

数学ターミナル 線型代数の発想
ダイジェスト版 4

前回の復習

類別 (果物別) と対応 (リンゴどうし, ミカンどうし)

	Aセット	Bセット								
単価	<table border="1"><tr><td>リンゴ</td><td>100円/個</td></tr><tr><td>ミカン</td><td>50円/個</td></tr></table>	リンゴ	100円/個	ミカン	50円/個	<table border="1"><tr><td>リンゴ</td><td>80円/個</td></tr><tr><td>ミカン</td><td>60円/個</td></tr></table>	リンゴ	80円/個	ミカン	60円/個
リンゴ	100円/個									
ミカン	50円/個									
リンゴ	80円/個									
ミカン	60円/個									
	x_1 個	x_2 個								

果物別に合計金額を計算するための表し方

$$\text{量の関係} : \begin{pmatrix} y_1 \text{円} \\ y_2 \text{円} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \text{円/個} \\ 50 \text{円/個} \end{pmatrix} x_1 \text{個} + \begin{pmatrix} 80 \text{円/個} \\ 60 \text{円/個} \end{pmatrix} x_2 \text{個}.$$

$$\text{数の関係} : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 80 \\ 60 \end{pmatrix} x_2.$$

線型結合

★ 本書 p.27

ベクトル量 \times スカラー量 $+$ ベクトル量 \times スカラー量

ベクトル \times スカラー $+$ ベクトル \times スカラー

ねらい

スカラー積とマトリックスの意味と使い方

- スカラー積とスカラー倍とのちがいは何か？
- 比例の拡張

★ 今回のねらいは、ダイジェスト版 2 p.5 旧法則保存の原理と関わっています。

$$\text{量の関係} : \begin{pmatrix} y_1 \text{円} \\ y_2 \text{円} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \text{円/個} \\ 50 \text{円/個} \end{pmatrix} x_1 \text{個} + \begin{pmatrix} 80 \text{円/個} \\ 60 \text{円/個} \end{pmatrix} x_2 \text{個}.$$

$$\text{数の関係} : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 80 \\ 60 \end{pmatrix} x_2.$$

第1成分(第1行), 第2成分(第2行)を計算すると

$$\text{量の関係} : \begin{pmatrix} y_1 \text{円} \\ y_2 \text{円} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (100x_1 + 80x_2) \text{円} \\ (50x_1 + 60x_2) \text{円} \end{pmatrix},$$

$$\text{数の関係} : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100x_1 + 80x_2 \\ 50x_1 + 60x_2 \end{pmatrix}.$$

Q1 $+$ を省略しないのに, \times を省略することができるのはなぜでしょうか?

乗除先行

乗法は（一つあたりいくら） \times （いくつ分）の意味があるから、
加法よりも結びつきが強い。

★ 本書 p.31

Stop!

$5\frac{1}{3}$ は $5 + \frac{1}{3}$ と $5 \times \frac{1}{3}$ とのどちらでしょうか？

$\frac{a}{c}$ は $a + \frac{b}{c}$ と $a \times \frac{b}{c}$ とのどちらでしょうか？

$a = 5, b = 1, c = 3$ の場合？

Q2 成分

$$\begin{aligned}y_1 &= 100x_1 + 80x_2, \\y_2 &= 50x_1 + 60x_2\end{aligned}$$

のそれぞれを一つの乗法で表すように工夫できないでしょうか？

(一つあたりいくら) × (いくつ分) を

(単価の組) × (個数の組)

◀ 類別と対応

の形で

$$\text{量の関係} : y_1 \text{円} = (100 \text{円/個} \quad 80 \text{円/個}) \begin{pmatrix} x_1 \text{個} \\ x_2 \text{個} \end{pmatrix},$$

$$\text{数の関係} : y_1 = (100 \quad 80) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

と表します.

★ 本書 p.31

問題 1 y_1 円, y_2 を (単価の組) × (個数の組) の形で表してください.

★ 20 秒間 考えてわからなかったら, つぎのページを見よ.

