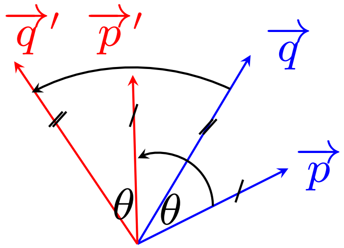
数学ターミナル　線型代数の発想

ダイジェスト版　**28**

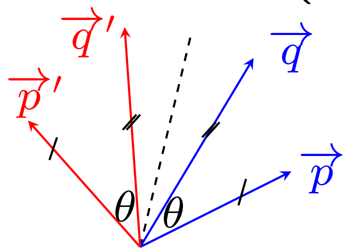
前回　正則線型変換の重要な例：回転，鏡映　★本書 4.5節

これらの変換では，幾何ベクトルの方向が変わります．

回転



鏡映　（折り返し）



今回のねらい

① 線型変換によって方向の変わらない幾何ベクトルの見つけ方　なぜ？

$\downarrow$

② マトリックスの n 乗を簡単に求める方法に応用　$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^n$ など．

準備　対角マトリックスの特徴　　　　★本書 pp.283 – 285

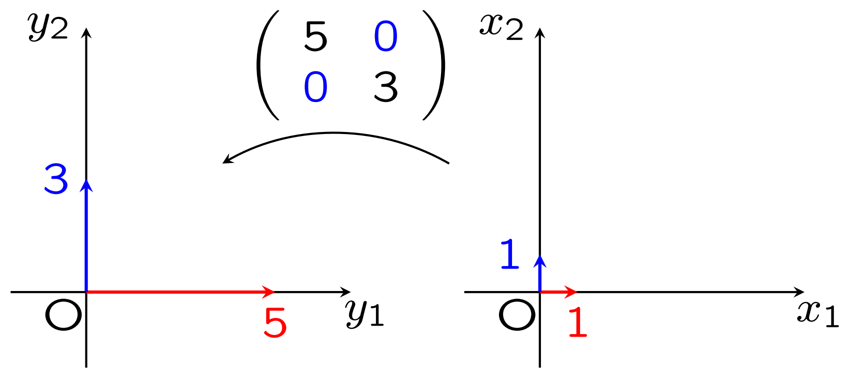
例　$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

記号　$$\mathbb{y} = A \mathbb{x}.$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



重要　座標軸の方向の幾何ベクトルは，
対角マトリックスで方向を変えません．⟶ **ねらい** ①

$\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とは異なる方向の幾何ベクトルを表します．

対角マトリックスのn乗は簡単に求まります. ⟶ $\boxed{\text{ねらい}}$ ②

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.
$$

用語

★本書 p.285

固有ベクトル

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 5.$$

固有値 拡大率・縮小率　　方向を変えないベクトル

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} 3.$$

固有ベクトル

固有値：1よりも大きいとき拡大，1よりも小さいとき縮小，1のとき等倍．
正の値のとき同じ向き，負の値のとき反対向きに拡大・縮小．

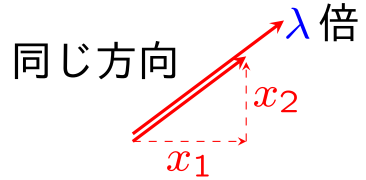
Q1　対角マトリックスでないマトリックスのn乗も簡単に計算する方法があるのでしょうか？

● 今後の展望

$\boxed{\text{線型変換で方向を変えないベクトル(固有ベクトル)・倍率(固有値)を求める}}$

↓

$\boxed{\text{線型変換を表すマトリックスの}\,n\,\text{乗の計算に使う}}$



固有値問題 —— 固有値・固有ベクトルの求め方

★本書 pp.285 – 287

例

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\lambda.$$

λ ラムダ(ギリシア文字)

手順 1　マトリックスとタテベクトルとの積を計算する.

問題 1　左辺を計算してから右辺を移項してください.

解

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + (-1)x_2 \\ -2x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$$

だから

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + (-1)x_2 \\ -2x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\lambda \\ x_2\lambda \end{pmatrix}.$$

右辺を移項して整理すると

$$\begin{pmatrix} (2-\lambda)x_1 - 1x_2 \\ -2x_1 + (3-\lambda)x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となります.

