数学ターミナル　線型代数の発想

ダイジェスト版　22

前回

● 線型空間とよべる集合かどうか ？ ⇒ ８個の性質 (本書 p.192) を持つかどうかを調べる.

例

数ベクトルの集合 $\mathbb{R}^2$,

平面内の幾何ベクトルの集合,

１次実係数１変数多項式の集合

は加法・スカラー倍の同じ演算規則にしたがうので, 同一視して

線型空間といい, 要素を「ベクトル」といいます.

今回

線型空間のいろいろな例 ★ 本書 pp.199-205

数列の集合

$\{0, 0, 0, \ldots\}$
加法の単位元

$\{3, 6, 9, \ldots\}$

$\{5, 10, 15, \ldots\}$

$\cdots$

$\{-3, -6, -9, \ldots\}$

$\{-5, -10, -15, \ldots\}$

$\boxed{\text{線型空間}}$
実数列の集合

1
乗法の単位元

0
加法の単位元

3 $\sqrt{2}$
$\cdots$

$\boxed{\text{体 } \mathbb{R}}$
スカラー(倍率)の集合

★ 本書 p.203

数列の加法

例 $\{3, 6, 9, \ldots\} + \{5, 10, 15, \ldots\}$
$= \{8, 16, 24, \ldots\}.$

数列のスカラー倍

例 $\{3, 6, 9, \ldots\} \cdot 2 = \{6, 12, 18, \ldots\}.$

集合の表し方

★ 本書 p.200

例 偶数の集合

$$\{x|x = 2n, \forall n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\{x; x = 2n, \forall n \in \mathbb{Z}\}$$

Q1 $|$ とセミコロンは何と読みますか**?**

Q2 $\mathbb{Z}$ は何の集合を表す記号ですか**?**

★ 本書 p.19

$|$;　ただし where

$\forall$　「任意の」Any の頭文字

$\in$　要素 Element の頭文字 E の図案化

$\mathbb{Z}$　整数の集合

数列の集合 $\{\{3,6,9,\ldots\},\{5,10,15,\ldots\},\ldots\}$ ← 集合の記号

数列の記号

を

$$\{\{a_n\}|\forall a_n \in \mathbb{R}\}$$

と表すことがあります.

$\{3,6,9,\ldots\}$ を $\{a_n\}$, $\{5,10,15,\ldots\}$ を $\{a_n\}$,... と表しています.

$\{a_n\}$ は要素が１個の集合という意味ではありません.

$,\ldots,$ カンマ, ピリオド３個, カンマ　　$100\cdots0$ ３点リーダー

$,\ldots,$ 同じ高さ　　$100\cdots0$

実数の集合 $\mathbb{R}^1$

(0)
加法の単位元

(2)　(−2)　(3)
(−3)
$\cdots$
(23)

$\boxed{\text{線型空間 } \mathbb{R}^1}$

ベクトルの集合

1
乗法の単位元

0
加法の単位元

5　4　$\sqrt{2}$
$\cdots$

$\boxed{\text{体 } \mathbb{R}}$

スカラー(倍率)の集合

★ 本書 pp.196 – 197

数ベクトルの加法

例 $\begin{array}{ccccc} (2) & 4 + & (3) & 5 = & (23). \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \mathbb{R}^1 & & \mathbb{R}^1 & & \mathbb{R}^1 \end{array}$

数ベクトルのスカラー倍

例 $\begin{array}{cccc} (5) & 2 & = & (10). \\ \rotatebox{90}{$\in$} & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \mathbb{R}^1 & \mathbb{R} & & \mathbb{R}^1 \end{array}$

- 線型空間 $\mathbb{R}^1$ は $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots$ の特別な場合 (成分が 1 個) です.
- $\mathbb{R}^1$ を $\mathbb{R}^2$ と同じ考え方で扱うために, (2) のように表したが, ２と書くこともあります.
- $\mathbb{R}^1$ は線型空間だから, 実数をベクトルとよぶことができます.
- 線型空間 $\mathbb{R}^1$ と体 $\mathbb{R}$ とは, どちらもすべての実数の集合ですが, 体 $\mathbb{R}$ は倍率の集合であり, 要素をスカラーといいます.

