数学ターミナル　線型代数の発想

ダイジェスト版　3

前回の復習

関数	関数値
$f(\quad)$	$f(x)$
$5(\quad)$	$5(x)$
$\cos(\quad)$	$\cos(x)$

数の集合でなくても，「関数」を写像の意味で使うことがあります．

例　停止 $= f($赤$)$　　★ 本書 p.21 自習

$y = f(x)$ の y が停止，x が赤の場合．$f(\quad)$ は交通規則を表す．

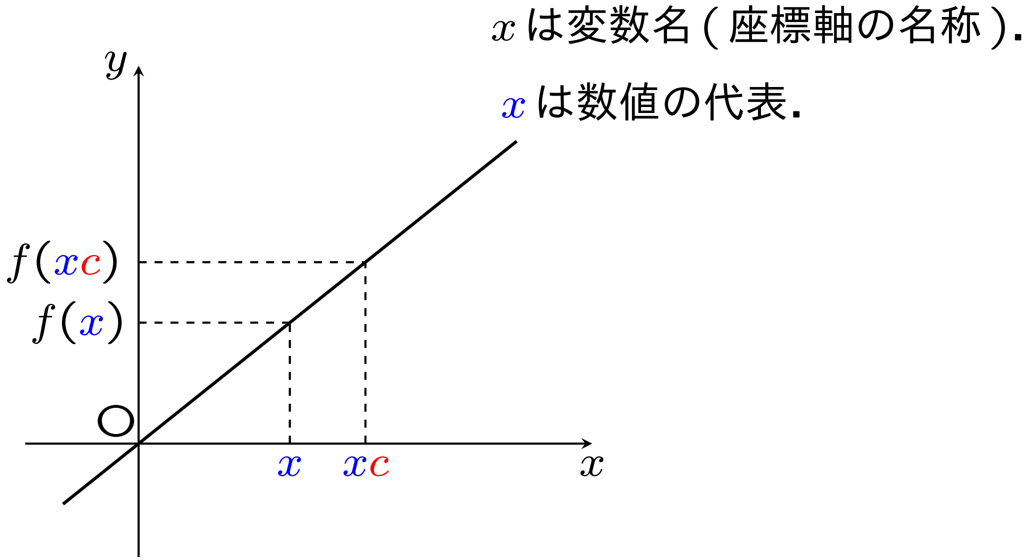
関数の性質の中に「線型性」という重要な性質があります．　★ 本書 p.22

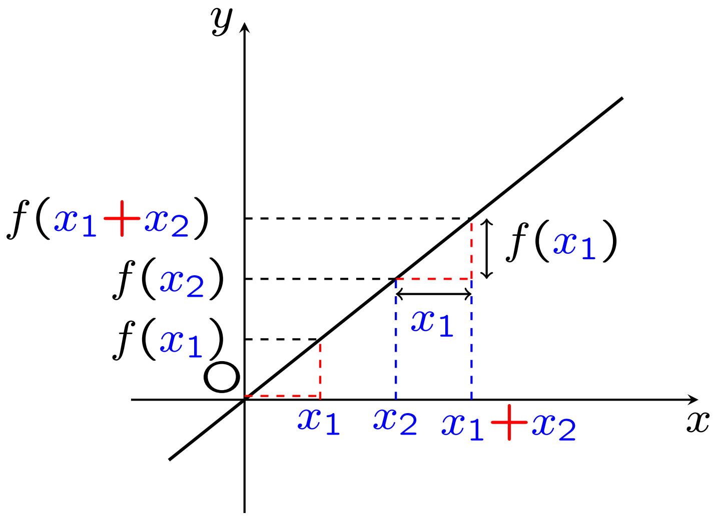
$\boxed{\text{線型性の意味}}$ ：比例に成り立つ二つの性質

比例のグラフを見ると，二つの性質の意味がわかります．

★つぎのページを見よ．

比例でない関数では，これらの二つの性質は成り立ちません．





x を c 倍すると,$f(x)$ も c 倍になる.
$f(xc)$ は $f(x)$ の c 倍である.

x_1 と x_2 との和を入力すると,
$f(x_1)$ と $f(x_2)$ との和を出力する.

問題 1 二つの性質を関数の記号で表してください.

★ 20 秒間 考えてわからなかったら, 本書 p.22 を見よ.

