数学ターミナル　線型代数の発想

ダイジェスト版　23

前回　部分線型空間の例

今回　部分線型空間でない例

- 反例として，部分線型空間 W の要素の和またはスカラー倍が W に入らない具体例を挙げる．

部分線型空間の判定法

- どのような部分集合が部分線型空間といえるのかを判定する．

重要な例として

$\boxed{\text{零ベクトルを含まない部分集合}}$

を取り上げます.

例 1 非斉次方程式　★ 本書 p.214 問 3.8（改題）

$$2x_1 + 3x_2 = 1$$

の解集合

問題 1 x_1x_2 平面に直線

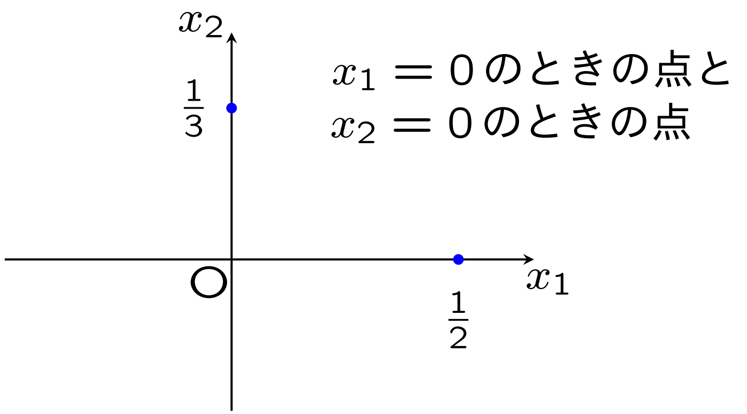
$$2x_1 + 3x_2 = 1$$

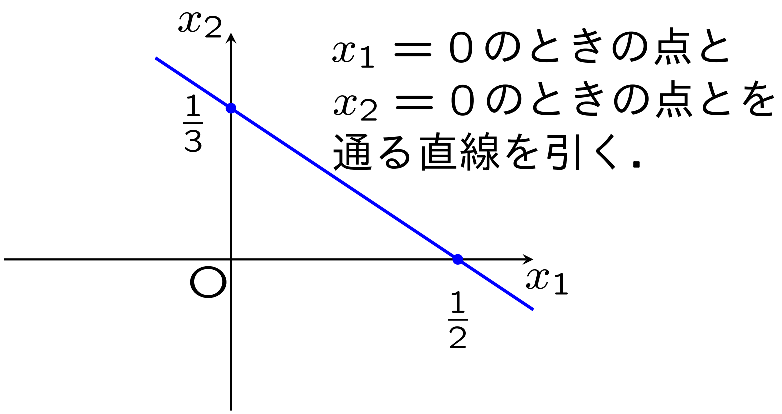
を描いてください.

★ 中学数学とちがって $x_2 = \cdots$ に書き換えない.

$\boxed{\text{解}}$

★ 本書 p.54 例題 1.4, ダイジェスト版 **16** p.21





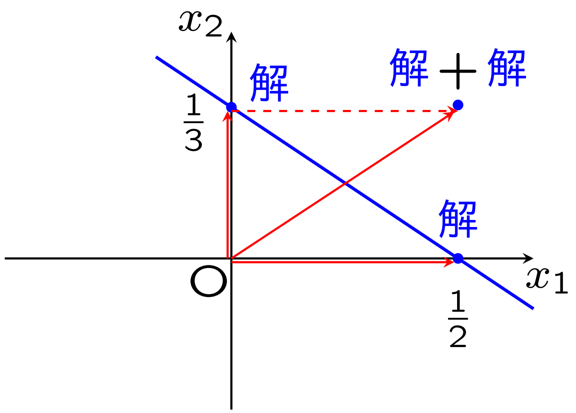
原点を通らない直線上の点全体が非斉次方程式

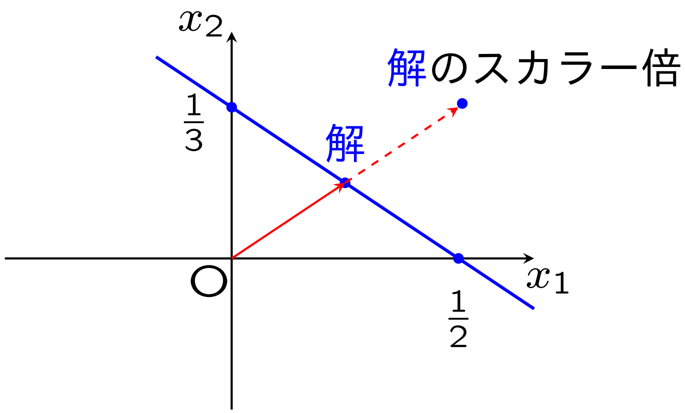
$$2x_1 + 3x_2 = 1$$

の解集合です.

