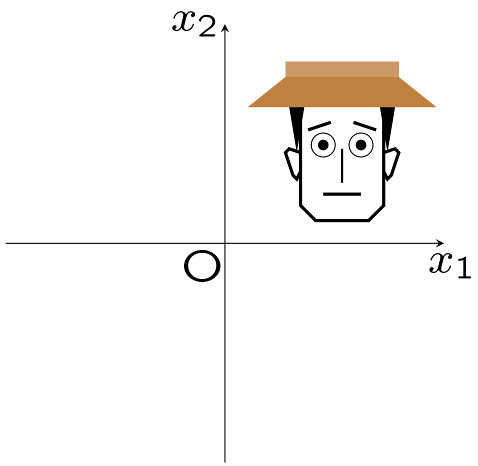
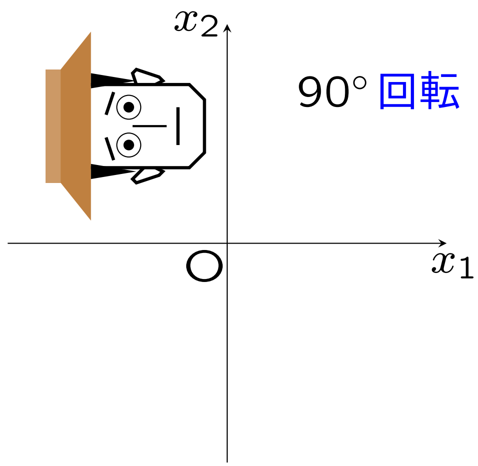
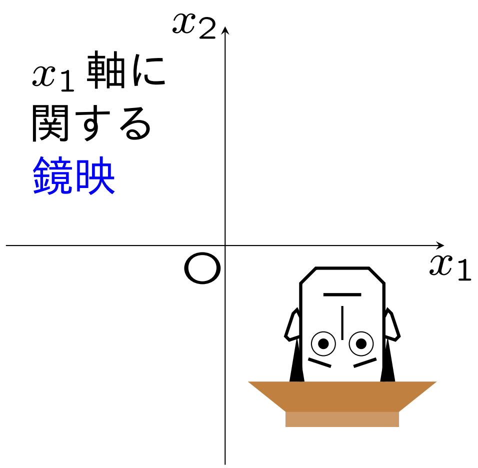
数学ターミナル　線型代数の発想

ダイジェスト版　**27**

今回のはじめに　線型変換の仕組みは画像の描画に応用できます．







前回　正則線型変換：逆変換が存在する線型変換

今回　正則線型変換の重要な例　　★ 本書 4.5 節

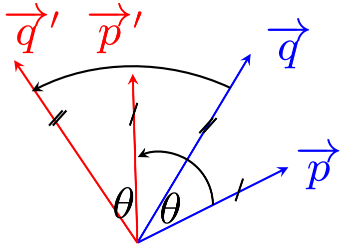
直交変換　幾何の見方：回転と鏡映

- 回転と鏡映を表すマトリックスの求め方
- なぜ直交というのか ？
- 逆変換を表すマトリックスの求め方

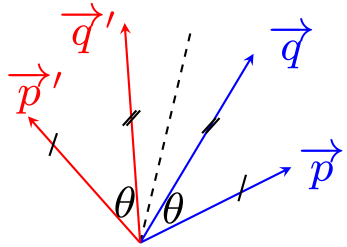
Q1　平面内で回転と鏡映に共通の特徴が見つかるでしょうか ？

★ 本書 pp.265 – 275

回転



鏡映　（折り返し）



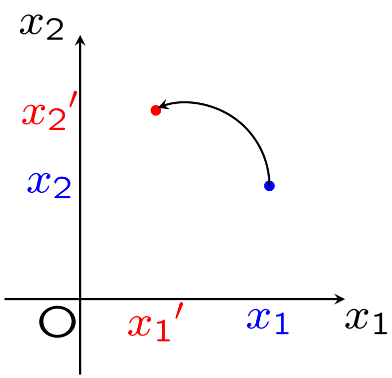
回転と鏡映は,

操作後の $\overrightarrow{p}'$, $\overrightarrow{q}'$ から操作前の $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$ に戻れるから

正則線型変換です.

