数学ターミナル　線型代数の発想

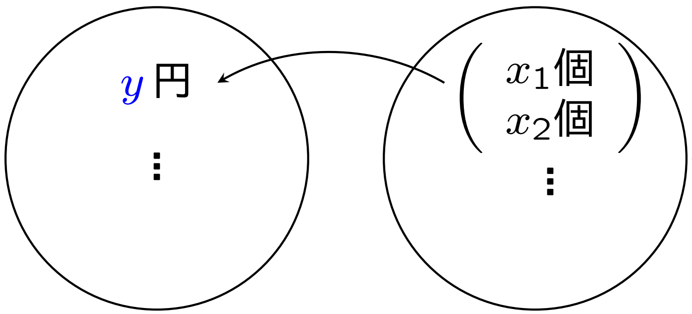
ダイジェスト版　26

前回まで

スカラー積　本書 p.234

$(a_1$円 / 個　a_2円 / 個$)$

値域
(価格空間)



定義域
(個数空間)

出力　写像　入力

$$y\,円 = (a_1 円/個\quad a_2 円/個)\begin{pmatrix} x_1 個 \\ x_2 個 \end{pmatrix}$$
$$= (a_1x_1 + a_2x_2)\,円.$$

積がスカラー量.

空間は「価格の集合」「個数の集合」の意味.

今回

★本書 p.258

$\boxed{線型変換}$　定義域と値域とが同じ写像（「変換の線型性」とは何か ?)

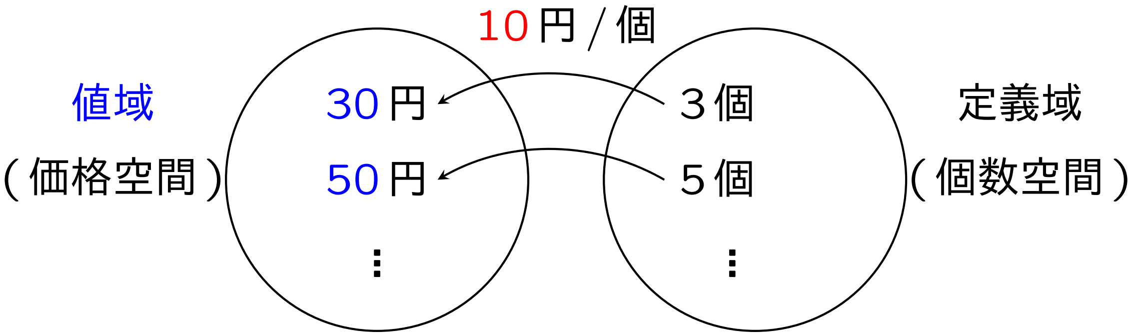
注意「変換」は「式の変形」ではありません.

「変換」と「変形」とが似た熟語だから混同するようです.

ねらい　① 線型性の意味　② 線型変換の具体例

基本

写像　(対応の規則)



量の関係式：y円 $=$ 10円/個 $\times\ x$ 個　　　数の関係式：$y = 10x$

y $\in$ 価格空間，x $\in$ 個数空間（異なる集合）

$y \in \mathbb{R}$，$x \in \mathbb{R}$（同じ集合）

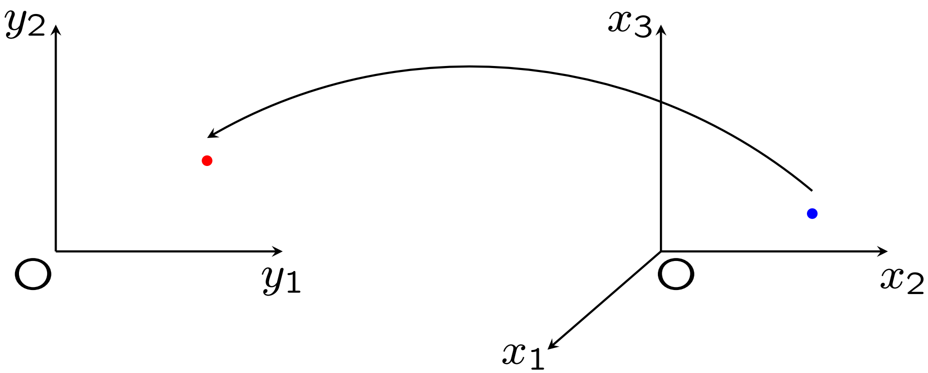
「空間」は演算規則を決めた集合.