解　「数学は記号の科学」だから，日本文を式に翻訳できるように練習することは重要です．

① $f(xc)=\{f(x)\}c$．

② $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$．

$$f\underbrace{(xc)}_{\text{入力の}c\text{倍}}=\underbrace{\{f(x)\}\ c}_{\text{出力の}c\text{倍}}.$$

xc個の品物を買うとき，x個の品物を買うときのc倍の値段．

$$f\underbrace{(x_1+x_2)}_{\text{入力の和}}=\underbrace{f(x_1)+f(x_2)}_{\text{出力の和}}.$$

(x_1+x_2)個をまとめ買いしても，x_1個とx_2個とを別々に買っても値段は同じ．

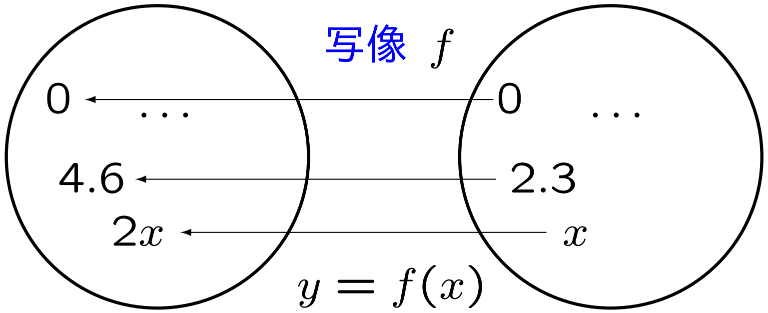
「線の形を扱う幾何(図形)」ではなく「関数の型（比例を表す直線のグラフに成り立つ性質)」だから「線型」と書きます．

★ 本書 p.23 自習

今後の展望　連立１次方程式の理論 —— 数から「数の組」に拡張

★ 本書 p.24

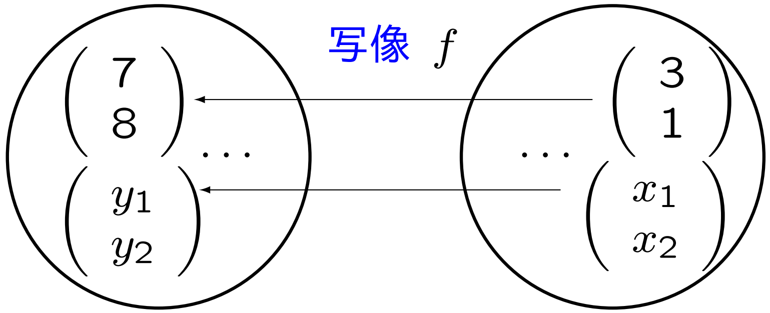
値域（出力の集合 Y）　定義域（入力の集合 X）



出力　入力

この例では，$y = 2x$.

値域（出力の集合 Y）　定義域（入力の集合 X）



数の組の集合に拡張

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \boxed{?} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{?}$をどのように表すか?

ねらい

ベクトルとベクトル量の意味

- ベクトルとベクトル量とのちがいは何か**?**
- ベクトルは高校数学で習った矢印ではないのか**?**

★ 今回のねらいは，ダイジェスト版 **2** pp.3 – 4 と関わっています．

★ 本書 p.25(改題)　ダイジェスト版 **1** p.4, p.11, p.15

類別と対応

単価

Aセット		Bセット	
リンゴ	100円/個	リンゴ	80円/個
ミカン	50円/個	ミカン	60円/個

Aセット：x_1 個，Bセット：x_2 個を買うとき，果物の種類別に合計金額を計算するための表し方を工夫します．

$$\begin{pmatrix} 100\text{円/個} \\ 50\text{円/個} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix} \text{円/個}.$$

$$\text{ベクトル量} = \text{ベクトル} \times \text{単位量}$$

(量の組)　(数の組)

★ 本書 pp.17 – 18

$$\overbrace{(\text{一つあたりいくら})\times(\text{いくつ分})}^{\text{今後は，この順序で計算する．}} \qquad (\text{いくつ分})\times(\text{一つあたりいくら})$$