「ノルム, 角が不変」だから

$$\boxed{\text{内積が不変}} \quad \begin{aligned} \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} &= \|\overrightarrow{p}\| \|\overrightarrow{q}\| \cos\theta \\ &= \|\overrightarrow{p}'\| \|\overrightarrow{q}'\| \cos\theta \\ &= \overrightarrow{p}' \cdot \overrightarrow{q}'. \end{aligned}$$



出力　　　　　　　　　　　　入力

$$\begin{pmatrix} {x_1}' \\ {x_2}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \mathbb{R}^2 \longleftarrow & \text{同じ集合} & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \end{array}$$

$\boxed{\text{変換}}$

記号 $\mathbb{x}' = U\mathbb{x}$

比例の型（線型）

Q2　変換が回転, 鏡映のとき, マトリックス U はどのように表せるでしょうか?

$$\boxed{\text{重要}} \quad \underset{\mathbb{e}_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \mapsto \underset{\mathbb{u}_1}{\begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix}}, \quad \underset{\mathbb{e}_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \mapsto \underset{\mathbb{u}_2}{\begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{pmatrix}}.$$

★ 本書 p.266, p.269

$\mathbb{e}_1$, $\mathbb{e}_2$ のうつり先

を求めると

$u_{11}, u_{21}, u_{12}, u_{22}$

がわかるから,

回転マトリックス,鏡映マトリックス

をつくることができます.

「ノルム,角が不変」に注意.

原点を通る軸を中心に反時計まわりにθ回転する操作　　★ 本書 pp.265 – 266

問題 1　$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で表せる幾何ベクトルのうつり先を求めてください.

★ 図 1 で, うつり先を調べる.