写像

例 1

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

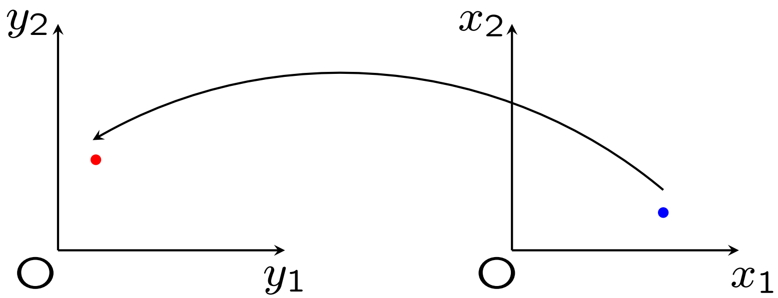
$$\underset{\mathbb{R}^2}{\cap} \qquad \underset{\mathbb{R}^3}{\cap}$$

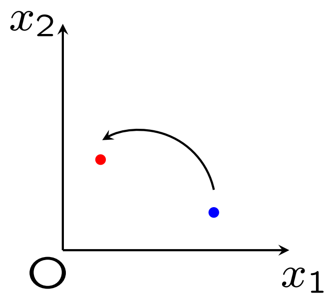


例 2

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

$$\underset{\mathbb{R}^2}{\cap} \qquad \underset{\mathbb{R}^2}{\cap}$$





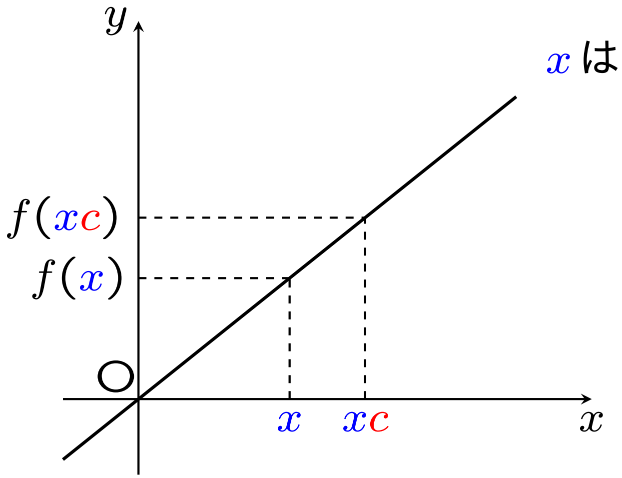
同じ平面内で点の入れ換えとみなして
変換ともいう.

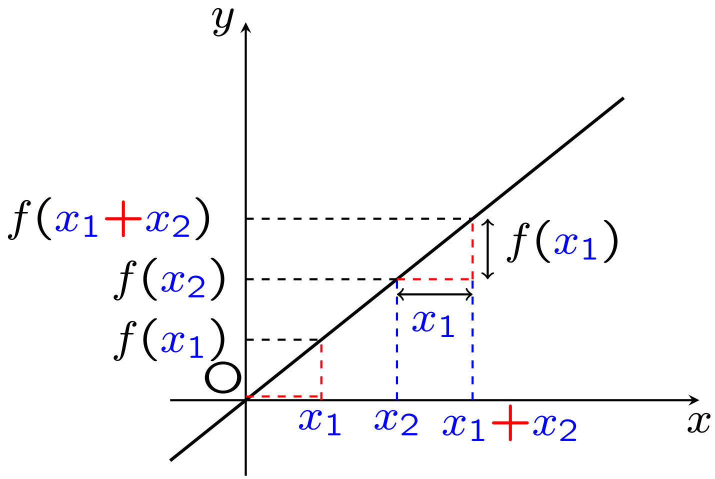
線型変換

$\boxed{\text{復習}}$ 線型性：比例に成り立つ二つの性質 ★本書 p.22, ダイジェスト版 **3** p.4

x は変数名(座標軸の名称).

x は数値の代表.





x を c 倍すると, $f(x)$ も c 倍になる.

$f(xc)$ は $f(x)$ の c 倍である.

① $f\underbrace{(x\ c)}_{\text{入力の}c\text{倍}} = \underbrace{\{f(x)\}\ c}_{\text{出力の}c\text{倍}}.$

x_1 と x_2 との和を入力すると,

$f(x_1)$ と $f(x_2)$ との和を出力する.