手順2　Cramerの方法で x_1, x_2 について解く.

問題2　x_1, x_2 を行列式で表してください.

$\boxed{解}$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}}.$$

(i) 分母$\neq 0$のとき

$$\text{自明解} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

線型変換で方向の変わらないベクトルを求める問題で，

零ベクトルは方向がないから固有ベクトルに含めません．

★本書 p.286

(ii) 分母 $= 0$ のとき

$$(2-\lambda)(3-\lambda)-(-1)\cdot(-2)=0.$$

$$\lambda^2-5\lambda+4=0$$ 固有方程式(特性方程式)

$$(\lambda-1)(\lambda-4)=0$$

を λ について解き,

$$\lambda_1=1,\quad \lambda_2=4$$

とおきます.

$\boxed{\text{問題3}}$ $\lambda_1=1$ と $\lambda_2=4$ とのそれぞれの場合に

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 & - & 1x_2 & =0 \\ -2x_1 & + & (3-\lambda)x_2 & =0 \end{cases}$$

を x_1, x_2 について解いて,解ベクトルを求めてください.

$\lambda_1 = 1$ のとき　　　　$\lambda_2 = 4$ のとき

$1x_1 - 1x_2 = 0.$

$$\begin{cases} x_1 = t_1 \\ x_2 = t_1 \end{cases}$$

(t_1 は 0 でない実数)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t_1.$$

$2x_1 + 1x_2 = 0.$

$$\begin{cases} x_1 = t_2 \\ x_2 = -2t_2 \end{cases}$$

(t_2 は 0 でない実数)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} t_2.$$

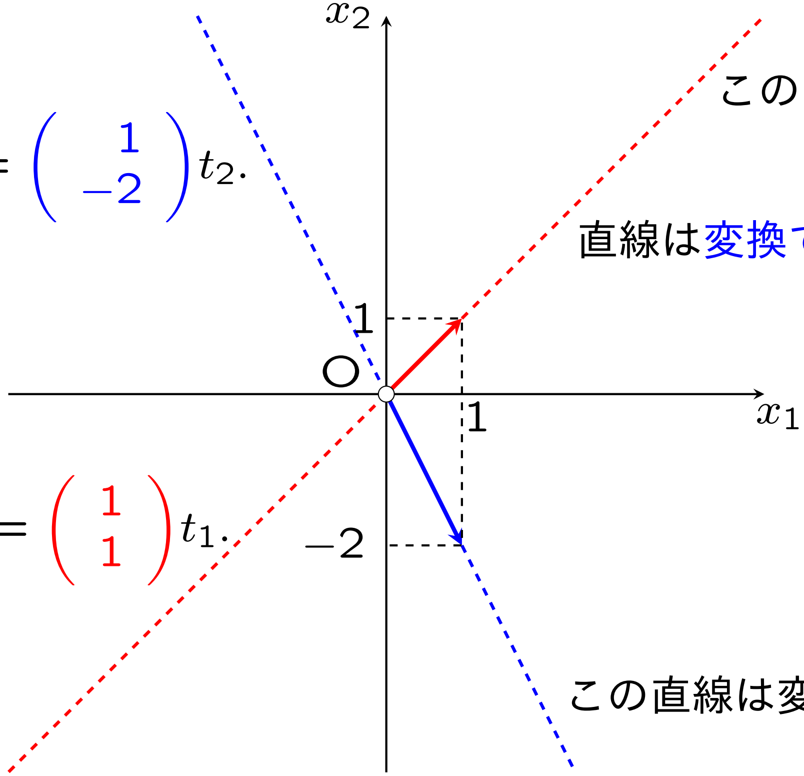
Q2　これらの解ベクトルが表す図形は何でしょうか？

$\boxed{\text{問題4}}$　x_1x_2 平面に解ベクトルが表す図形を描いてください．

$\boxed{\text{解}}$ 原点を通る直線のベクトル表示

★本書 p.287

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} t_2.$$



この直線は変換で拡大率１倍の点の集合.

直線は変換で方向の変わらない点(幾何ベクトル)の集合.