$\boxed{\text{自習}}$

★ 本書 p.201 問3.4

★ 本書 p.202 問3.5　　線型結合 $\mathbb{u}\cdot s+\mathbb{v}\cdot t$ の集合

- あとで部分線型空間を考えるとき応用します.
- 「加法について閉じている」ことの示し方

任意の二つの要素を $\mathbb{u}\cdot s_1+\mathbb{v}\cdot t_1$, $\mathbb{u}\cdot s_2+\mathbb{v}\cdot t_2$ とすると

$$\begin{aligned}&(\mathbb{u}\cdot s_1+\mathbb{v}\cdot t_1)+(\mathbb{u}\cdot s_2+\mathbb{v}\cdot t_2)\\=\ &\mathbb{u}\cdot(s_1+s_2)+\mathbb{v}\cdot(t_1+t_2).\end{aligned}$$

となり, 和も $\mathbb{u}$ と $\mathbb{v}$ との線型結合で表せることがわかります.

$\text{部分}\underbrace{\text{線型空間}}_{\text{集合}}$ ★ 本書 2.4 節

$\boxed{\text{ねらい}}$

線型空間の部分集合の意味 —— 連立１次方程式との関係

★「単なる部分集合とちがう重要な特徴を持つ部分集合」に進みます．

はじめに，

簡単な２元１次方程式の解集合（あらゆる解）

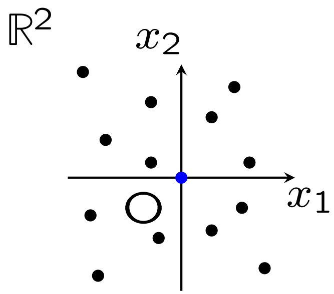
を図形で表すと，

平面内の点全体の部分集合

であることを思い出します．

線型空間 ① 加法 ② スカラー倍 が自由にできる集合

例 平面 $\mathbb{R}^2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{加法の単位元}}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \cdots \right\}.$



点全体の集合

問題 1 条件を示す方法で $\mathbb{R}^2$ を表してください.

解 $\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \forall x_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2 \right\}$.

部分線型空間

例1 斉次方程式(せいじ) (2元1次方程式) $1x_1 - 1x_2 = 0$ の解集合

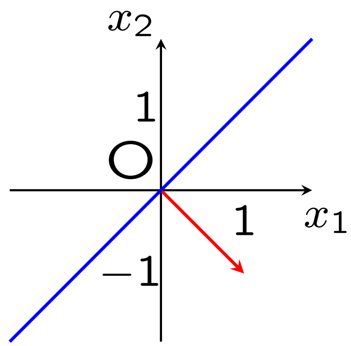
問題2 この方程式が表す図形をx_1x_2平面に描いてください.

★ この式を内積で表して,図形の特徴を読み取る.

解　内積

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

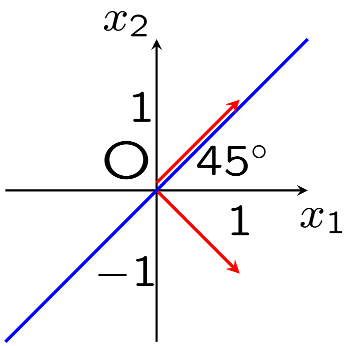
は，原点を通り，$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ の方向に垂直な直線を表します．



問題３　この図を見て，直線をベクトル表示してください．

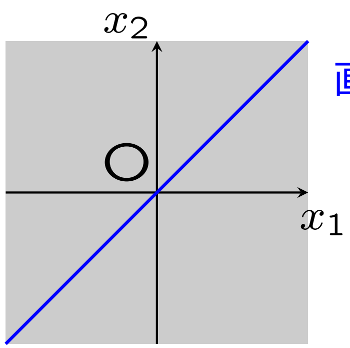
★ 直線の表し方は「$\cdots$ に平行」「$\cdots$ に垂直」の２通りあることを思い出す．