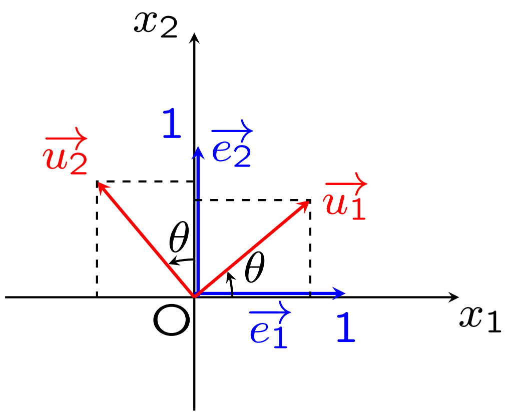


図 1

解　図２のように，基本ベクトルのうつり先がわかります．　★ 本書 p.266

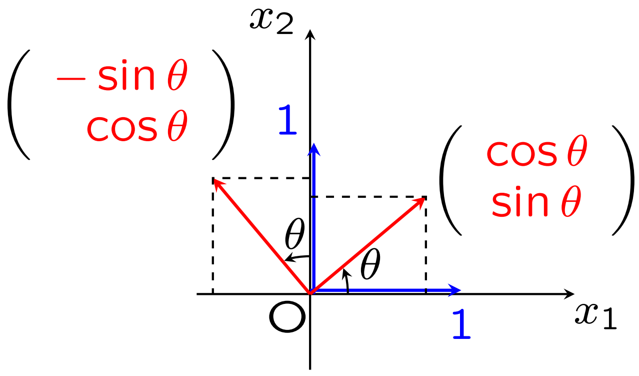


図２

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

問題２　幾何ベクトル $\overrightarrow{x}$ のうつり先を求めてください．

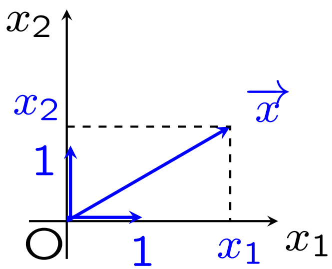


図３

★ 図３で基本ベクトルのうつり先も使って考える．

$\boxed{\text{解}}$ 図４のように,「長方形が回転する」と考えます.　★ 本書 p.266

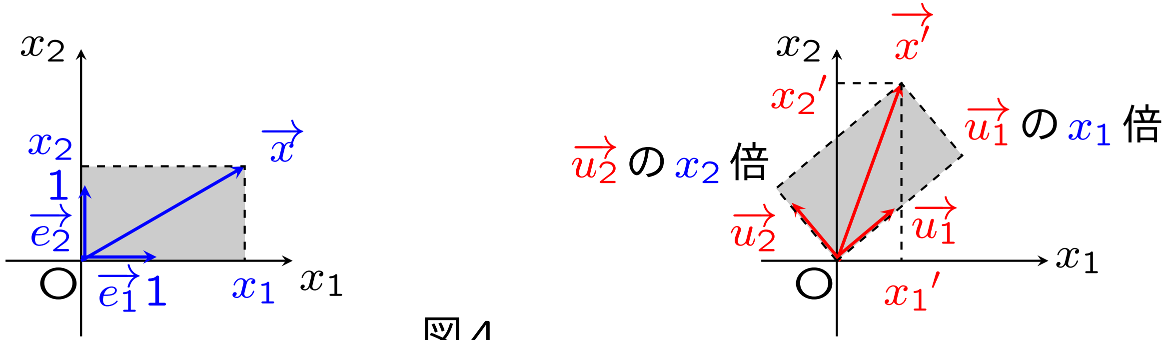


図４

$$
\begin{array}{ccccccc}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & x_1 & + & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & x_2. \\
\downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
\begin{pmatrix} {x_1}' \\ {x_2}' \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} & x_1 & + & \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} & x_2.
\end{array}
$$

$\boxed{\text{問題３}}$ 右辺をマトリックスと $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ との乗法で表してください.

$\boxed{解}$ $$\begin{pmatrix} {x_1}' \\ {x_2}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$ ★ 本書 p.267

★ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ を確かめることができます.

回転マトリックス

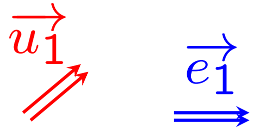
$$U = \begin{array}{cc} \mathbb{u}_1 & \mathbb{u}_2 \\ \left(\begin{array}{c} \cos\theta \\ \sin\theta \end{array} \right. & \left. \begin{array}{c} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{array} \right) \end{array}$$

の性質 ★ 本書 p.271

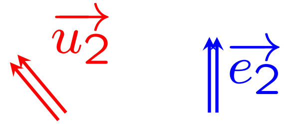
$\boxed{\textbf{問題 4}}$ 内積 $\mathbb{u}_1 \cdot \mathbb{u}_1$, $\mathbb{u}_2 \cdot \mathbb{u}_2$, $\mathbb{u}_1 \cdot \mathbb{u}_2$ を求めてください.

$\boxed{\text{解}}$

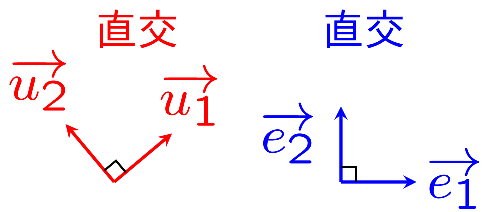
$$
\begin{aligned}
\mathbb{u}_1 \cdot \mathbb{u}_1 &= \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \\
&= \cos\theta \cdot \cos\theta + \sin\theta \cdot \sin\theta \\
&= 1.
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
\mathbb{u}_2 \cdot \mathbb{u}_2 &= \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= (-\sin\theta) \cdot (-\sin\theta) + \cos\theta \cdot \cos\theta \\
&= 1.
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
\mathbb{u}_1 \cdot \mathbb{u}_2 &= \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \cos\theta \cdot (-\sin\theta) + \sin\theta \cdot \cos\theta \\
&= 0.
\end{aligned}
$$



回転マトリックスは直交変換(内積が不変)を表します.

直交するタテベクトル $\mathbb{u}_1$, $\mathbb{u}_2$ を並べたマトリックスだから

U を直交マトリックス

★ 本書 p.274

といいます.