② $f\underbrace{(x_1+x_2)}_{\text{入力の和}} = \underbrace{f(x_1)+f(x_2)}_{\text{出力の和}}.$

比例　$y = ax.$

出力　入力

$\Downarrow$ 拡張

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

記号　$\mathbb{y} = A\mathbb{x}.$

比例の形

$$\begin{pmatrix} y_1 c \\ y_2 c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 c \\ x_2 c \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} {y_1}' \\ {y_2}' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} {x_1}' \\ {x_2}' \end{pmatrix} \right].$$

① スカラー倍

$$y = ax.$$
$$yc = a \cdot xc.$$

② 加法

$$\begin{array}{lr} & y = ax. \\ +) & y' = ax'. \\ \hline & y + y' = a(x + x'). \end{array}$$

① スカラー倍

$$\mathbb{y} = A\mathbb{x}.$$
$$\mathbb{y}c = A(\mathbb{x}c).$$

② 加法

$$\begin{array}{lr} & \mathbb{y} = A\mathbb{x}. \\ +) & \mathbb{y}' = A\mathbb{x}'. \\ \hline & \mathbb{y} + \mathbb{y}' = A(\mathbb{x} + \mathbb{x}'). \end{array}$$

$\boxed{\text{参考}}$

★本書 p.327

1次関数 $y = ax + b.$

$\Big\Downarrow$ 拡張

アファイン変換 $\mathbb{y} = A\mathbb{x} + \mathbb{b}.$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

例 $y = 2x + 3.$

$$y = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

だから

$$x' = x + \frac{3}{2}$$

とおくと

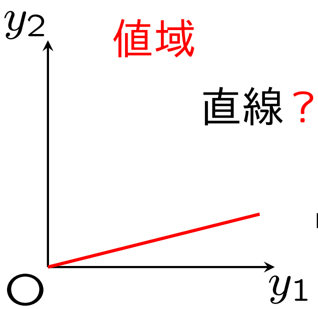
$$y = 2x'$$

となり，線型化できます．

正則線型変換

★本書 p.260

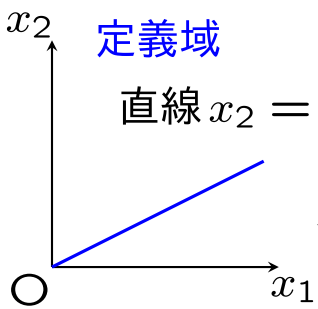
例 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$ 記号 $\mathbb{y} = A\mathbb{x}.$



値域

直線？上の点の集合

出力 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ の集合



定義域

直線 $x_2 = \dfrac{1}{2}x_1$ 上の点の集合

入力 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ の集合

問題 1 x_1 と x_2 との関係が $x_2 = \dfrac{1}{2}x_1$ のとき，y_1 と y_2 との関係を求めてください．

解

手順 1　定義域の直線の方程式をベクトル表示する．

$$x_2 = t \qquad (t \text{ は任意の実数})$$

とおくと

$$x_1 = 2t$$

だから

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

です．

手順２　$\mathbb{y} = A\mathbb{x}$ に入力する．

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t \right]$$

だから

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \end{pmatrix} t$$

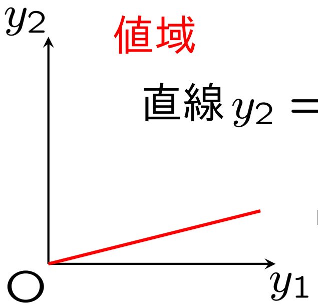
◀ 原点を通る直線のベクトル表示

です．

手順３　値域の直線のベクトル表示を直線の方程式に書き換える．

$$y_2 = \frac{1}{4} y_1.$$

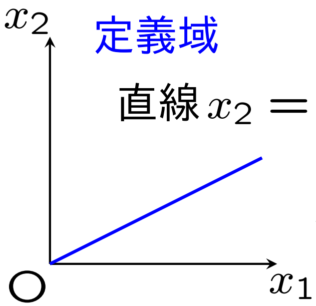
うつり先の点の集合は，この直線で表せる．



値域

直線 $y_2 = \frac{1}{4} y_1$ 上の点の集合

出力 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ の集合



定義域

直線 $x_2 = \frac{1}{2} x_1$ 上の点の集合

入力 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ の集合

問題２　出力から入力を探ることはできるでしょうか ？

★ $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16t \\ 4t \end{pmatrix}$ から $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ が求まるかどうかを確かめる.

