数学ターミナル　線型代数の発想

ダイジェスト版　**25**

前回まで

例　3元1次方程式　★ ダイジェスト版**21** pp.3－5(再掲), ダイジェスト版**22** p.13

$$1x_1+1x_2+1x_3=0$$

の解

(I) 演算　数ベクトルの加法

$$\begin{array}{cccccccc}
 & \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} & t_1 & + & \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} & t_2\\
 & & & & \Cap & & & \Cap\\
 & \Cap & & \Cap & \mathbb{R} & & \Cap & \mathbb{R}\\
\text{集合} & \mathbb{R}^3 & & \mathbb{R}^3 & & & \mathbb{R}^3 &
\end{array}$$

(II) 演算　数ベクトルのスカラー倍

を表すために, 演算 (I), (II) が自由にできる集合として線型空間 $\mathbb{R}^3$ を導入し,
そのあとで解だけを集めた部分線型空間を考えました.

今回　内積 — 連立１次方程式の検算の観点　★ 本書 p.232

導入

３元１次方程式

$$2x_1 + 5x_2 - 1x_3 = 0.$$

問題 1　解ベクトルを求めてください．

$\boxed{解}$　$x_1 = s$, $x_2 = t$ (s,tは任意の実数)

とおくと

$$x_3 = 2s + 5t$$

となります．解ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} t$$

です．

★ 解は数ベクトルの加法・スカラー倍で表せることに着目する．

Q　どのように検算するといいでしょうか ？

$\boxed{\text{問題 2}}$

$$2x_1 + 5x_2 - 1x_3 = 0.$$

の左辺を内積で表した式に問題 1 の解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} t$$

を代入して，解が正しいかどうかを確かめてください．

★ 本問は，

「内積にどのような演算規則を決めないと検算できないか」

を考えるための問題です．

$\boxed{\text{解}}$ つぎのように内積の演算規則を規定すると検算できます.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} t \right\}$$

◀ $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ に解を代入した.

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} s \right\} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} t \right\}$$

内積の分配法則を規定する. ★ 本書 p.235(ii)

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} s + \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} t$$

内積のスカラー倍を規定する. ★ 本書 p.235(iii)

$$= 0s + 0t$$
$$= 0.$$

内積線型空間

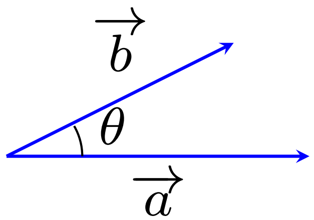
内積(演算規則)を規定した線型空間(集合)

★ 内積線型空間の定義は本書 p.235 参照.

内積の幾何的性質

ねらい

- 直交する幾何ベクトルの内積は０であるのはなぜか?
- $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\|\cos\theta$ が成り立つのはなぜか?

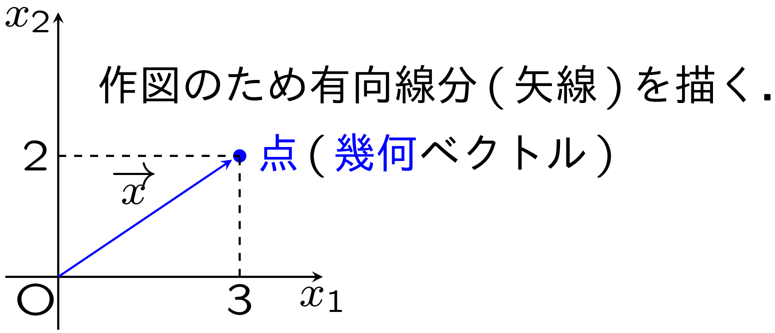


これらの理由を理解するために,ベクトルのノルム(大きさ)から始めます.

(1) ベクトルのノルム

★ 本書 p.237

- 幾何ベクトル $\overrightarrow{x}$ のノルムとは ？



$$\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{3^2 + 2^2}.$$ ◀ 三平方の定理

- 数ベクトル $\mathbb{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ のノルムとは ？

$$\mathbb{x} \cdot \mathbb{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3^2 + 2^2$$

だから

$$\sqrt{\mathbb{x} \cdot \mathbb{x}} = \sqrt{3^2 + 2^2}.$$

は幾何ベクトルのノルム $\|\overrightarrow{x}\|$ と一致します.