どちらも正しい計算法ですが，両者を混ぜてはいけません．

$\boxed{\text{類別して加法}}$ リンゴどうし，ミカンどうしを対応させて金額の和を計算する方法

$$\begin{array}{c} \text{リンゴ} \\ \text{ミカン} \end{array} \begin{pmatrix} y_1\text{円} \\ y_2\text{円} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100\,\text{円}/\text{個} \\ 50\,\text{円}/\text{個} \end{pmatrix} x_1\text{個} + \begin{pmatrix} 80\,\text{円}/\text{個} \\ 60\,\text{円}/\text{個} \end{pmatrix} x_2\text{個}$$

$$= \begin{pmatrix} 100\,\text{円} \\ 50\,\text{円} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 80\,\text{円} \\ 60\,\text{円} \end{pmatrix} x_2 \quad \blacktriangleleft\ \text{円}/\text{個} \times \text{個} = \text{円}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 80 \\ 60 \end{pmatrix} x_2\right]\text{円}.$$

$\boxed{\text{問題2}}$ x_1，x_2 を第１行，第２行に掛けて，最右辺を計算してください．

解

$$\begin{array}{l}\text{リンゴ}\\ \text{ミカン}\end{array}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\text{円} = \begin{pmatrix} 100x_1 + 80x_2 \\ 50x_1 + 60x_2 \end{pmatrix}\text{円}.$$

$$\begin{array}{l}\text{リンゴ}\\ \text{ミカン}\end{array}\begin{pmatrix} y_1\text{円} \\ y_2\text{円} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (100x_1 + 80x_2)\text{円} \\ (50x_1 + 60x_2)\text{円} \end{pmatrix}$$

と表すこともできる.

補足 ★ 量と数について ダイジェスト版 **2** p.4

$$\begin{array}{l}\text{リンゴ}\\ \text{ミカン}\end{array}\overbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}^{\text{ベクトル}}\text{円} = \overbrace{\begin{pmatrix} 100x_1 + 80x_2 \\ 50x_1 + 60x_2 \end{pmatrix}}^{\text{ベクトル}}\text{円}. \qquad \begin{array}{l}\text{リンゴ}\\ \text{ミカン}\end{array}\overbrace{\begin{pmatrix} y_1\text{円} \\ y_2\text{円} \end{pmatrix}}^{\text{ベクトル量}} = \overbrace{\begin{pmatrix} (100x_1 + 80x_2)\text{円} \\ (50x_1 + 60x_2)\text{円} \end{pmatrix}}^{\text{ベクトル量}}.$$

数の組　　　　　　　　量の組

Q1　ベクトル量とベクトルを導入して，この問題では何種類の演算を考えたでしょうか**?**

★ 演算について ダイジェスト版 **2** p.6

組でない

「一つの数」をスカラー（倍率を表す），

「一つの量」をスカラー量

といいます．

$$\begin{pmatrix} 100\,\text{円}/\text{個} \\ 50\,\text{円}/\text{個} \end{pmatrix} x_1\text{個} + \begin{pmatrix} 80\,\text{円}/\text{個} \\ 60\,\text{円}/\text{個} \end{pmatrix} x_2\text{個} \qquad \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 80 \\ 60 \end{pmatrix} x_2$$

ベクトル量 × スカラー量 ＋ ベクトル量 × スカラー量	ベクトル × スカラー ＋ ベクトル × スカラー

↖　↗

重要な用語　線型結合という．

★ 本書 p.27

演算	① 加法 ② スカラー倍

★ 本書 p.28 自習

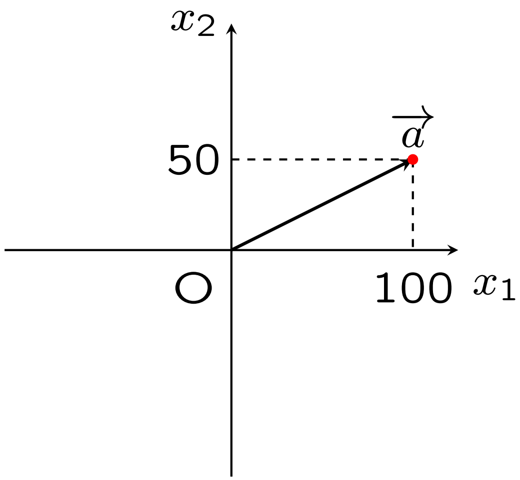
Q2 高校数学で習った矢印もベクトルではないのでしょうか?

