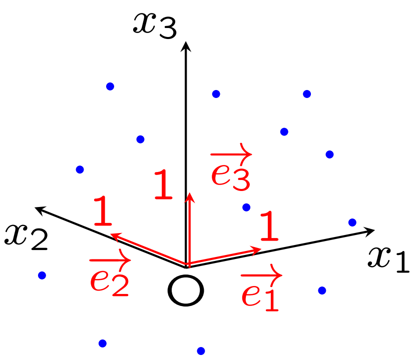
数学ターミナル　線型代数の発想

ダイジェスト版　24

$\boxed{\text{前回}}$ 基底と次元の意味

線型空間 $\mathbb{R}^3$



次元（dimension）

$$\dim \mathbb{R}^3 = 3.$$

座標

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_3.$$

基底

空間内のすべての点は

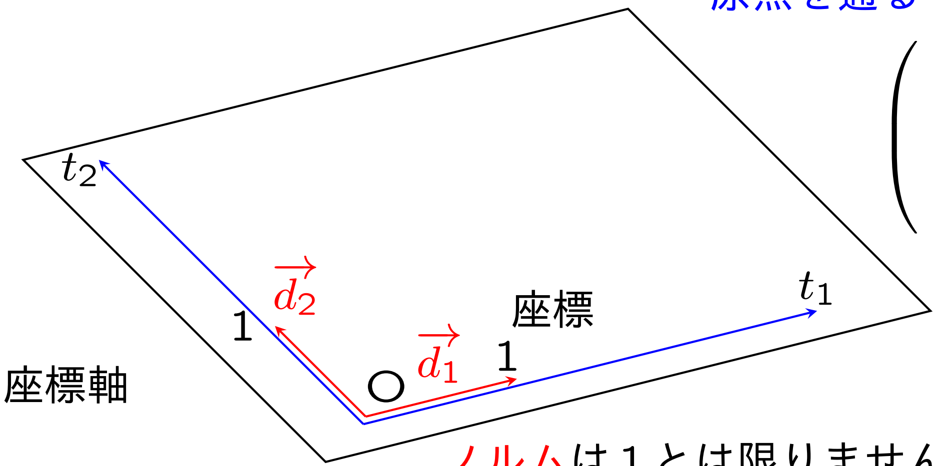
正規直交基底 $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

で表せます．

正規とは「ノルムが 1」

記号 $\langle \mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2, \mathbb{e}_3 \rangle$ $\langle \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3} \rangle$

線型空間 $\mathbb{R}^3$ の部分線型空間 W



斜交座標軸

ノルムは 1 とは限りません.

原点を通る平面のベクトル表示

座標

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} t_2.$$

基底

この平面内のすべての点は

$$\text{基底} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

で表せます.

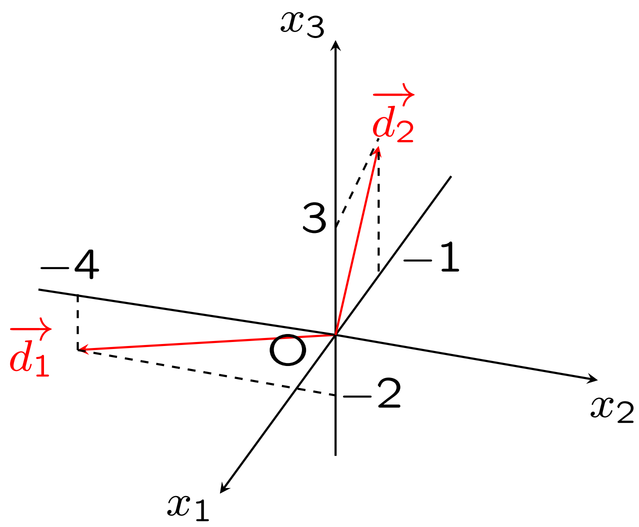
記号 $\langle \mathbb{d}_1, \mathbb{d}_2 \rangle$ $\quad \langle \overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_2} \rangle$

次元 (dimension)

$\dim W = 2.$

$\boxed{\textbf{問題 1}}$ $\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_2}$ のノルムを求めてください.