$\boxed{\text{参考}}$

★ 本書 p.271

$$\mathbb{u}_i \cdot \mathbb{u}_j = \begin{cases} 1 & \text{for } i = j \\ 0 & \text{for } i \neq j \end{cases}$$

を

$$\mathbb{u}_i \cdot \mathbb{u}_j = \delta_{ij}$$

と表します.

記号　δ_{ij} クロネッカーのデルタ

回転には逆変換が存在するから正則線型変換(出力から入力に戻れる変換)です.

回転マトリックス

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

で

$$\theta \to -\theta$$

のように置き換えると,逆マトリックス

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

が求まります.

★ 本書 p.276

記号 $\mathbb{x}' = U\mathbb{x}. \qquad \mathbb{x} = U^{-1}\mathbb{x}'.$

問題 5 回転マトリックスの転置マトリックスを求めてください.

$\boxed{\text{解}}$　転置マトリックス　　記号　${}^tU$ または $U^\star$　　transpose（転置）　★ 本書 p.272

$$U = \begin{pmatrix} \boxed{\cos\theta \quad -\sin\theta} \\ \\ \boxed{\sin\theta \quad \cos\theta} \end{pmatrix}$$

の行(ヨコ)と列(タテ)とを入れ換えると

$${}^tU = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

となります.

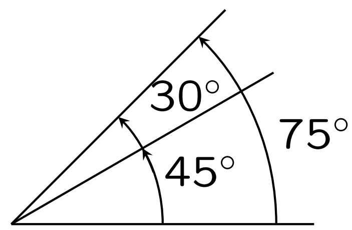
$$U^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

と比べると, 回転マトリックスの転置マトリックスは逆マトリックスであることがわかります.

★ $\cos(-\theta) = \cos\theta$, $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $-\sin(-\theta) = \sin\theta$.

回転マトリックスの使い方

$\boxed{\text{自習}}$ $\cos 75^\circ$, $\sin 75^\circ$ の値を求めてください. ★ 本書 p.276



45° 回転してから 30° 回転すると 75° 回転する.

$$\begin{pmatrix} \cos 75^\circ & -\sin 75^\circ \\ \sin 75^\circ & \cos 75^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}$$
$$= \cdots$$

注意
$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \end{pmatrix}}_{\text{あとの位置}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix}}_{\text{あとの回転}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}}_{\text{はじめの回転}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\text{はじめの位置}}$$

直線 $x_2 = \left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)x_1$ に関する鏡映(折り返し)の操作　　★ 本書 p.268

$\boxed{\text{問題6}}$　$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で表せる幾何ベクトルのうつり先を求めてください.

★ 図5で,うつり先を求める.

★ $\overrightarrow{e_1}$ が $\overrightarrow{u_1}$ にうつり,$\overrightarrow{e_2}$ が $\overrightarrow{u_2}$ にうつる.

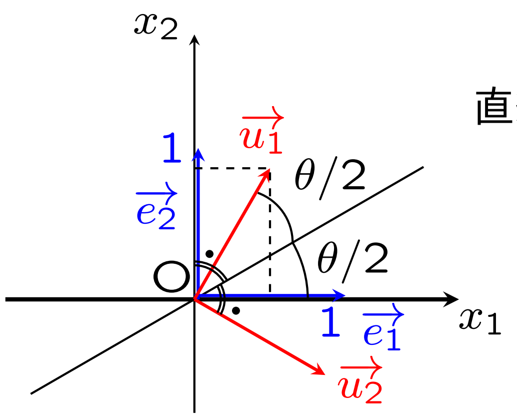


図5

直線 $x_2 = \underbrace{\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)}_{\text{傾き}}x_1$ ◀ $y = ax$ と同じ形の式.