ダイジェスト版 **1** p.4 を思い出してください.

高校数学で習った矢印は, $\begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$ などの別の姿です. ★ 本書 p.27

数ベクトル $\mathbb{a} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$ ★ ダイジェスト版 **1** p.11

幾何ベクトル $\overrightarrow{a}$ (点という図形) 印刷では $\boldsymbol{a}$.



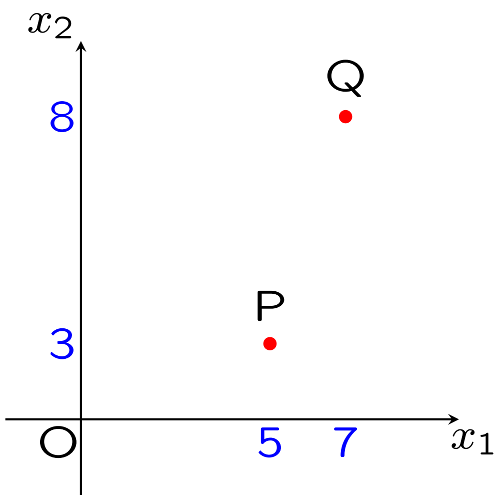
点で $\begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$ を表す.

矢印は本質ではなく, 作図のため.

質問　「座標」と「ベクトルの成分」とのちがいは何でしょうか ？

回答　★ 本書 p.196, p.222

座標　座標軸（物差）で測った目盛の値.



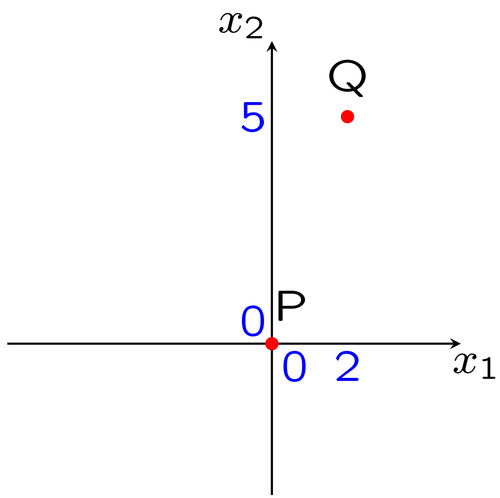


図１　Ｏを原点とする座標軸　　図２　Ｐを原点とする座標軸

座標は住居表示「５番３号」「２番５号」のような意味.

$\mathrm{P}(5, 3)$　$\mathrm{Q}(7, 8)$　　　$\mathrm{P}(0, 0)$　$\mathrm{Q}(2, 5)$

ベクトルの成分

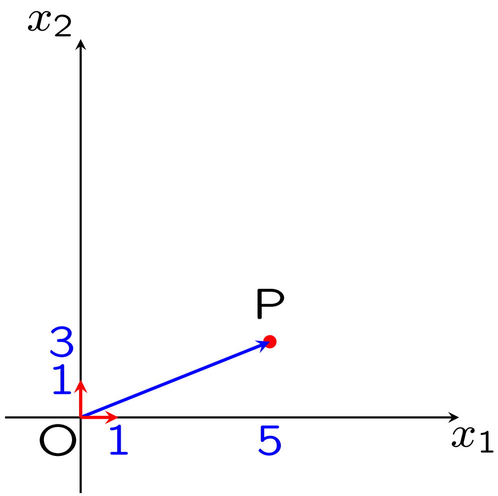


図３　O を原点とする座標軸

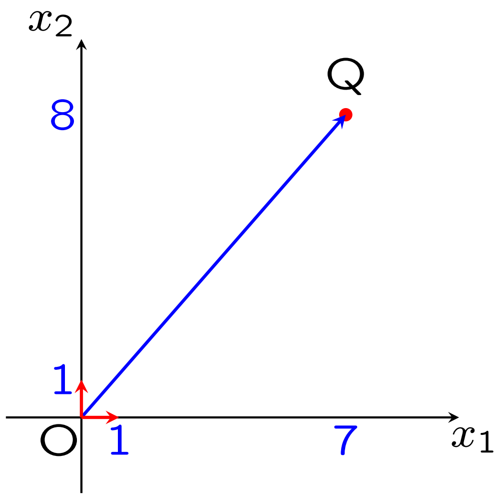


図４　O を原点とする座標軸

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} 5-0 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{第1成分} \\ \text{第2成分} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 5 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} 3.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \begin{pmatrix} 7-0 \\ 8-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{第1成分} \\ \text{第2成分} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 7 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} 8.$$