$\boxed{解}$



三平方の定理を使うと

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

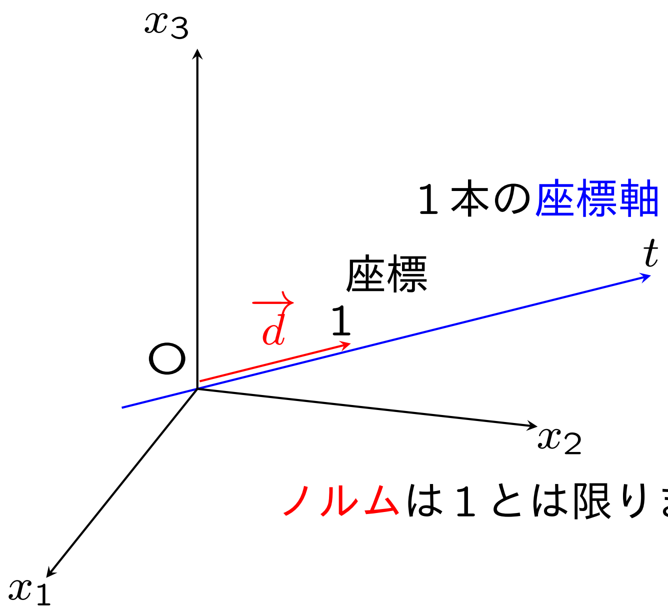
です.

$\|\overrightarrow{d_1}\| \neq 1,$

$\|\overrightarrow{d_2}\| \neq 1$

であることに注意します.

線型空間 $\mathbb{R}^3$ の部分線型空間 W



ノルムは1とは限りません.

次元 (dimension)

$$\mathrm{dim} W = 1.$$

原点を通る直線のベクトル表示

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\text{基底}} \underbrace{t}_{\text{座標}}.$$

この直線上のすべての点は

$$\text{基底} \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

で表せます.

記号 $\langle \mathbb{d} \rangle$　$\langle \overrightarrow{d} \rangle$

★ 本書 p.223

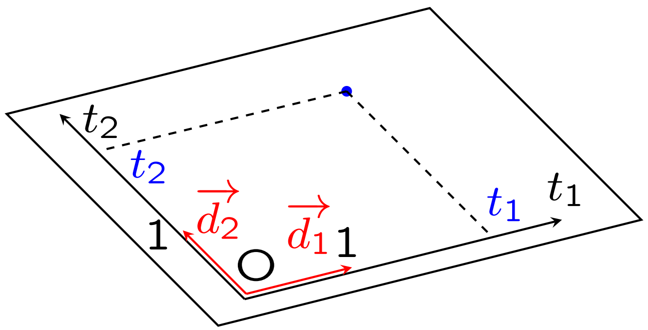
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t_2$$ を例として，三つの見方で次元の意味を理解します．

次元の意味

① 座標の個数　t_1，t_2 の 2 個．

② 座標軸の本数　$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の方向の 2 本の座標軸（t_1 軸，t_2 軸）．