$\boxed{\text{問題2}}$ 解どうしの和, 解のスカラー倍も解かどうかを確かめてください.

$\boxed{解}$





解どうしの和，解のスカラー倍は

直線上にないから解集合に入らない

ことがわかります．非斉次方程式

$$2x_1 + 3x_2 = 1$$

の解集合は$\mathbb{R}^2$(x_1x_2平面内の点全体)の部分線型空間ではありません．

例２　非斉次方程式　★ 本書 p.214 問3.9（改題）

$$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 2$$

の解集合

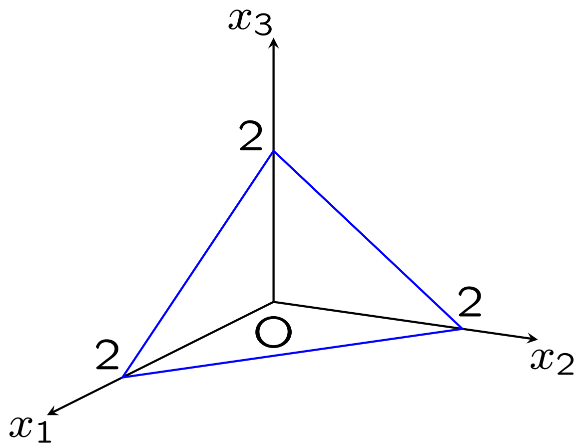
問題３　平面

$$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 2$$

を描いてください．

★ この平面が通る簡単な３点を考える．

解　暗算で，x_1 軸上で $x_1 = 2$，x_2 軸上で $x_2 = 2$，x_3 軸上で $x_3 = 2$ であることがわかります．



ガラス板を思い描く．

このガラス板を含む平面内の点全体

$$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 2.$$

$$1 \times 2 + 1 \times 0 + 1 \times 0 = 2.$$

$$1 \times 0 + 1 \times 2 + 1 \times 0 = 2.$$

$$1 \times 0 + 1 \times 0 + 1 \times 2 = 2.$$

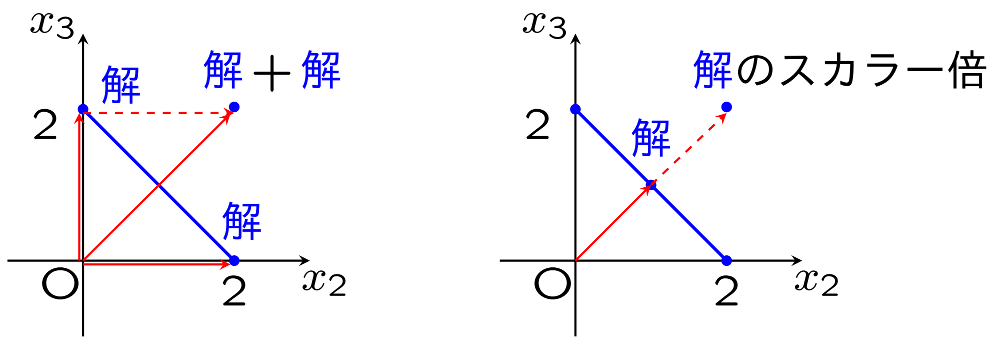
原点を通らない平面内の点全体が非斉次方程式

$$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 2$$

の解集合です．

問題4　解どうしの和，解のスカラー倍も解かどうかを確かめてください．

$\boxed{解}$



解どうしの和，解のスカラー倍は

平面内にないから解集合に入らない

ことがわかります．非斉次方程式

$$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 2$$

の解集合は $\mathbb{R}^3$(空間内の点全体)の部分線型空間ではありません．

例3　非斉次方程式　　★ 本書 p.215 問3.10

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 1x_3 = 1 \end{cases}$$

の解集合

問題5　掃き出し法で解集合 W を求めてください.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{②-①\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{①-②} \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \begin{matrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{matrix}\right)$$

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 4x_3 = 2 \\ 0x_1 + 1x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$$

$$x_3 = t \quad (t \text{は任意の実数})$$

とおくと

$$x_1 = 2 - 4t,$$
$$x_2 = -1 + 3t$$

となります.