$\boxed{\text{解}}$ 図６のように，基本ベクトルのうつり先がわかります． ★ 本書 p.269

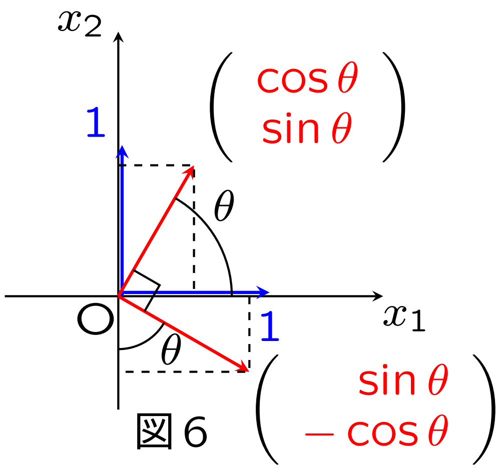


図６

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{問題 7}}$ 幾何ベクトル $\overrightarrow{x}$ のうつり先を求めてください．

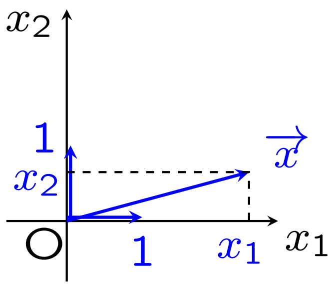
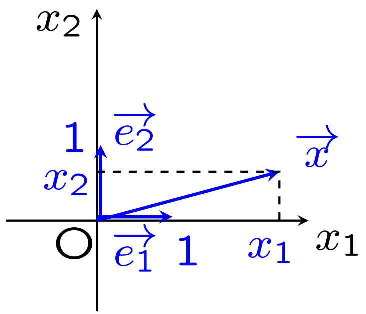


図７

★ 図７で基本ベクトルのうつり先も使って考える．

解

★ 本書 p.269



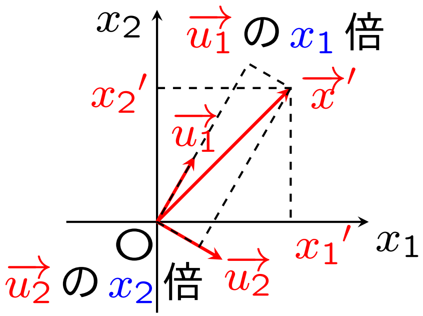


図８

$$
\begin{array}{ccccccc}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & x_1 & + & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & x_2. \\
\downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
\begin{pmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} & x_1 & + & \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix} & x_2.
\end{array}
$$

問題８ 右辺をマトリックスと $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ との乗法で表してください．

$\boxed{\text{解}}$ $$\begin{pmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$ ★ 本書 p.270

★ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$ を確かめることができます.

鏡映マトリックス

$$U = \begin{array}{cc} \mathbb{u}_1 & \mathbb{u}_2 \\ \end{array} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

の性質 ★ 本書 p.271, p.274

回転マトリックスと同様に, 内積は

$$\mathbb{u}_i \cdot \mathbb{u}_j = \delta_{ij}.$$

鏡映マトリックスも直交マトリックスといい, 直交変換 (内積が不変) を表します.

鏡映には逆変換が存在するから正則線型変換(出力から入力に戻れる変換)です.

鏡映マトリックス

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

で２回折り返すともとに戻るから,逆マトリックスも

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

です.

$$UU = I \quad (I\text{は単位マトリックス})$$

だから

$$U^{-1} = U.$$

問題９ 鏡映マトリックスの転置マトリックスを求めてください.

$\boxed{\text{解}}$ 転置マトリックス　記号 ${}^tU$ または $U^\star$　transpose（転置）★ 本書 p.272

$$U = \begin{pmatrix} \boxed{\cos\theta \quad \sin\theta} \\ \\ \boxed{\sin\theta \ -\cos\theta} \end{pmatrix}$$

の行(ヨコ)と列(タテ)とを入れ換えても

$$ {}^tU = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}\sin\theta \\ -\cos\theta\end{matrix}} \end{pmatrix}$$

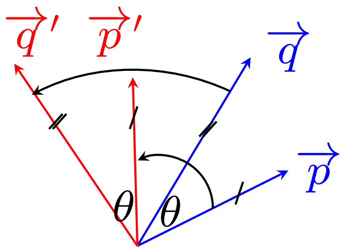
です.

