ 本書 p.191

実数の集合 $\mathbb{R}$

有理数の集合 $\mathbb{Q}$

注意　整数の集合 $\mathbb{Z}$ は体ではありません．

乗法群の逆元が存在しないからです．たとえば

$$3 \times \square = 1$$ 乗法群の単位元

をみたす整数は存在しません．

$\boxed{\text{次回のための予習}}$

線型空間　本書 p.191