数ベクトルのノルムは自分自身の内積で表し,

$$\|\mathbb{x}\| = \sqrt{\mathbb{x} \cdot \mathbb{x}}$$

と決めます.

$\boxed{\text{問題 3}}$ $\mathbb{x} \cdot \mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ のとき，

$$\|\mathbb{x}\| = \sqrt{\mathbb{x} \cdot \mathbb{x}}$$

の右辺を和の記号 $\sum$ で表してください．

$\boxed{解}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = {x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2$$

だから

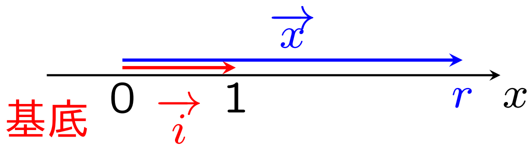
$$\|\mathbb{x}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2}$$

と表せます．

★ 番号は i，j，k，ℓ，m，n で表します．★ 本書 p.4 [注意 3]

(2) ベクトルをノルムで表す方法

$\boxed{\textbf{問題4}}$ $\overrightarrow{x}$ をノルム $\|\overrightarrow{x}\|$ で表してください．



ノルム $\|\overrightarrow{i}\| = 1.$

★ 30秒間 考えてわからなかったら，本書 p.238 問3.17 を見よ．

$\boxed{\text{解}}$

手順1 「$\overrightarrow{x}$ は $\overrightarrow{i}$ の r 倍である」という文を式に翻訳します．

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{i}\, r.$$

$\overrightarrow{i}$ で x 軸の方向であること，r で大きさを表します．

手順2 r を $\overrightarrow{x}$ のノルムで表します．

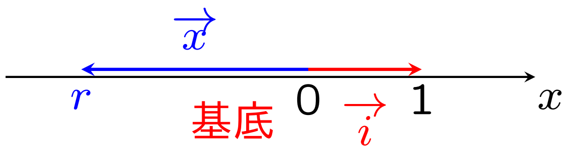
$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{i}\, \|\overrightarrow{x}\|.$$

手順3 $\overrightarrow{i}$ を $\overrightarrow{x}$ のノルムで表します．

$$\overrightarrow{x} = \frac{\overrightarrow{x}}{\|\overrightarrow{x}\|} \|\overrightarrow{x}\|.$$

★ 図を見よ．

$\boxed{\textbf{問題 5}}$ $\overrightarrow{x}$ をノルム $\|\overrightarrow{x}\|$ で表してください.



ノルム $\|\overrightarrow{i}\| = 1.$

解　**手順１**「$\overrightarrow{x}$ は $\overrightarrow{i}$ の r 倍である」という文を式に翻訳します．

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{i}\, r.$$

手順２　r を $\overrightarrow{x}$ のノルムで表します．

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{i}(-\|\overrightarrow{x}\|).$$

◀ $r < 0$ に注意．$r = -\|\overrightarrow{x}\|$.

手順３　$\overrightarrow{i}$ を $\overrightarrow{x}$ のノルムで表します．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x} &= \frac{-\overrightarrow{x}}{\|\overrightarrow{x}\|}(-\|\overrightarrow{x}\|) \\ &= \frac{\overrightarrow{x}}{\|\overrightarrow{x}\|}\|\overrightarrow{x}\|.\end{aligned}$$

◀ $-\|\overrightarrow{x}\|$ を有向距離という．

◀ 問題４と同じ．

★ 図を見よ．$\overrightarrow{x}$ は $\overrightarrow{i}$ の反対向きであることに注意．$-\overrightarrow{x}$ は x 軸の正の向き．$\overrightarrow{i} = \dfrac{-\overrightarrow{x}}{\|\overrightarrow{x}\|}$.

