数学ターミナル　**線型代数の発想**

ダイジェスト版　21

前回

群　１種類の演算(加法など)について閉じているかどうか.

体　２種類の演算(加法・乗法)について閉じているかどうか.　★ 本書 p.191

今回

線型空間　(別名：ベクトル空間)　★ 本書 p.192

線型　線型結合

空間
- ① 広がりのある環境(立体空間)
- ② 演算規則を決めた集合 (「線型空間」はこの意味)

「線型空間とは，どのような集合か」を理解するために，３元１次方程式

$$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 0$$

の解ベクトルを思い出すことから始めます．

問題１　この方程式の解ベクトルを求めてください．

★ 方程式 $1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 0$ を見たとき，解を求めるだけでなく，
どのような図形を表すかということも読み取る．

$1x_1+1x_2+1x_3=0$ は内積 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$ に書き換えるとわかるように，$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ で表せる方向に垂直で原点を通る平面です．

解　$x_2=t_1$，$x_3=t_2$（t_1，t_2 は任意の実数）とおくと

$$x_1=-t_1-t_2$$

となります．解ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}t_1+\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}t_2$$

◀ 原点を通る平面のベクトル表示

です．

★ 本書 p.174

(I) 演算　数ベクトルの加法

$$
\begin{array}{ccccc}
 & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \underset{\displaystyle \underset{\mathbb{R}}{\rotatebox{90}{$\in$}}}{t_1} + & \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \underset{\displaystyle \underset{\mathbb{R}}{\rotatebox{90}{$\in$}}}{t_2} \\
 & \rotatebox{90}{$\in$} & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
\text{集合} & \mathbb{R}^3 & \mathbb{R}^3 & & \mathbb{R}^3
\end{array}
$$

(II) 演算　数ベクトルのスカラー倍

(I) 加法について群をつくり,

(II) ベクトルのスカラー倍が定義できて,

(III) 加法とスカラー倍との混ざった演算の規則を決めた

数ベクトルの集合で演算の結果を表すことができます.

★ 本書 p.192

注意　数ベクトルの集合 $\mathbb{R}^3$ とスカラー (倍率) の集合 $\mathbb{R}$ との区別

$\boxed{\text{問題2}}$

(1) 数ベクトルの集合 $\mathbb{R}^3$ は加法について群をつくっていることから，
必ず含んでいる要素を答えてください．

(2) スカラー(倍率)の集合 $\mathbb{R}$ は体(0で割る除法を除いて四則演算ができる集合)
であることから，必ず含んでいる要素を答えてください．

$\boxed{\text{解}}$

(1) 数ベクトルの集合 $\mathbb{R}^3$ は加法の単位元 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を含みます.

(2) スカラー(倍率)の集合 $\mathbb{R}$ は, 加法の単位元 0 と乗法の単位元 1 を含みます.

「スカラー(倍率)の集合 $\mathbb{R}$ は 0 で割る除法を除いて四則演算ができる」とは ?

例 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}(3+2)$ 　　倍率どうしの加法　　記号 $\mathbb{u}(\alpha+\beta)$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}(3 \cdot 2)$ 　　倍率どうしの乗法　　記号 $\mathbb{u}(\alpha \cdot \beta)$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

加法の単位元

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{線型空間 } \mathbb{R}^3}$

ベクトルの集合

1

乗法の単位元

0

加法の単位元

$3 \quad \sqrt{2} \quad \cdots$

$\boxed{\text{体 } \mathbb{R}}$

スカラー（倍率）の集合

★ 本書 p.192

数ベクトルの加法

例
$$\underset{\mathbb{R}^3}{\underset{\Cap}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}} + \underset{\mathbb{R}^3}{\underset{\Cap}{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}} = \underset{\mathbb{R}^3}{\underset{\Cap}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}.$$

数ベクトルのスカラー倍

例
$$\underset{\mathbb{R}^3}{\underset{\Cap}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}} \underset{\mathbb{R}}{\underset{\Cap}{3}} = \underset{\mathbb{R}^3}{\underset{\Cap}{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}}.$$

「体 $\mathbb{R}$ から倍率を選ぶ」という意味で「体 $\mathbb{R}$ 上の線型空間 $\mathbb{R}^3$」といいます．

注意「上下」の意味ではないから「体 $\mathbb{R}$ 下の $\cdots$」はありません．

線型空間では, どのような演算規則を決めているでしょうか?