$\boxed{\text{解}}$



原点を通り，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の方向に平行な直線を表します．

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t \quad (t \text{ は任意の実数}).$$



直線は解集合を表します．

$$\text{全平面 } \mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ldots \right\}$$

平面内のあらゆる点の集合

全平面 $\mathbb{R}^2$ は線型空間．　直線上の点の集合は $\mathbb{R}^2$ の部分集合．

線型空間 $\mathbb{R}^2$ は

平面内の点どうしの加法, 点のスカラー倍

が自由にできる集合です.

Q3 解集合 (直線上) の点だけでも, この性質は成り立つでしょうか?

$\boxed{\text{問題 }\mathbf{4}}$ 条件を示す方法で解集合 W を表してください.

★ 問題 1 を参考にする.

$\boxed{解}$ $$W=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\,\middle|\,\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}t,\forall t\in\mathbb{R}\right\}.$$

$\forall t\in\mathbb{R}$は「tは任意の実数」という意味を表します．

$\boxed{\textbf{問題5}}$ Wの任意の要素の和とスカラー倍がWに属するかどうかを調べてください．

★ 任意の二つの要素の和 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}t_1+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}t_2$ を考える．

★ 任意の要素 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}t$ のスカラー倍を考える．

$\boxed{解}$　解集合 W の性質

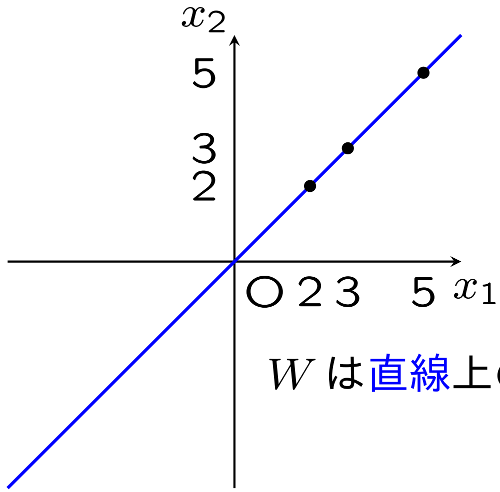
① 加法 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t_2 \overset{\text{分配法則}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (t_1 + t_2).$

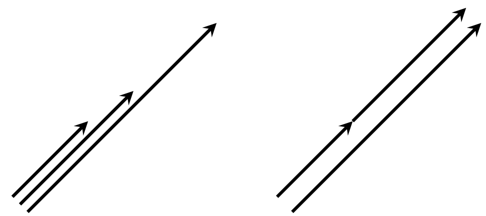
$$解 + 解 = 解$$

だから解どうしの和も解になることがわかります.

例 $\underset{\displaystyle W}{\underset{\Cap}{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}}} + \underset{\displaystyle W}{\underset{\Cap}{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}}} = \underset{\displaystyle W}{\underset{\Cap}{\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}}}.$

加法の作図では
矢線を使うと
便利です.





W は直線上の点全体の集合.

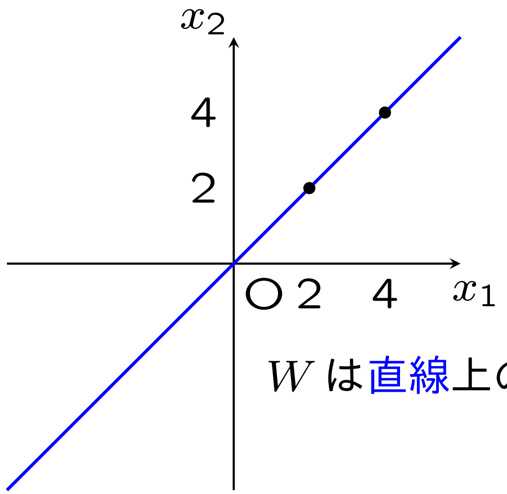
② スカラー倍 $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}t\right\}s \overset{\text{結合法則}}{=} \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}ts.$

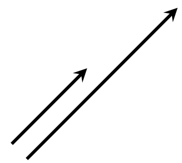
解 × スカラー ＝ 解

だから解のスカラー倍も解になることがわかります.