★ 問題**４，５** で，$\overrightarrow{x}$ の向きに関係なく，$\overrightarrow{x}$ の表し方は同じであることがわかったことになる．

(3) ベクトルの直交条件

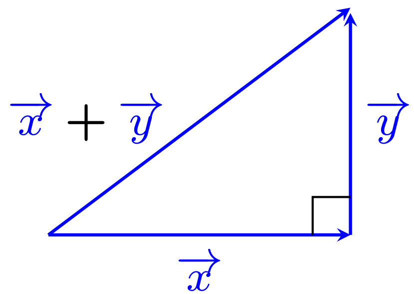
$\boxed{\text{基本}}$ ① 三平方の定理

② ノルムの２乗は自分自身の内積で表せる．

$\boxed{\text{問題6}}$ 直交する幾何ベクトル $\overrightarrow{x}$ と $\overrightarrow{y}$ との内積は

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = 0$$

であることを示してください．

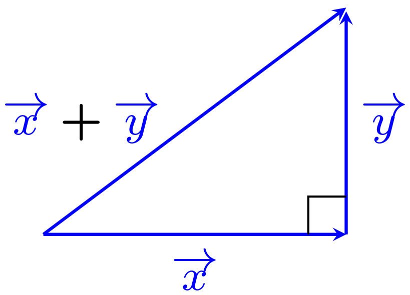


★ 三平方の定理で $\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|^2$, $\|\overrightarrow{x}\|^2$, $\|\overrightarrow{y}\|^2$ の関係を式で表す．

★ $\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|^2$ を内積で表す．

$\boxed{\text{解}}$

★ 本書 p.239 問3.18



三平方の定理が成り立つから

$$\|\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}\|^2 = \|\overrightarrow{x}\|^2 + \|\overrightarrow{y}\|^2.$$

ノルムの２乗は自分自身の内積だから

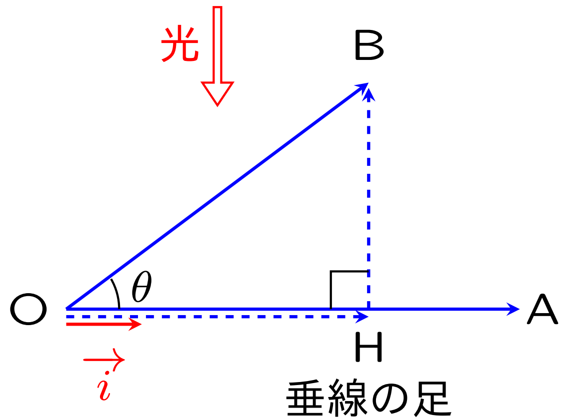
$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}\|^2 &= (\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y})\cdot(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}) \\ &\underset{\text{分配法則}}{=} \overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{x}+\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}+\overrightarrow{y}\cdot\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}\cdot\overrightarrow{y} \\ &\underset{\text{内積の交換法則}}{=} \|\overrightarrow{x}\|^2 + 2\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y} + \|\overrightarrow{y}\|^2.\end{aligned}$$

これらの式を比べると

$$\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y} = 0$$

です．

(4) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\|\cos\theta$.



$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の射影.

単位ベクトルのノルム $\|\overrightarrow{i}\| = 1$.

問題7 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} + \overrightarrow{\mathrm{HB}}$ を代入し, 内積の分配法則を使って

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\|\|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\|\cos\theta$$

を示してください.

$\boxed{解}$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB}) \\
&\overset{分配法則}{=} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} + \underbrace{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{HB}}_{0} \\
&= \vec{i}\,\|\overrightarrow{OA}\| \cdot \vec{i}\,\|\overrightarrow{OH}\| \\
&= \|\overrightarrow{OA}\| \underbrace{\|\overrightarrow{OB}\| \cos\theta}_{\|\overrightarrow{OH}\|}.
\end{aligned}
$$

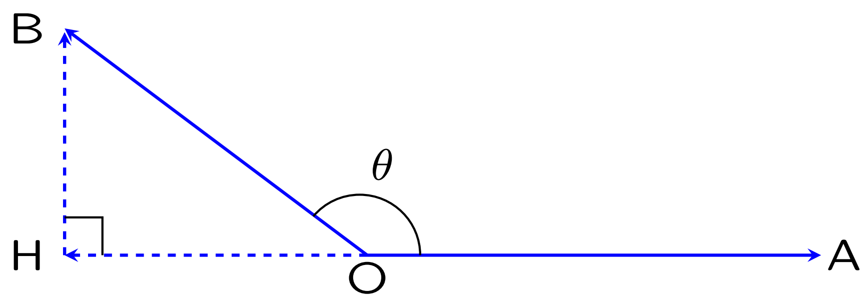
◀ $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{HB}$.