結合法則

例 $$\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} 3\right\} 2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (3 \cdot 2)$$ 記号 $(\mathbb{u} \cdot \alpha) \cdot \beta = \mathbb{u} \cdot (\alpha \cdot \beta)$,

分配法則

例 $$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (3 + 2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} 3 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} 2$$ 記号 $\mathbb{u} \cdot (\alpha + \beta) = \mathbb{u} \cdot \alpha + \mathbb{u} \cdot \beta$

が成り立つと決めます.

$\boxed{\text{用語}}$ ★ 本書 p.192[注意 1]

線型空間 V の要素をベクトル,

体 K の要素をスカラー

といいます.

例 V が $\mathbb{R}^3$, K が $\mathbb{R}$ の場合

$\boxed{\text{記号}}$ ★ 本書 p.192

「$\mathbb{R}^3$ の任意の要素 $\mathbb{u}$」 $\forall \mathbb{u} \in \mathbb{R}^3$ ベクトルは太文字で表します.

「$\mathbb{R}$ の任意の要素 α」 $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ スカラーは細文字で表します.

$\forall$ Any(任意の)の頭文字の図案化 ★ 本書 p.200

$\boxed{\text{問題3}}$　線型空間の性質（本書 p.192）を使って

$$\mathbb{u} \cdot 3 = \mathbb{u} + \mathbb{u} + \mathbb{u}$$

を示してください．　　★ 本書 p.194

★ $3 = 2 + 1$ に注意して，分配法則を使う．

$\boxed{\text{解}}$ 加法とスカラー倍との混ざった演算の規則を使います.

$$\begin{aligned} \mathbb{u}\cdot 3 &= \mathbb{u}\cdot(2+1) && \blacktriangleleft\ \text{体}\,\mathbb{R}\text{は加法群だから}\,2\in\mathbb{R},\ 1\in\mathbb{R},\ 2+1\in\mathbb{R}. \\ &= \mathbb{u}\cdot 2+\mathbb{u}\cdot 1 && \blacktriangleleft\ \text{分配法則} \\ &= \mathbb{u}\cdot(1+1)+\mathbb{u}\cdot 1 && \blacktriangleleft\ \text{体}\,\mathbb{R}\text{は加法群だから}\,1\in\mathbb{R},\ 1+1\in\mathbb{R}. \\ &= \mathbb{u}\cdot 1+\mathbb{u}\cdot 1+\mathbb{u}\cdot 1 && \blacktriangleleft\ \text{分配法則} \\ &= \mathbb{u}+\mathbb{u}+\mathbb{u}. && \blacktriangleleft\ \text{「}\mathbb{u}\text{の1倍」は}\,\mathbb{u}\,\text{と決めた(本書 p.194).} \end{aligned}$$

たとえば $4\times 1=4$ は, 1を省いたのではなく, 積が4である(九九を思い出せ)ことを表します.
同様に, $\mathbb{u}\cdot 1=\mathbb{u}$ も, 1を省いたのではなく, 積が $\mathbb{u}$ であることを表します.

$\boxed{\text{問題4}}$ $\mathbb{u}\cdot\dfrac{3}{4}$ は加法とどのように結びつくのでしょうか ?

★ $\left(\mathbb{u}\cdot\dfrac{3}{4}\right)\cdot 4$ を考える.

$\boxed{解}$　$\dfrac{3}{4}$ の定義「4を掛けると3になる数」(本書 pp.13 – 14) を使います.

$$
\begin{aligned}
& \left(\mathbb{u} \cdot \frac{3}{4}\right) \cdot 4 \\
= \ & \mathbb{u} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot 4\right) && \blacktriangleleft \text{ 結合法則} \\
= \ & \mathbb{u} \cdot 3 \\
= \ & \mathbb{u} + \mathbb{u} + \mathbb{u}. && \blacktriangleleft \text{ 問題3}
\end{aligned}
$$

$\mathbb{u} \cdot \dfrac{3}{4}$ の4倍は $\mathbb{u}$ どうしの和になることがわかります.