例 $\underset{\substack{\cap\\ W}}{\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}}2 = \underset{\substack{\cap\\ W}}{\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}}.$

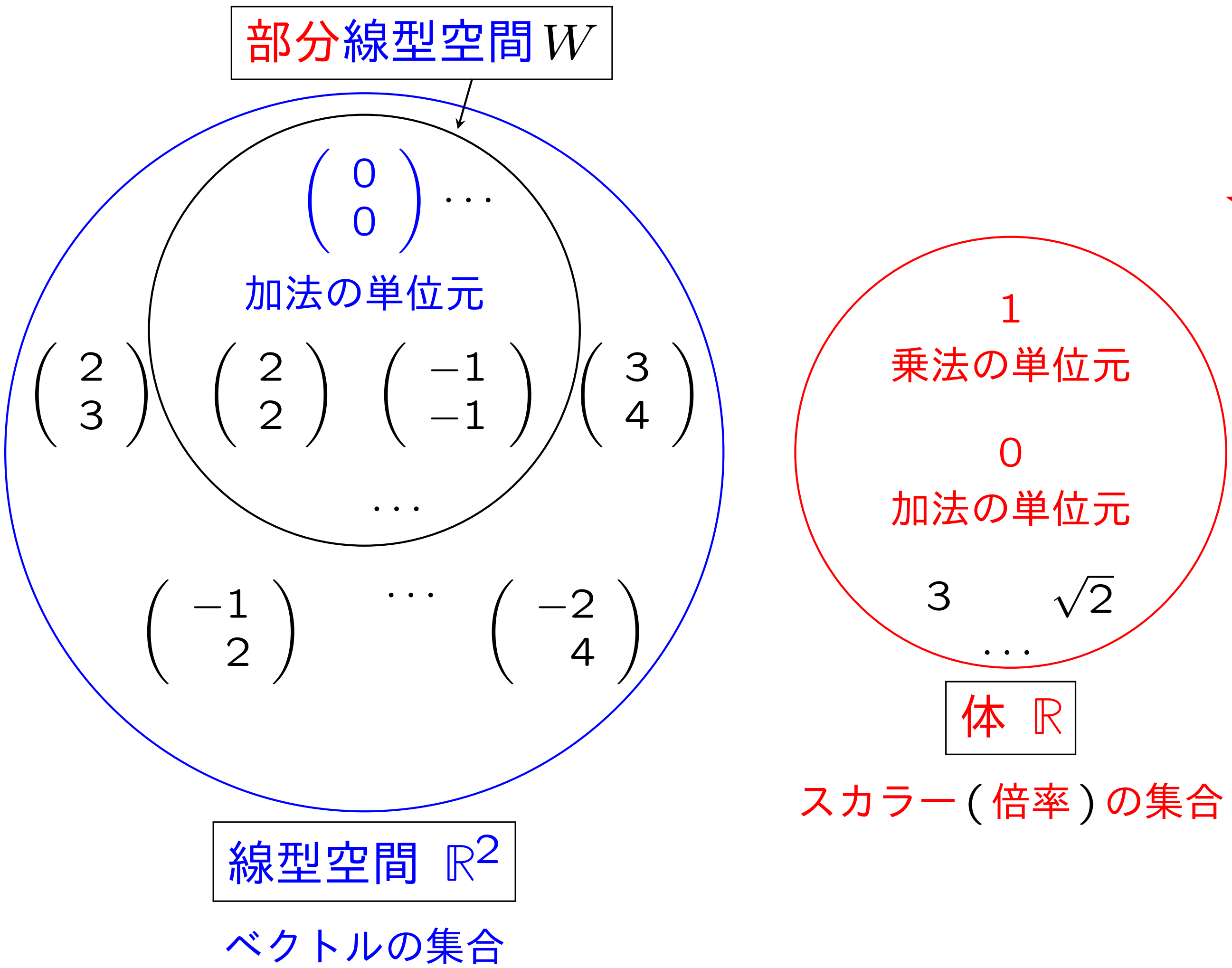
スカラー倍の作図では
矢線を使うと便利です.