★ Cramer の方法を使う.

$\boxed{\text{解}}$

$$\begin{pmatrix} 16t \\ 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

から $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を求めることができるかどうかを調べます．Cramer の方法で

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 = 16t \\ 1x_1 + 2x_2 = \ \ 4t \end{cases}$$

の解を求めると

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 16t & 4 \\ 4t & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = 2t, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 16t \\ 1 & 4t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = t$$

だから, 入力は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

◀ 原点を通る直線のベクトル表示

です.

$\boxed{\text{重要}}$ Cramerの方法で解を表すと,

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

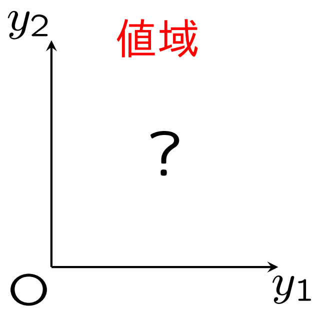
◀ 線型変換を表すマトリックス $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の行列式

だから, 入力を探ることができます.

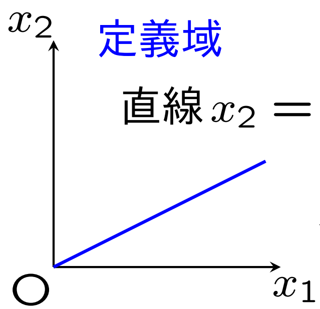
非正則線型変換

★本書 p.260

例 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$ 記号 $\mathbb{y} = A\mathbb{x}.$



出力 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ の集合



直線 $x_2 = \dfrac{1}{2}x_1$ 上の点の集合

入力 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ の集合

$\boxed{\text{問題 3}}$ x_1 と x_2 との関係が $x_2 = \dfrac{1}{2}x_1$ のとき，y_1 と y_2 との関係を求めてください．

$\boxed{解}$

手順 1　定義域の直線の方程式をベクトル表示する.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t.$$

◀ 問題 1 と同様.

手順 2　$\mathbb{y} = A\mathbb{x}$ に入力する.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t \right]$$

だから

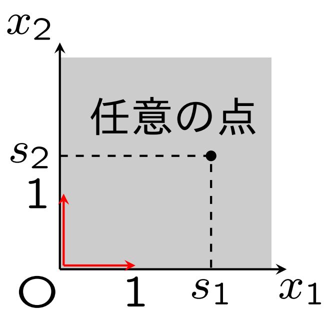
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \end{pmatrix} t.$$

◀ 原点を通る直線のベクトル表示

うつり先の点の集合は, この直線で表せる.

問題4 定義域が平面内のあらゆる点の集合のとき，y_1 と y_2 との関係を求めてください．

★ 平面のベクトル表示を入力する．



簡単のために，第１象限だけを描いてある．

解

手順1 定義域の平面をベクトル表示する.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} s_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} s_2 \quad (s_1,\ s_2 \text{ は任意の実数}).$$

手順2 $\mathbb{y} = A\mathbb{x}$ に入力する.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} s_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} s_2 \right] \\
&\overset{\text{分配法則}}{=} \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} s_1 \right] + \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} s_2 \right] \\
&\overset{\text{結合法則}}{=} \left[\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] s_1 + \left[\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] s_2.
\end{aligned}$$

★本書 p.39

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

だから

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} s_1 + \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} s_2 \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} (s_1 + 2s_2). \end{aligned}$$