◀ 問題 4

◀ $\vec{i} \cdot \vec{i} = \|\vec{i}\|^2 = 1$.
自分自身の内積はノルムの２乗.

★ 別解　本書 p.239 問 3.19

注意



$$
\|\overrightarrow{OH}\| = \underbrace{\overbrace{\|\overrightarrow{OB}\|}^{正}\ \overbrace{\cos\theta}^{負}}_{負}.
$$

（有向距離）

まとめ

三平方の定理

ノルムの２乗は自分自身の内積

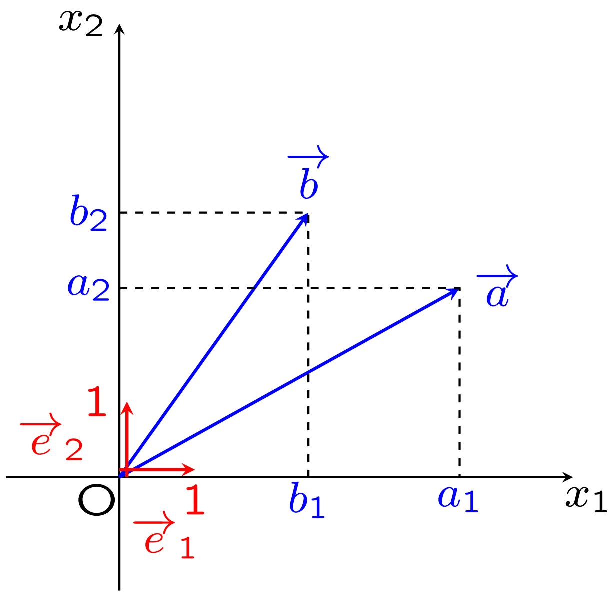
→ (3) 直交条件

(4) 射影

→ $\cos\theta$

(5) 内積を成分で表す方法

★ 本書 p.241 問3.20



自分自身の内積はノルムの２乗だから

$$\overrightarrow{e}_1 \cdot \overrightarrow{e}_1 = \|\overrightarrow{e}_1\|^2 = 1,$$

$$\overrightarrow{e}_2 \cdot \overrightarrow{e}_2 = \|\overrightarrow{e}_2\|^2 = 1.$$

$$\overrightarrow{e}_1 \cdot \overrightarrow{e}_2 \overset{\text{直交}}{=} 0.$$

Kronecker（クロネッカー）のデルタ

$$\overrightarrow{e}_i \cdot \overrightarrow{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{for } i = j \\ 0 & \text{for } i \neq j \end{cases}$$

問題 8 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ を $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$ で表し，内積の分配法則を使って $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ を求めてください．