$$ {}^tU = U $$

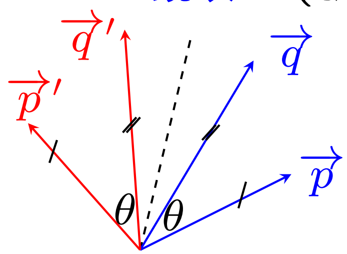
だから鏡映マトリックスの転置マトリックスは逆マトリックスであることがわかります.

$$U^{-1} = U,\ {}^tU = U \text{ だから } {}^tU = U^{-1}.$$
$$U,\ U^{-1},\ {}^tU \text{ は３役.}$$

回転



鏡映　（折り返し）



回転: $\begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathbb{u}_1 & \qquad \mathbb{u}_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}.$ ◀ $\begin{pmatrix} q_1' \\ q_2' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ も同様.

鏡映: $\begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathbb{u}_1 & \qquad \mathbb{u}_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}.$ ◀ $\begin{pmatrix} q_1' \\ q_2' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ も同様.

問題 10　回転と鏡映で, 内積が不変であることを確かめてください.

★ $\begin{pmatrix} {p_1}' \\ {p_2}' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {q_1}' \\ {q_2}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ を示す.

★ 回転と鏡映のどちらのマトリックスも $\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$ と表す.

★ 計算の工夫

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} {p_1}' \\ {p_2}' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} p_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} p_2 \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} {q_1}' \\ {q_2}' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} q_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} q_2 \right\} \end{aligned}$$

を使って, $\begin{pmatrix} {p_1}' \\ {p_2}' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {q_1}' \\ {q_2}' \end{pmatrix}$ を計算する.

$\boxed{\text{解}}$

★ 別法 本書 p.271

$$\begin{pmatrix} {p_1}' \\ {p_2}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} p_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} p_2 \right\}$$
$$= \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix} p_1 + \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{pmatrix} p_2.$$

$$\begin{pmatrix} {q_1}' \\ {q_2}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} q_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} q_2 \right\}$$
$$= \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix} q_1 + \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{pmatrix} q_2.$$

$$\begin{pmatrix} {p_1}' \\ {p_2}' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {q_1}' \\ {q_2}' \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix} p_1 + \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{pmatrix} p_2 \right\} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix} q_1 + \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{pmatrix} q_2 \right\}.$$

$$\begin{array}{cc} \mathbb{u}_1 & \mathbb{u}_2 \\ \end{array}$$
$$\left(\boxed{\begin{array}{c} u_{11} \\ u_{21} \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} u_{12} \\ u_{22} \end{array}} \right)$$

$$\mathbb{u}_i \cdot \mathbb{u}_j = \begin{cases} 1 & \text{for } i = j \\ 0 & \text{for } i \neq j \end{cases}$$

$\mathbb{u}_1$, $\mathbb{u}_2$ の直交性を使うために,記号で表すと便利です.

$$\begin{aligned} \mathbb{p}' \cdot \mathbb{q}' &= (\mathbb{u}_1 p_1 + \mathbb{u}_2 p_2) \cdot (\mathbb{u}_1 q_1 + \mathbb{u}_2 q_2) \\ &\overset{\text{分配法則}}{=} \mathbb{u}_1 \cdot \mathbb{u}_1 p_1 q_1 + \mathbb{u}_1 \cdot \mathbb{u}_2 p_1 q_2 + \mathbb{u}_2 \cdot \mathbb{u}_1 p_2 q_1 + \mathbb{u}_2 \cdot \mathbb{u}_2 p_2 q_2 \\ &= p_1 q_1 + p_2 q_2 \\ &= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \\ &= \mathbb{p} \cdot \mathbb{q}. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{自習}}$

本書 p.267 問4, 7,問4.8,p.268 問4.9,p.270 問4.10,問4.11,p.271 問4.12,問4.13,
問4.14,p.272 問4.15,pp.275 – 281

$\boxed{\text{次回のための予習}}$

固有値問題 本書 5.1 – 5.2節