③ 線型独立なベクトルの個数（2 本の座標軸の方向の幾何ベクトル $\vec{d_1}$，$\vec{d_2}$）．

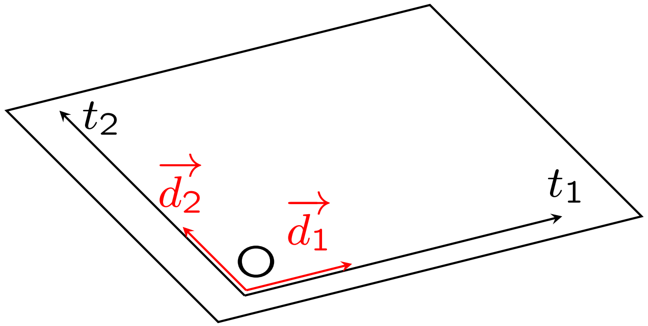


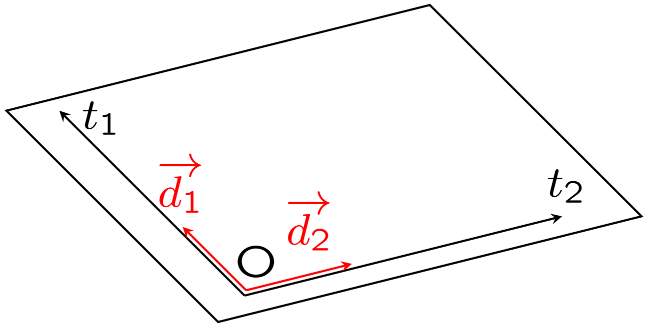
注意

基底　座標軸の方向を表す数ベクトルの組

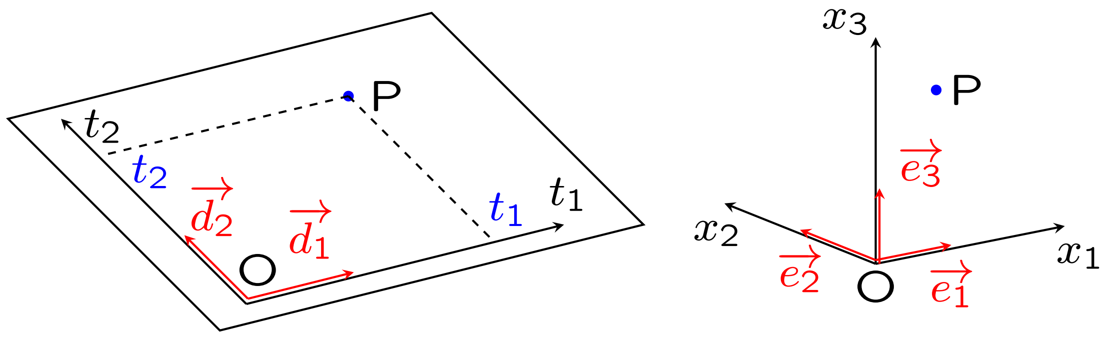
$$\underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{t_1 \text{ 軸}, \ t_2 \text{ 軸}} \quad \text{と} \quad \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}_{t_1 \text{ 軸}, \ t_2 \text{ 軸}}$$

は異なる基底です．





$\boxed{\text{問題2}}$　平面内の点は空間内の点でもあります．基底 $\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ で表すと，平面内の位置Ｐの座標は t_1，t_2 です．空間内の基底 $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ で表すと，この位置の座標はどうなるでしょうか?



★ $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t_2$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で表す．

$\boxed{\text{解}}$

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t_2 &= \begin{pmatrix} -t_1 - t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (-t_1 - t_2) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t_2.
\end{aligned}
$$

x_1 座標は $-t_1 - t_2$，x_2 座標は t_1，x_3 座標は t_2 です．

$\boxed{\text{問題3}}$ $\mathbb{R}^3$のベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} 2$ と表せます. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$だけで $\mathbb{R}^3$の基底といえるでしょうか?

★ 本書 p.220 問3.13（改題）

★ 座標は１個だから $\mathbb{R}^3$ は１次元か?

解

★ 本書 p.222

座標

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} 2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} 0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} 0.$$

基底

$\dim \mathbb{R}^3 = 3.$

① 座標の個数 2，0，0 の 3 個.

② 座標軸の本数 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の方向の 3 本の座標軸 (x_1 軸，x_2 軸，x_3 軸).

③ 線型独立なベクトルの個数 (3 本の座標軸の方向の幾何ベクトル $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$).

問題 4 $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ の代わりに $\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ を基底として選べるでしょうか ?

★ 本書 p.220 問 3.13（改題）

例

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}(-3) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}4 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}5$$

の代わりに

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}t_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}t_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}t_3$$

と表せるかどうかを調べるために，掃き出し法で座標 t_1，t_2，t_3 を求めよ．

$\boxed{\text{解}}$ 一つの行は一つの方程式を表すことに注意します. ★ 本書 pp.67 – 68

$$\begin{cases} -1t_1 - 1t_2 + 0t_3 = -3 \\ 1t_1 + 0t_2 + 1t_3 = 4 \\ 0t_1 + 1t_2 + 2t_3 = 5 \end{cases}$$

順序
$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 0 & & 0 \\ \downarrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & & 1 & & 0 \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & & \uparrow \\ 0 & & 0 & \rightarrow & 1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行の入れ換え}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

◀ -1 を 0 に書き換えるには?
丸数字は直前の式の番号.

$$\xrightarrow{③+①} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

◀ -1 を 0 に書き換えるには?
丸数字は直前の式の番号.

$$\xrightarrow{③+②} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

◀ -1 を 0 に書き換えるには?
丸数字は直前の式の番号.

$$\xrightarrow{③\ \times\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

◀ 3 を 1 に書き換えるには?
丸数字は直前の式の番号.

$$\xrightarrow[\ ]{\substack{①-③ \\ ②-③\times 2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

◀ 1, 2 を 0 に書き換えるには?
丸数字は直前の式の番号.