★ 和の記号 $\sum$ で表せ．

$\boxed{\text{解}}$

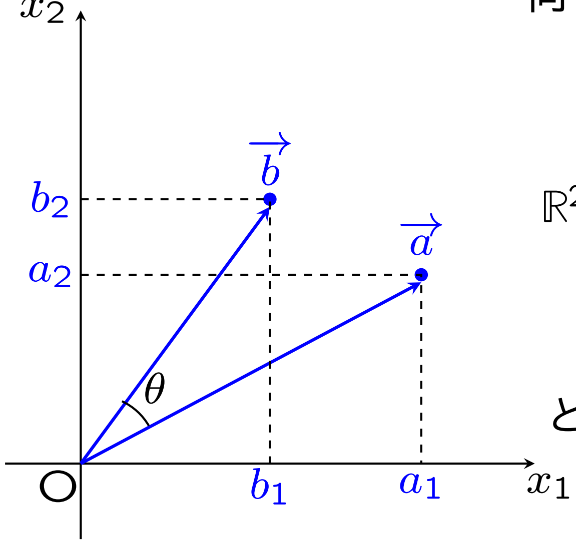
$$
\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= (\vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2) \cdot (\vec{e}_1 b_1 + \vec{e}_2 b_2) \\
&\overset{\text{分配法則}}{=} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 a_1 b_1 + \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 a_1 b_2 \\
&\quad + \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 a_2 b_1 + \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 a_2 b_2 \\
&= a_1 b_1 + a_2 b_2 \\
&= \sum_{k=1}^{2} a_k b_k .
\end{aligned}
$$

	大文字	小文字
デルタ	Δ	δ
シグマ	$\sum$	σ

内積とスカラー積

★ 本書 p.76, p.234

内積



同じ平面内の二つの幾何ベクトルの間の演算

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\| \cos\theta.$$

$\mathbb{R}^2$ は平面のあらゆる点を表す数ベクトルの集合であり，

$$\mathbb{a} \cdot \mathbb{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

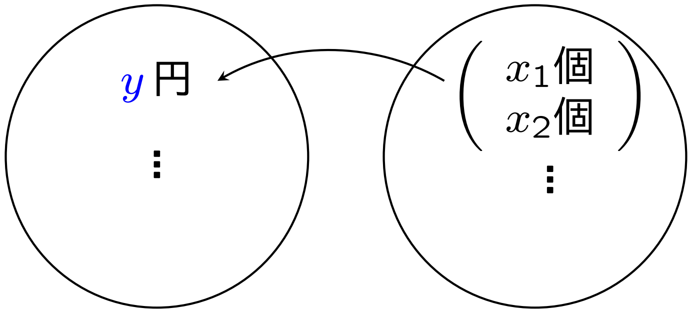
と表すこともできます（問題８）.

スカラー積

(a_1円 / 個　a_2円 / 個)

価格空間

「空間」は演算規則のある集合



個数空間

２種類の商品の個数の組

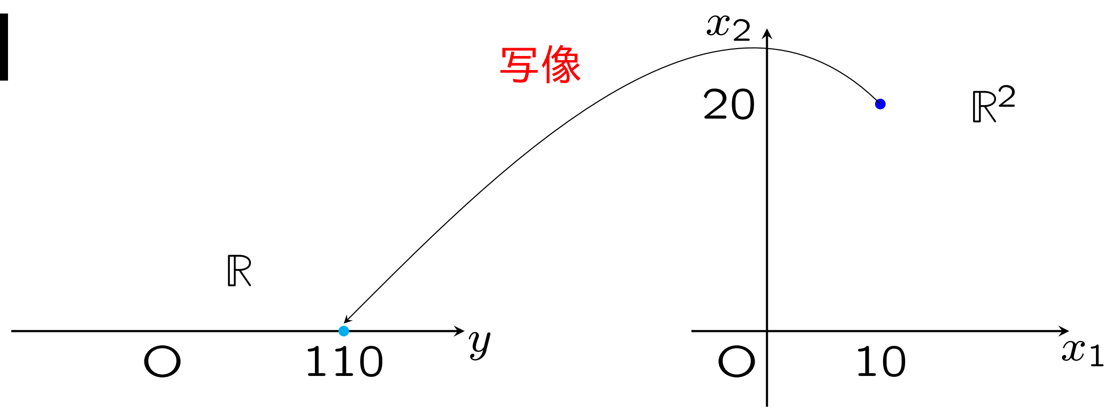
出力　　写像　　入力

$$y\text{円} = (a_1\text{円 / 個}\quad a_2\text{円 / 個}) \begin{pmatrix} x_1\text{個} \\ x_2\text{個} \end{pmatrix}.$$

$$= (a_1 x_1 + a_2 x_2)\text{円}.$$

積がスカラー量.