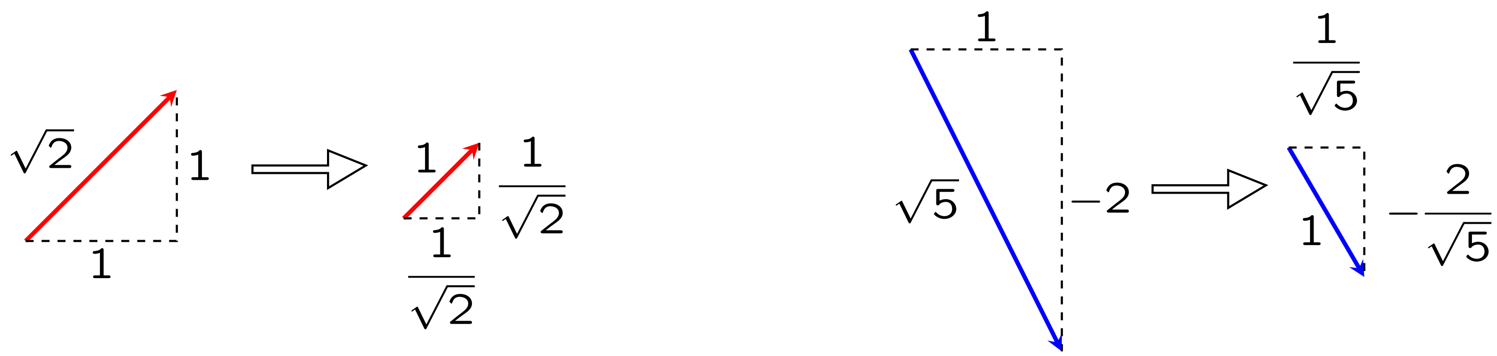
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t_1.$$

注意　原点を除く.

この直線は変換で拡大率４倍の点の集合.

手順3　正規化(ノルムを1にする操作)

★本書 p.287



注意　正規化しなくても,あとの計算に不都合は生じません.

正規化した固有ベクトル

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{を選んで} \qquad t_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{を選んで}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} t_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{自習}}$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求めてください.

固有値 i に対する固有ベクトル $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} t_1$ (t_1 は 0 でない任意の実数).

固有値 $-i$ に対する固有ベクトル $\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} t_2$. ($t_2$ は 0 でない任意の実数).

注意　成分が実数のマトリックスであっても, 固有値は実数とは限りません.
このような場合, 複素線型空間 $\mathbb{C}^2$(2 成分が複素数の数ベクトル全体の集合) で考えます.

$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求めてください.　★本書 pp.305 – 306, p.310

固有値 3 に対する固有ベクトル $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} t_1$ (t_1 は 0 でない任意の実数).

固有値 8 に対する固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t_2$. ($t_2$ は 0 でない任意の実数).

注意　実対称マトリックス (成分が実数の対称マトリックス) の固有値はすべて実数であり,
異なる固有値に対する固有ベクトルは直交 (内積はゼロ) します.

簡単のために 2×2 実対称マトリックスの場合で理解します．★本書 p.305

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\lambda$$

と $(\overline{x_1} \quad \overline{x_2})$ とのスカラー積をつくります．

注意 1　2×2 実対称マトリックスとは $a_{12} = a_{21}$ をみたすマトリックス．

注意 2　一般に，固有値・固有ベクトルは実数とは限らないから，複素共役 $\overline{x_1}$，$\overline{x_2}$ を考える．

問題 5

$$\overbrace{\underbrace{(\overline{x_1} \quad \overline{x_2})}_{\text{ヨコベクトル}}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\text{タテベクトル}}}^{\text{スカラー積}} = \overbrace{\underbrace{(\overline{x_1} \quad \overline{x_2})}_{\text{ヨコベクトル}}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\text{タテベクトル}}}^{\text{スカラー積}}\lambda$$

の左辺と右辺を計算してから両辺を比べて，固有値 λ は実数であることを確かめてください．

$\boxed{\text{解}}$

$$\underbrace{x_1\overline{x_1}a_{11}+x_2\overline{x_2}a_{22}}_{\text{実数}}+\underbrace{\overline{x_1}x_2a_{12}+x_1\overline{x_2}a_{21}}_{(\overline{x_1}x_2+x_1\overline{x_2})a_{12}}=\underbrace{(x_1\overline{x_1}+x_2\overline{x_2})}_{\text{実数}}\lambda.$$