W は直線上の点全体の集合.

★ 本書 pp.196 – 197



部分線型空間 W
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\cdots$
加法の単位元
$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
$\cdots$
$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\cdots$ $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$
線型空間 $\mathbb{R}^2$
ベクトルの集合
1
乗法の単位元
0
加法の単位元
3 $\sqrt{2}$
$\cdots$
体 $\mathbb{R}$
スカラー(倍率)の集合

斉次方程式の解集合 $W \subset \mathbb{R}^2$

は図形では

原点を通る直線上の点の集合 $\subset x_1 x_2$ 平面内の点全体

と表せます.

部分集合の要素だけで加法 $\cdot$ スカラー倍が自由にできる.

部分線型空間

例２ 斉次方程式（２元連立１次方程式）

$$\begin{cases} 1x_1 - 2x_2 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$$

の解集合

問題６ それぞれの方程式が表す図形を x_1x_2 平面に描いてください．

$\boxed{解}$　内積

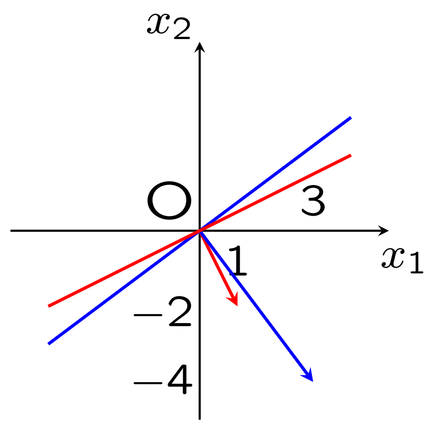
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

は，原点を通り，$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ の方向に垂直な直線を表します．

内積

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

は，原点を通り，$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ の方向に垂直な直線を表します．



解ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

解集合 $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

問題 7 W の任意の要素の和とスカラー倍が W に属するかどうかを調べてください.

★ 任意の二つの要素の和を考える.

★ 任意の要素のスカラー倍を考える.

$\boxed{解}$　解集合 W の性質

① 加法 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

$$\text{解} + \text{解} = \text{解}$$

だから解どうしの和も解になることがわかります.

② スカラー倍 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

$$\text{解} \times \text{スカラー} = \text{解}$$

だから解のスカラー倍も解になることがわかります.

せいじ
斉次方程式

$$\begin{cases} 1x_1 - 2x_2 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$$

の解集合は部分線型空間です.

質問 「スカラー倍が定義できる」とは「スカラー倍が計算できる」と同じ意味ではないのでしょうか？

回答 この疑問点を取り上げる前に，減法を思い出してみます．

$2-5$を計算すると-3が求まります．

しかし，自然数の集合$\mathbb{N}$で減法を考えると，$2-5$の値は定義できません．

★ 本書 p.11

数ベクトルのスカラー倍はどうでしょうか ?

集合$\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \forall x_k \in \mathbb{Q}, k = 1, 2\right\}$の要素に体$\mathbb{R}$から選んだ実数(倍率)を掛けると

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \sqrt{5} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{3\sqrt{5}}{4} \end{pmatrix}$$

のように計算できますが,

$$\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{3\sqrt{5}}{4} \notin \mathbb{Q}$$

だから，この集合では数ベクトルのスカラー倍は定義できません.

重要 「どの集合で, どの演算を考えるか」

「集合$\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \forall x_k \in \mathbb{Q}, k = 1, 2\right\}$は体$\mathbb{R}$上の線型空間ではない」といいます.

$\boxed{\text{次回のための予習}}$

部分線型空間でない例　本書 pp.215 – 218

線型空間と部分線型空間の特徴の表し方 —— 次元と基底　本書 3.5 節