例



$\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^2$ は異なる集合．

x_1，x_2，y は数．

$$110\text{円} = (5\text{円}/\text{個}\ \ 3\text{円}/\text{個})\begin{pmatrix} 10\text{個} \\ 20\text{個} \end{pmatrix}.$$

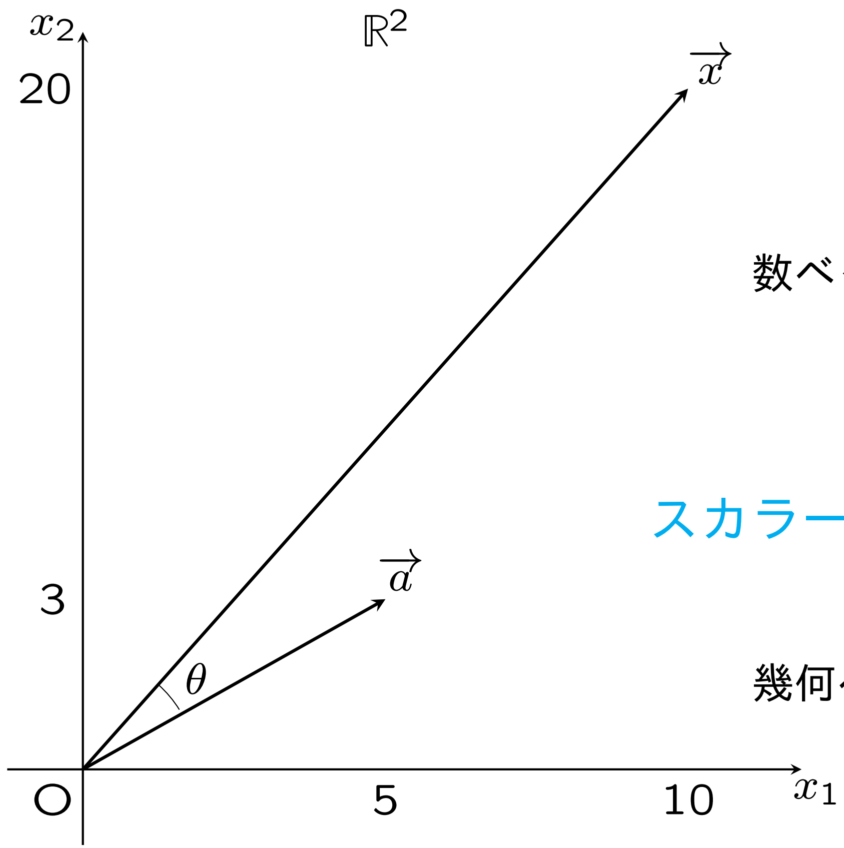
量の関係式　$y\text{円} = \mathbb{a}'\text{円}/\text{個}\ \ \mathbb{x}\text{個}$　　$\mathbb{a}'$ はヨコベクトル量を表す．

を単位で割ると，

数の関係式　$y = \mathbb{a}'\ \mathbb{x}$　　比例の拡張

になります．

$$\text{スカラー} = \underbrace{\text{ヨコベクトル} \times \text{タテベクトル}}_{\text{スカラー積}}.$$



同じ集合(平面は点の集合)の
二つのベクトルどうしの積.

数ベクトル $\quad \mathbb{a} \cdot \mathbb{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$ $\quad \cdot$ は dot と読む.

$$= 5 \times 10 + 3 \times 20.$$

$$\text{スカラー} = \underbrace{\text{タテベクトル} \times \text{タテベクトル}}_{\text{内積}}.$$

幾何ベクトル $\quad \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{x} = \|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{x}\| \cos\theta$

$$= \sqrt{5^2 + 3^2}\sqrt{10^2 + 20^2} \cos\theta.$$

$|\ \ |$ 数の絶対値 例 $|-3| = 3.$

$\|\ \ \|$ ノルム (ベクトルの大きさ)