$x_k=\alpha_k+\beta_k i$ $(\alpha_k,\beta_k\in\mathbb{R},k=1,2)$ とおくと

$$x_k\overline{x_k}={\alpha_k}^2+{\beta_k}^2\in\mathbb{R},$$

$$\overline{x_1}x_2+x_1\overline{x_2}=(\alpha_1-\beta_1 i)(\alpha_2+\beta_2 i)+(\alpha_1+\beta_1 i)(\alpha_2-\beta_2 i)$$
$$=2(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2)\in\mathbb{R}.$$

$$\text{実数}=\text{実数}\times\lambda$$

だから λ は実数です.

$\boxed{\text{参考}}$ 量子力学

$$(\overline{x_1} \ \ \overline{x_2})\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (\overline{x_1} \ \ \overline{x_2})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\lambda$$

を

$$< \mu|A|\nu > \ = \ < \mu|\nu > \lambda$$ ◀ μ はミュー，ν はニューと読むギリシア文字．

のような記号で表し，$< \mu|$ をブラベクトル，$|\nu >$ をケットベクトルといいます．

★ ブラケットは括弧という意味．

「実対称マトリックスの異なる固有値に対する固有ベクトルは直交 (内積はゼロ)」

量子力学では「異なるエネルギー固有値に属する状態ベクトルは互いに直交」

★本書 p.306

$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^n \text{ の計算の工夫}}$

★本書 pp.295 – 296

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\lambda.$$

$\lambda_1 = 1$ のとき

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}1.$$

$\lambda_2 = 4$ のとき

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}4.$$

まとめて

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

と表します.

問題6 左辺と右辺を計算して, 両辺が一致することを確かめてください.

$\boxed{\text{解}}$ 左辺

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + (-1) \times \frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \times \frac{1}{\sqrt{5}} + (-1) \times \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \\ -2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 3 \times \frac{1}{\sqrt{2}} & -2 \times \frac{1}{\sqrt{5}} + 3 \times \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{8}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

右辺

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \times 1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \times 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \times 0 + \frac{1}{\sqrt{5}} \times 4 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \times 1 + \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \times 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \times 0 + \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \times 4 \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{8}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

注意 $\boxed{\text{タテベクトルとスカラーとの乗法の順序が重要}}$ ★本書 p.47

1×1 マトリックス（スカラー）の列の数と 2×1 マトリックス（タテベクトル）の行の数とが一致しないから，$1\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$，$4\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ の順序の乗法は定義できず，$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$（対角マトリックスを右から掛ける）と表せません．

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

を

記号　$AU = U\Lambda$　　Λ ラムダ（大文字）

で表すと便利です．

両辺に右からUの逆マトリックスU^{-1}を掛けると　　★本書 pp.295 – 296

$$AUU^{-1} = U\Lambda U^{-1}$$

になります．

$$UU^{-1} = I \quad \text{（単位マトリックス）}$$

だから

$$A = U\Lambda U^{-1}. \qquad \blacktriangleleft\ AI = U\Lambda U^{-1}.$$

$$
\begin{aligned}
A^n &= U\Lambda\underbrace{U^{-1}U}_{I}\Lambda\underbrace{U^{-1}U}_{I}\Lambda U^{-1}\cdots U\Lambda\underbrace{U^{-1}U}_{I}\Lambda\underbrace{U^{-1}U}_{I}\Lambda U^{-1} \\
&= U\Lambda^n U^{-1}
\end{aligned}
$$

であり,

$$
\Lambda^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}
$$

を使うと

A の n 乗は U, Λ^n, U^{-1} の3個のマトリックスの積

で表せます.

$\boxed{\text{次回のための予習}}$

U の逆マトリックス U^{-1} の求め方　本書 pp.132 – 133

U, Λ^n, U^{-1} の積の計算　本書 pp.293 – 296

マトリックスの対角化の図形的意味　本書 5.3 節