解

$$\text{量の関係 : } y_2 \text{円} = (50 \text{円/個} \quad 60 \text{円/個}) \begin{pmatrix} x_1 \text{個} \\ x_2 \text{個} \end{pmatrix},$$

$$\text{数の関係 : } y_2 = (50 \quad 60) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

重要

スカラー積

★ 本書 pp.30 – 31

$$\square = (\square \ \square) \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$$

スカラー量 = ヨコベクトル量 × タテベクトル量

スカラー = ヨコベクトル × タテベクトル

積はスカラー量またはスカラー。

スカラー量は「組でない量」 スカラーは「組でない数」

注意

スカラー倍

例

$$\begin{pmatrix} 100 & x_1 \\ 50 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix} x_1.$$

スカラーは「倍率を表す数（組でない数）」

Q3 二つの成分

$$y_1 = 100x_1 + 80x_2,$$

$$y_2 = 50x_1 + 60x_2$$

をまとめて一つの乗法で表すように工夫できないでしょうか？

二つのスカラー積

$$\text{量の関係： } y_1 \text{円} = \left(\begin{array}{cc} 100 \text{円/個} & 80 \text{円/個} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x_1 \text{個} \\ x_2 \text{個} \end{array} \right),$$

$$\text{量の関係： } y_2 \text{円} = \left(\begin{array}{cc} 50 \text{円/個} & 60 \text{円/個} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x_1 \text{個} \\ x_2 \text{個} \end{array} \right)$$

をまとめて

$$\left(\begin{array}{c} y_1 \text{円} \\ y_2 \text{円} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 100 \text{円/個} & 80 \text{円/個} \\ 50 \text{円/個} & 60 \text{円/個} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x_1 \text{個} \\ x_2 \text{個} \end{array} \right)$$

と表します.

問題2 二つのスカラー積

$$\text{数の関係} : y_1 = (100 \ 80) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$\text{数の関係} : y_2 = (50 \ 60) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

をまとめて表してください。

★ 20秒間 考えてわからなかったら、つぎのページを見よ。

解
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 80 \\ 50 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

重要 右辺は

$$\begin{pmatrix} \boxed{100 \quad 80} \\ \boxed{50 \quad 60} \end{pmatrix}$$

のようにヨコベクトルの並びと見て

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \boxed{100 \quad 80} \end{pmatrix} \text{ と } \begin{pmatrix} \boxed{x_1} \\ \boxed{x_2} \end{pmatrix} \text{ とのスカラ乗積 } 100 \times x_1 + 80 \times x_2, \\ & \begin{pmatrix} \boxed{50 \quad 60} \end{pmatrix} \text{ と } \begin{pmatrix} \boxed{x_1} \\ \boxed{x_2} \end{pmatrix} \text{ とのスカラ乗積 } 50 \times x_1 + 60 \times x_2 \end{aligned}$$

を計算して、これらの値を第1行, 第2行に並べたタテベクトルをつくる. ★ 本書 p.32

$$\text{量の関係} : \begin{pmatrix} y_1 \text{円} \\ y_2 \text{円} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \text{円/個} & 80 \text{円/個} \\ 50 \text{円/個} & 60 \text{円/個} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \text{個} \\ x_2 \text{個} \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{タテベクトル量} = \text{マトリックス量} \times \text{タテベクトル量}}$$

ベクトル量は「量の組」 ベクトルは「数の組」
 マトリックス量は「量の並び」 マトリックスは「数の並び」

$$\text{数の関係} : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 80 \\ 50 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{タテベクトル} = \text{マトリックス} \times \text{タテベクトル}}$$

記号 $y = Ax$ 手書き : $y = Ax$

ベクトル量, ベクトル : 太文字 マトリックス量, マトリックス : 大文字

$$\begin{pmatrix} 100 \text{ 円 / 個} & 80 \text{ 円 / 個} \\ 50 \text{ 円 / 個} & 60 \text{ 円 / 個} \end{pmatrix}$$

のような「量の並び」をマトリックス量,

$$\begin{pmatrix} 100 & 80 \\ 50 & 60 \end{pmatrix}$$

のような「数の並び」をマトリックスといいます。

本来は「方陣」 「方」は「四角形（正方形, 長方形）」 「陣」は「並び」

		第 1 列	第 2 列
第 1 行	(
第 2 行			
))