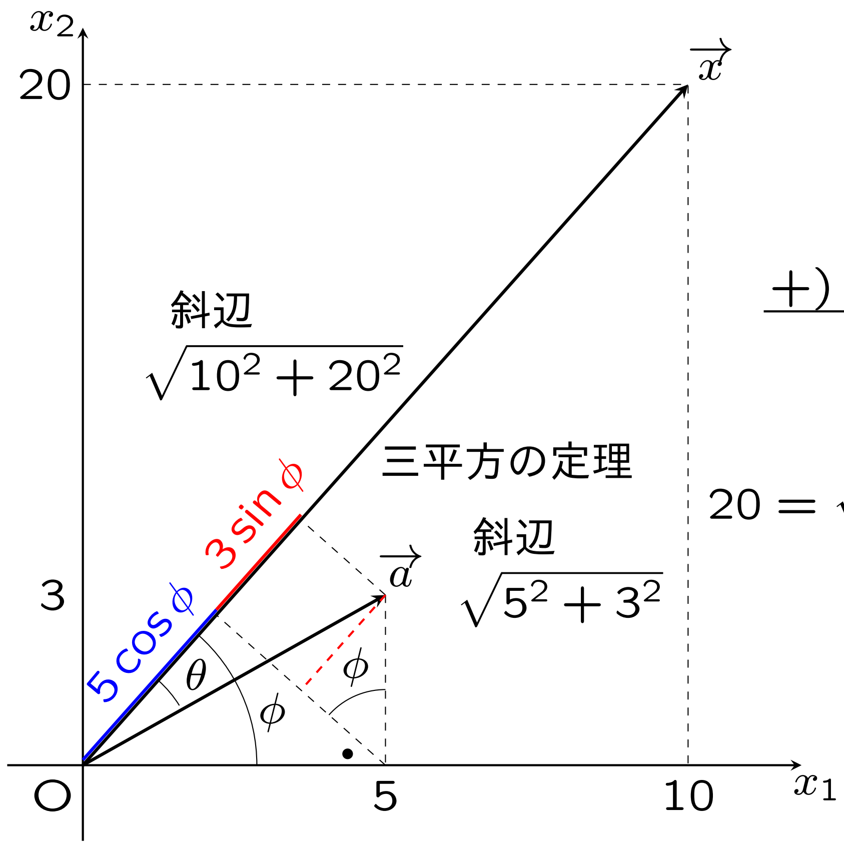
$\boxed{\text{問題 9}}$ $5 \times 10 + 3 \times 20 = \sqrt{5^2 + 3^2}\sqrt{10^2 + 20^2}\cos\theta$

が成り立つことを確かめてください.

★ 図でイメージを描く.

$\boxed{\text{解}}$

★ 本書 p.76



$$10 = \sqrt{10^2+20^2}\cos\phi$$

$$20 = \sqrt{10^2+20^2}\sin\phi$$

$$
\begin{array}{rl}
 & 5\times 10 = 5\times\sqrt{10^2+20^2}\cos\phi \\
+) & 3\times 20 = 3\times\sqrt{10^2+20^2}\sin\phi \\
\hline
 & \sqrt{10^2+20^2}\,\underbrace{(5\cos\phi + 3\sin\phi)}_{\sqrt{5^2+3^2}\cos\theta}
\end{array}
$$

$\boxed{\text{発展}}$ 関数内積 ★ 本書 p.245, pp.253 – 256

区間 $[a, b]$ 上で定義した実連続関数 f, g に対して

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

◀ 等号は定義を表す. ★ 本書 p.3

は内積線型空間の条件をみたすので, 関数内積といいます.

★ 量子力学では $< f|g >$ という記号で表し, $< f|$ をブラベクトル, $|g >$ をケットベクトルという.

イメージ $\mathbb{a} \cdot \mathbb{b} = \sum_{k=1}^{2} a_k b_k$ 番号が離散変数 (トビトビ) の場合

$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ 番号が連続変数 (ベター) の場合 (k 番の代わりに x 番)

$\sum_{k=1}^{2}$ と $\int_a^b$ はどちらも「どこからどこまで足し合わせる」という意味を表します.

自習

本書 p.244 問 3.22, p.249 17.1, p.250 17.2, 17.3

次回のための予習

線型変換　本書 4.1 – 4.4 節