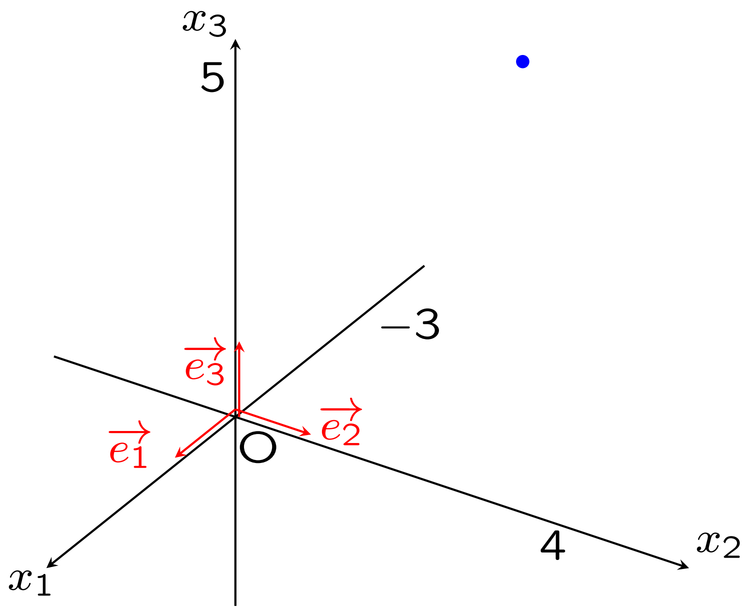
$$\begin{cases} 1t_1 + 0t_2 + 0t_3 = 2 \\ 0t_1 + 1t_2 + 0t_3 = 1 \\ 0t_1 + 0t_2 + 1t_3 = 2 \end{cases}$$

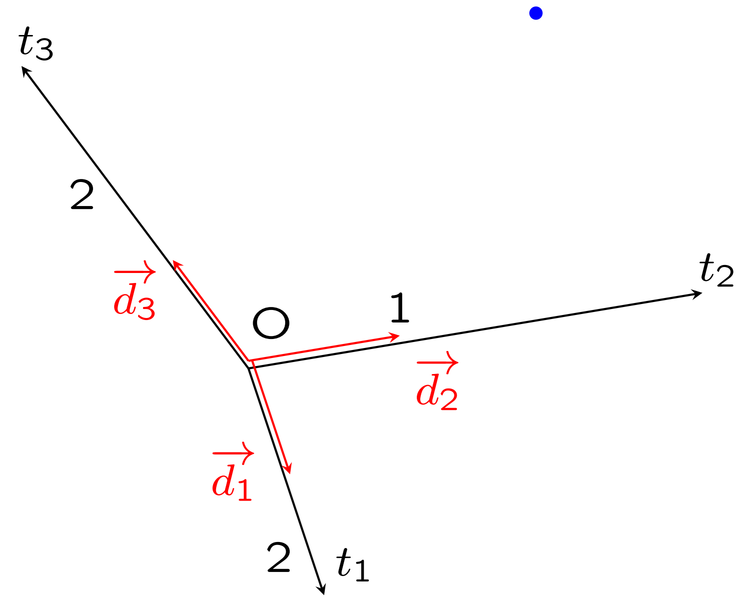
$$\begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 1 \\ t_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} 2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} 2.$$

座標

基底





注意

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}(-3) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}4 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}5.$$

座標

基底

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}2.$$

座標

基底

正規直交基底 $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ で表すと，座標の値は成分の値と一致します．

$\boxed{\text{自習}}$ ★ 本書 p.224 問 3.14，3.15，p.226 16.1

問題５ ２次多項式の集合の基底を答えてください． ★ 本書 p.225 問3.16(改題)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cdots \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^3$

$\boxed{\text{線型空間}}$

同じ構造

２次多項式の集合

$0x^2 + 0x + 0$
$0x^2 + 0x + 1$
$0x^2 + 1x + 0$
$1x^2 + 0x + 0$

$\cdots$

1
乗法の単位元

0
加法の単位元

$3 \qquad \sqrt{2}$
$\cdots$

スカラー(倍率)の集合

$\boxed{\text{体}\ \mathbb{R}}$

例　数ベクトルの集合を比べて，２次多項式の集合を理解します．

座標

$$\begin{pmatrix}2\\10\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}2 + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}10 + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}(-8).$$