「幾何ベクトルを数ベクトルで表す」という意味の等号

$\boxed{\text{終点} - \text{始点}}$

基本ベクトルに座標を掛けた式

基本ベクトル

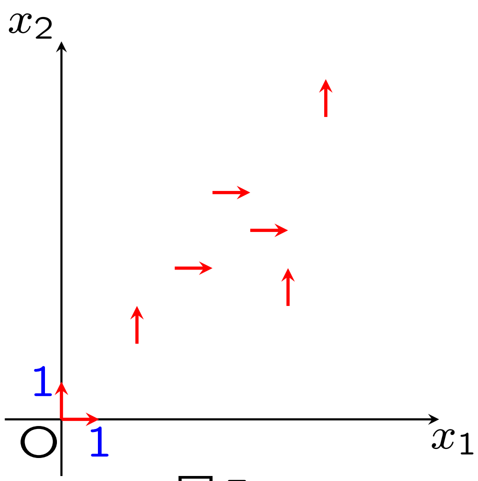


図5

始点, 終点の位置に関係なく,

幾何ベクトル $\rightarrow$ どの位置でも数ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で表せる.

幾何ベクトル $\uparrow$ どの位置でも数ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で表せる.

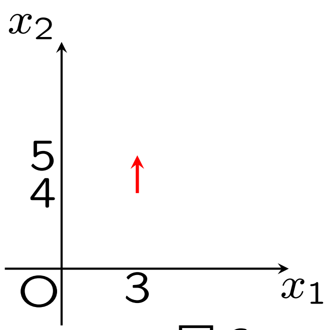


図6

例

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3-3 \\ 5-4 \end{pmatrix}}_{\boxed{\text{終点}-\text{始点}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

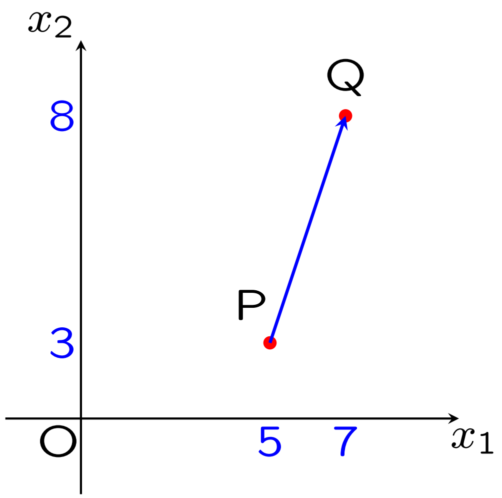


図７　Ｏを原点とする座標軸

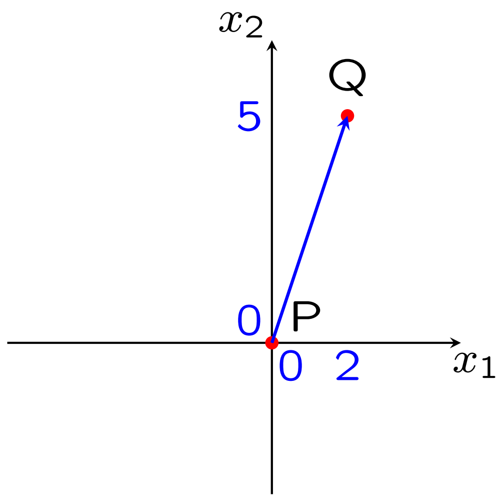


図８　Ｐを原点とする座標軸

座標は座標軸の原点の選び方によって異なる．

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の成分の値は座標軸の原点の選び方によらない．

Ｐを原点とする座標軸で測ると，Ｑの座標の値と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の成分の値は一致する．

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \begin{pmatrix} 7-5 \\ 8-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

↖ 同じ ↗

$\boxed{\text{終点} - \text{始点}}$

第１成分　２

第２成分　５

$\boxed{\text{次回のための予習}}$

スカラー積とマトリックスの意味と使い方　本書1.2節