★ 本書 p.195 問3.2

ねらい　線型空間の例を挙げることができるようにします．

★ 本書 pp.196 – 199

● 線型空間とよべる集合かどうか ？ ⇒ ８個の性質 (本書 p.192) を持つかどうかを調べる．

例 1　数ベクトルの集合 $\mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

加法の単位元

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\cdots$ $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{線型空間 } \mathbb{R}^2}$

ベクトルの集合

1

乗法の単位元

0

加法の単位元

3 $\sqrt{2}$

$\cdots$

$\boxed{\text{体 } \mathbb{R}}$

スカラー(倍率)の集合

★ 本書 pp.196 – 197

数ベクトルの加法

例 $\underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\cap}{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}} + \underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\cap}{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}}} = \underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\cap}{\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}}}.$

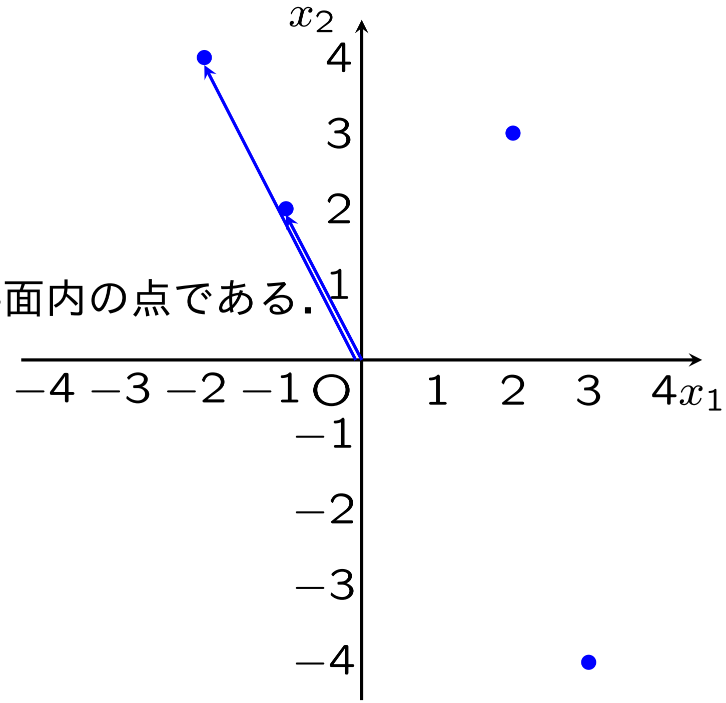
数ベクトルのスカラー倍

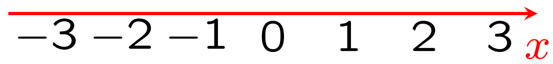
例 $\underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\cap}{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}} \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{2}} = \underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\cap}{\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}}}.$

例２　幾何ベクトルの集合（平面内のあらゆる点の集合）

★ 本書 pp.196 – 197

２倍しても平面内の点である.





体

倍率の集合

数直線上の点全体

線型空間

平面内の点全体

加法・スカラー倍に便利だから　★ 本書 p.26

原点を始点とする矢線で表すこともある.

★ 加法の作図は本書 p.197 図3.7.

例３　１次実係数１変数多項式の集合

$0x+0$

加法の単位元

$2x+3$　$5x-1$　$3x-4$

$-1x+2$　$\cdots$　$-2x+4$

$\boxed{\text{線型空間}}$

１次実係数１変数多項式の集合

1

乗法の単位元

0

加法の単位元

3　$\sqrt{2}$

$\cdots$

$\boxed{\text{体 } \mathbb{R}}$

スカラー（倍率）の集合

★ 本書 pp.196 – 197

多項式の加法

例

$$(2x+3)+(3x-4)=5x-1.$$

多項式のスカラー倍

例 $(-1x+2)\cdot 2=-2x+4.$

$\boxed{\text{自習}}$　$0x+0$ が加法の単位元であることを確かめてください.

高校数学では, 1次実係数1変数多項式を「ベクトル」とよぶことはありません.

$\boxed{\text{重要}}$　大学数学では,

数ベクトルの集合 $\mathbb{R}^2$,

平面内の幾何ベクトルの集合,

1次実係数1変数多項式の集合

は加法・スカラー倍の同じ演算規則にしたがうので, 同一視して

線型空間といい, 要素を「ベクトル」といいます.

★ 本書 p.197[注意2], p.198[注意3],[注意4]

$\boxed{\text{次回のための予習}}$

線型空間の例　本書 pp.199 – 205

部分線型空間　本書 2.4 節