基底

基底 $\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$

座標

$$2x^2 + 10x^1 + (-8)x^0$$

基底

基底 $\langle x^2, x^1, x^0 \rangle$

２次多項式　実係数

$$\dim P(2;\mathbb{R}) = 3.$$

polynomial

実係数２次多項式の集合は $\langle x^2, x^1, x^0 \rangle$ を基底とする３次元線型空間です．

長さの集合（1次元線型空間）

★ 本書 p.230 16.3

$0\,\vec{i}$

$1\,\vec{i}$　　$-5\,\vec{i}$

$\cdots$

$3\,\vec{i}$

x 軸方向の
幾何ベクトル
の集合

$\boxed{\text{線型空間}}$

同じ構造

長さの集合

0 mm

1 mm

-5mm

3 mm

$\cdots$

1
乗法の単位元

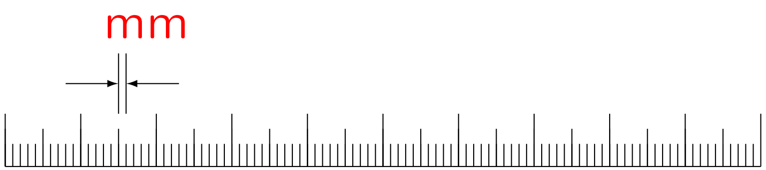
0
加法の単位元

3　　$\sqrt{2}$

$\cdots$

スカラー(倍率)の集合

$\boxed{\text{体 } \mathbb{R}}$



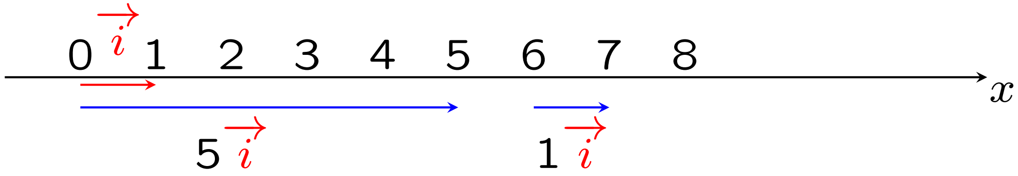
5 × mm
= 5 mm

1 × mm
= 1 mm

mm と 1 mm とのちがい

mm 単位長さ（目盛と目盛との間隔）

1 mm 物体の長さ（単位長さ mm の 1 倍）



重要 $\vec{i}$ と mm は同じ役目.

長さと幾何ベクトルは,同じ演算規則にしたがいます.

$$8\ \mathrm{mm} + (-5)\ \mathrm{mm} = 3\ \mathrm{mm}. \qquad 8\vec{i} + (-5)\vec{i} = 3\vec{i}.$$

長さの集合は mm を基底とする 1 次元線型空間です.

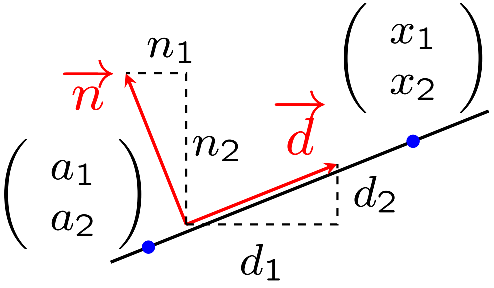
幾何ベクトルの集合は $\vec{i}$ を基底とする 1 次元線型空間です.

補足　図形の表し方　★ 本書 p.227 16.2

問題6 「直線とはどのような図形か」「円とはどのような図形か」を答えてください.

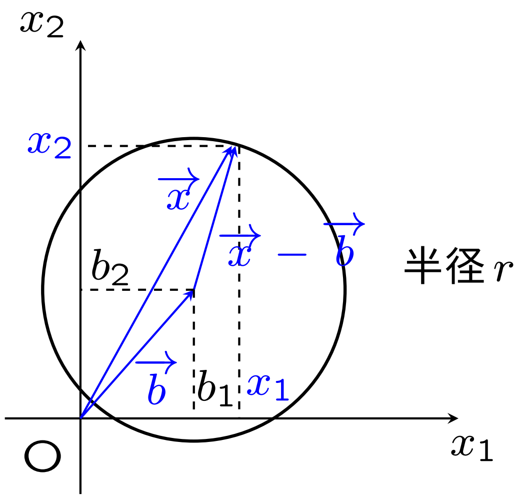
直線とは

「傾きが一定の図形」



円とは

「特定の点からの距離が一定の点全体」



図形の意味を式に翻訳する２通りの方法

方程式 $n_1x_1 + n_2x_2 = C.$ $\qquad (x_1 - b_1)^2 + (x_2 - b_2)^2 = r^2$

★ 詳細は本書 p.143 参照. $\qquad$ (三平方の定理).