解集合は

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} t, \forall t \in \mathbb{R} \right\}.$$

です.

★ ; の代わりに | と書いてもいい.

$\boxed{\text{問題 6}}$ W はどのような図形を表すでしょうか?

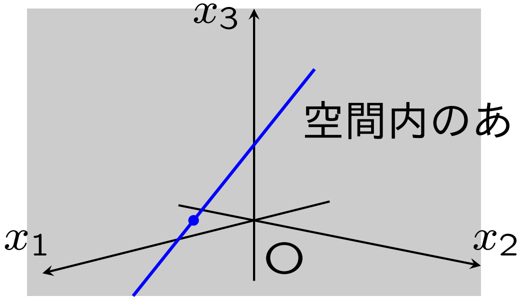
$\boxed{\text{解}}$ 解集合 W は原点を通らない直線

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{特定の点}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{平行な方向}} t$$

です.

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 1x_3 = 1 \end{cases}$$

は原点を通らない２平面を表し, 解は交線です.



空間 $\mathbb{R}^3$ は線型空間.

直線上の点の集合は $\mathbb{R}^3$ の部分集合.

問２, 問４と同様に, 解の和, 解のスカラー倍は直線上にないから解集合に入りません.

解集合 W が部分線型空間でないことを式で表す方法を考えます．

$\boxed{\textbf{問題 7}}$ 解の和と解のスカラー倍とを見やすく表すための準備として，非斉次方程式

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 1x_3 = 1 \end{cases}$$

を係数マトリックスと解ベクトルとの乗法で表してください．

$\boxed{解}$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 1 \quad 1} \\ \boxed{2 \quad 3 \quad -1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{問題8}$　非斉次方程式の解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

のうち例として$t = 0$と$t = 1$とを選んで，これらの解の和が非斉次方程式の解でないことを示してください．

$\boxed{解}$ $t=0$ のときの解は $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t=1$ のときの解は $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ です.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$+)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{解}+\text{解}}\right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{問題9}$ 解のスカラー倍が非斉次方程式の解でないことを示してください.

$\boxed{解}$ 例として$t=0$のときの解とスカラー３を選びます.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}3\right\}$$

◀ 解のスカラー倍

$$\overset{\text{結合法則}}{=} \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}3$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}3$$

$$\neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

反例を挙げるのではなく,記号で表すとどんな場合も説明できます.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

を

$$A\mathbb{x} = \mathbb{b},$$

$$\mathbb{x} = \mathbb{a} + \mathbb{d}t$$

と表します.

問題10 これらの記号で解の和,解のスカラー倍が解でないことを示してください.

$\boxed{\text{解}}$

$$
\begin{array}{ll}
 & A(\mathbb{a}+\mathbb{d}t_1)=\mathbb{b} \\
+) & A(\mathbb{a}+\mathbb{d}t_2)=\mathbb{b} \\
\hline
 & A[(\mathbb{a}+\mathbb{a})+\mathbb{d}(t_1+t_2)]=\mathbb{b}+\mathbb{b}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
A[(\mathbb{a}+\mathbb{d}t)s] &\overset{\text{結合法則}}{=} [A(\mathbb{a}+\mathbb{d}t)]s \\
&= \mathbb{b}s.
\end{aligned}
$$

解の和

$$\mathbb{x}=(\mathbb{a}+\mathbb{a})+\mathbb{d}(t_1+t_2)$$

は

$$A\mathbb{x}=\mathbb{b}$$

をみたしません.

解のスカラー倍

$$\mathbb{x}=(\mathbb{a}+\mathbb{d}t)s$$

は

$$A\mathbb{x}=\mathbb{b}$$

をみたしません.

- 部分線型空間でない理由を図形, 式, 記号の３通りで示すことができました.

まとめ

★ 本書 p.212 – 214

部分線型空間の判定法

① 加法,
② スカラー倍
が自由にできる.
零ベクトルを含む.

スカラーを 0 とすると

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は加法の単位元.