◀ 原点を通る直線のベクトル表示

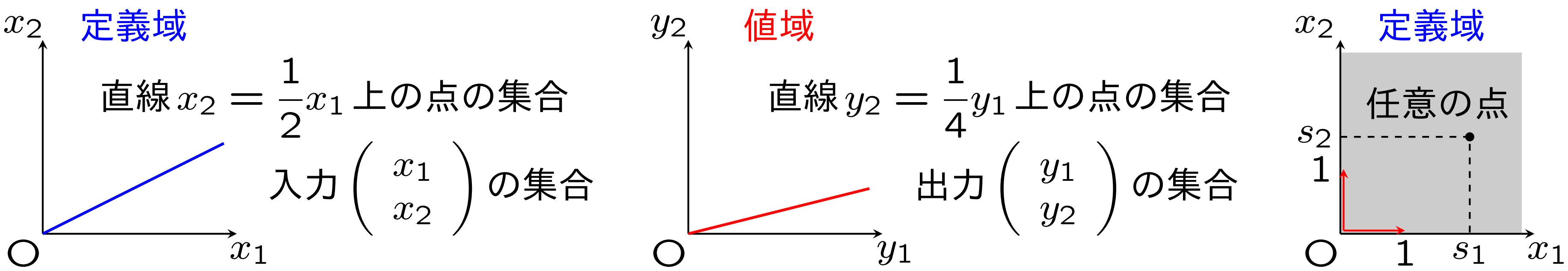
うつり先の点の集合は, この直線で表せる.

問題5　問題３と問題４とを比べて, 同じ直線であることを示してください.

$\boxed{解}$

問題３ $$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} 4t = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} s \qquad (s\text{ は任意の実数}).$$

問題４ $$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} (s_1 + 2s_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} s \qquad (s\text{ は任意の実数}).$$



簡単のために，第１象限だけを描いてある．

どちらの定義域でも値域は同じです．

問題６ 直線 $x_2 = \frac{1}{2}x_1$ 上のどの点が直線 $y_2 = \frac{1}{4}y_1$ 上の点 $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ にうつるでしょうか ？

★ 問題３を見よ．

$\boxed{\text{解}}$ 問題３で

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t \mapsto \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \end{pmatrix} t$$

であることがわかります.

$$\begin{pmatrix} 16 \\ 4 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

のとき

$$t = \frac{1}{4}$$

だから

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{問題7}}$ 平面内のどの点が直線 $y_2 = \dfrac{1}{4}y_1$ 上の点 $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ にうつるでしょうか ?

★ 問題4を見よ.

$\boxed{\text{解}}$　問題4で

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} s_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} s_2 \mapsto \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} (s_1 + 2s_2)$$

であることがわかります.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} (s_1 + 2s_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

のとき

$$s_1 + 2s_2 = 1$$

をみたすs_1, s_2の値の組は無数に存在するから, 入力した点を特定できません.

この理由を理解するために，つぎの問題を考えてください．

$\boxed{\textbf{問題 8}}$ $y_2 = \dfrac{1}{4} y_1$ のとき，$\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ で表せる線型変換で出力 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ から入力 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を探ることはできるでしょうか ?

★ Cramer の方法を使う．

$\boxed{解}$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

から $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を求めることができるかどうかを調べます．Cramer の方法で

$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 = y_1 \\ 1x_1 + 2x_2 = y_2 \end{cases}$$

の解を表すと，$y_2 = \dfrac{1}{4}y_1$ のとき

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 8 \\ y_2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{0}, \quad ◀ 不定 \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{0}. \quad ◀ 不定$$

重要　Cramer の方法で解を表すと,

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

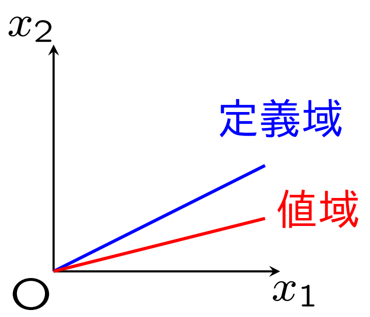
◀ 線型変換を表すマトリックス $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の行列式

だから, 入力を探ることができません.

まとめ

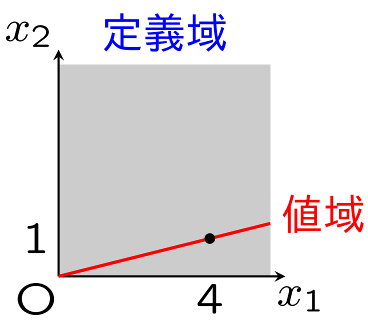
★本書 p.263

正則線型変換 $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$



逆変換が存在する.

非正則線型変換 $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$



逆変換が存在しない.

例

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{自習}}$

本書 p.260 問4.2, p.261 問4.3, p.262 問4.4, 問4.5

$\boxed{\text{次回のための予習}}$

正則線型変換の例 —— 回転, 鏡映　本書 4.5 節