ベクトル表示 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} t.$ $\quad \|\vec{x} - \vec{b}\| = r.$ $\quad \left\| \begin{pmatrix} x_1 - b_1 \\ x_2 - b_2 \end{pmatrix} \right\| = r.$

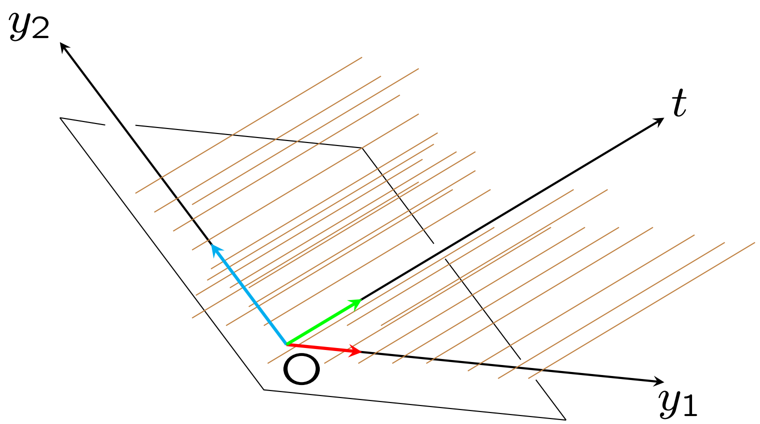
$\boxed{\text{参考}}$ 次元定理 ★ 本書 pp.335 – 338, ダイジェスト版 **18** pp.25 – 28

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = y_1 \\ -3x_1 + 2x_2 + 1x_3 = y_2 \end{cases}$$

の解ベクトル

$\boxed{\text{幾何の見方}}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{19} \\ \frac{3}{19} \\ 0 \end{pmatrix} y_1 + \begin{pmatrix} -\frac{5}{19} \\ \frac{2}{19} \\ 0 \end{pmatrix} y_2}_{\text{原点を通る平面 (2次元部分線型空間) のベクトル表示}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{19} \\ -\frac{11}{19} \\ 1 \end{pmatrix} t}_{\text{原点を通る直線 (1次元部分線型空間)}}}^{\text{空間 (3次元線型空間) のベクトル表示}} . \quad y_1,\ y_2,\ t \text{ は座標.}$$



$$\begin{pmatrix} \frac{2}{19} \\ \frac{3}{19} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{5}{19} \\ \frac{2}{19} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{19} \\ -\frac{11}{19} \\ 1 \end{pmatrix}$$ の方向の斜交座標軸

空間を $\begin{pmatrix} -\frac{1}{19} \\ -\frac{11}{19} \\ 1 \end{pmatrix}$ の方向で特定の点

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{19} \\ \frac{3}{19} \\ 0 \end{pmatrix} y_1 + \begin{pmatrix} -\frac{5}{19} \\ \frac{2}{19} \\ 0 \end{pmatrix} y_2$$

（直線ごとに y_1,y_2 は定数）

を通る直線の集まり

と考えます．

$\boxed{\text{写像の見方}}$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = y_1 \\ -3x_1 + 2x_2 + 1x_3 = y_2 \end{cases}$$

像は連立１次方程式が解を持つような定数項 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ の集合.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{\text{出力}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{写像}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\text{入力}}.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{19} \\ \frac{3}{19} \\ 0 \end{pmatrix} y_1 + \begin{pmatrix} -\frac{5}{19} \\ \frac{2}{19} \\ 0 \end{pmatrix} y_2}_{\text{像で決まる集合（２次元部分線型空間）}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{19} \\ -\frac{11}{19} \\ 1 \end{pmatrix} t}_{\text{核（１次元部分線型空間）}}}^{\text{定義域（３次元線型空間）}}$$

$\boxed{\text{次回のための予習}}$

内積線型空間 本書 3.6 節