自習 ★ 本書 pp.216 – 218 問題演習

ねらい　線型空間と部分線型空間の特徴の表し方　★ 本書 pp.218 – 220

はじめに重要な二つの用語を挙げます.

基底	次元
座標軸の方向を表すベクトルの組	座標軸の本数

つぎに,

線型空間と部分線型空間

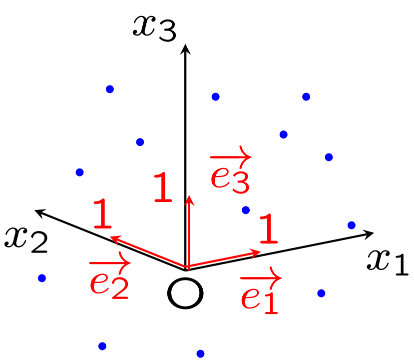
のそれぞれについて,例で

基底と次元の意味

を理解します.

線型空間 $\mathbb{R}^3$

座（場所） 標（しるし）



座標

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_3.$$

基底

空間内のすべての点は

$$\text{基底}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

で表せます.

記号 $\langle \mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2, \mathbb{e}_3 \rangle$ $\langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3} \rangle$

次元 (dimension)

$\dim \mathbb{R}^3 = 3.$

部分線型空間

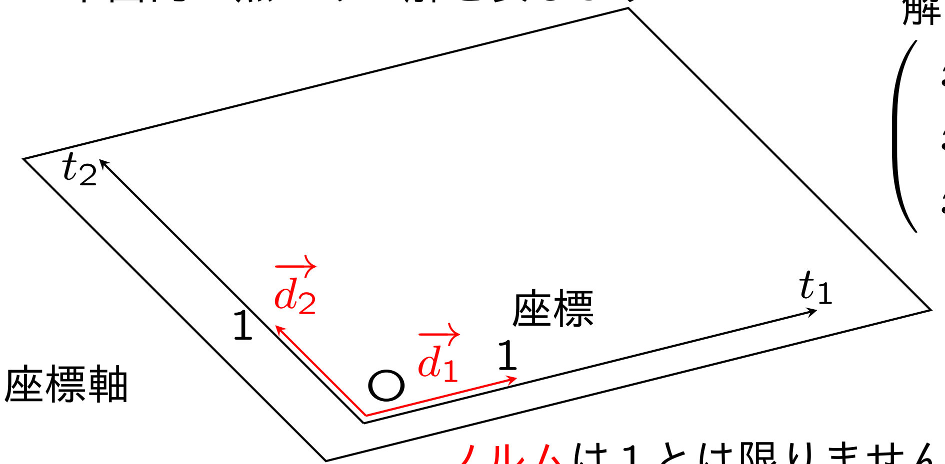
★ 本書 pp.218 – 219

例　３元１次方程式

$$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 0$$

の解集合 W（線型空間 $\mathbb{R}^3$ の部分集合）

この平面内の点だけが解を表します．



斜交座標軸

平面のベクトル表示

解ベクトル

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overbrace{t_1} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overbrace{t_2}}_{\text{基底}}.$$

座標

基底

ノルムは１とは限りません．　この平面内のすべての点は

$$\text{基底}\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

で表せます．

記号 $\langle \mathbb{d}_1, \mathbb{d}_2 \rangle$　$\langle \overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_2} \rangle$

次元（dimension）

$$\dim W = 2.$$

$\boxed{\text{問題 } \mathbf{11}}$ $\|\overrightarrow{d}_1\|$, $\|\overrightarrow{d}_2\|$ を求めてください.

★ 幾何ベクトル $\|\overrightarrow{d}_1\|$, $\|\overrightarrow{d}_2\|$ は数ベクトル $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で表せる.

$\boxed{解}$　三平方の定理で

$$\|\overrightarrow{d}_1\|^2 = (-1)^2 + 1^2 + 0^2,$$

$$\|\overrightarrow{d}_2\|^2 = (-1)^2 + 0^2 + 1^2$$

だから

$$\|\overrightarrow{d}_1\| = \sqrt{2},$$

$$\|\overrightarrow{d}_2\| = \sqrt{2}.$$

★ これらのノルムは1でないことを確かめました.

★ この例では,座標軸方向で原点から距離 $\sqrt{2}$ の位置の座標が1です.

次回のための予習

次元の意味　本書 p.223

基底の意味　本書 pp.224 – 225