★ 本書 p.31 [注意 3]

$$\begin{pmatrix} y_1 \text{円} \\ y_2 \text{円} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \text{円/個} & 80 \text{円/個} \\ 50 \text{円/個} & 60 \text{円/個} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \text{個} \\ x_2 \text{個} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 80 \\ 50 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

を記号で

$$y = Ax \quad (\text{手書き} : y = Ax)$$

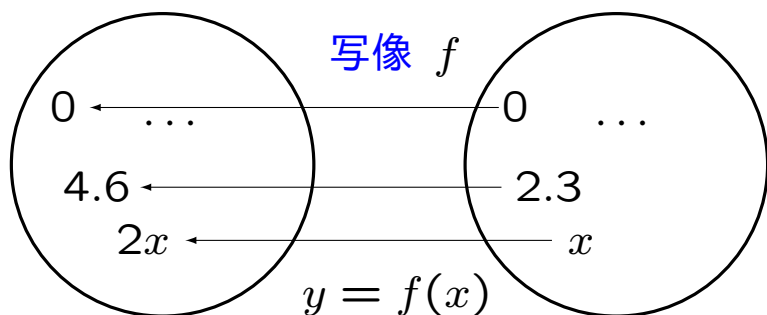
と表すと、比例

$$y = ax$$

を拡張した形であることがわかります。

★ 本書 p.24, p.32 ダイジェスト版 3 p.6

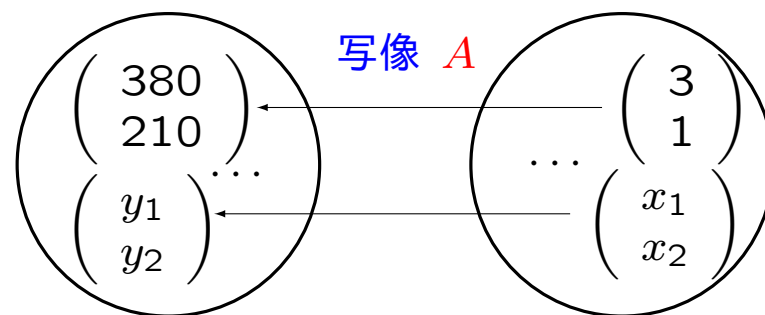
値域 (出力の集合 Y) 定義域 (入力の集合 X)



出力 入力

この例では, 比例 $y = 2x$.

値域 (出力の集合 Y) 定義域 (入力の集合 X)



数の組の集合に拡張

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 80 \\ 50 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

比例の拡張 $y = Ax$ (手書きでは $y = Ax$).

旧法則保存の原理

★ 本書 p.34 ダイジェスト版 2 p.5

乗法の拡張

$$100 \text{ 円 / 個} \times 2 \text{ 個} = 200 \text{ 円.}$$

↓

$$\left(100 \text{ 円 / 個} \quad 80 \text{ 円 / 個} \right) \begin{pmatrix} 2 \text{ 個} \\ 3 \text{ 個} \end{pmatrix} = 440 \text{ 円.}$$

↓

$$\begin{pmatrix} 100 \text{ 円 / 個} & 80 \text{ 円 / 個} \\ 50 \text{ 円 / 個} & 60 \text{ 円 / 個} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \text{ 個} \\ 3 \text{ 個} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 440 \text{ 円} \\ 280 \text{ 円} \end{pmatrix}.$$

$$\text{スカラー量} \times \text{スカラー量} = \text{スカラー量}$$

↓

$$\text{ヨコベクトル量} \times \text{タテベクトル量} = \text{スカラー量}$$

スカラー積

↓

$$\text{マトリックス量} \times \text{タテベクトル量} = \text{タテベクトル量}$$

問題3 $\begin{pmatrix} 100 & 80 \\ 50 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ を計算してください。

$$\begin{pmatrix} 100 & 80 \\ 50 & 60 \end{pmatrix}$$

をヨコベクトルの並びと見る。

$$\begin{pmatrix} \boxed{100 \quad 80} \\ \boxed{50 \quad 60} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{100 \quad 80} \end{pmatrix} \text{ と } \begin{pmatrix} \boxed{2} \\ \boxed{3} \end{pmatrix} \text{ とのスカラー積,}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{50 \quad 60} \end{pmatrix} \text{ と } \begin{pmatrix} \boxed{2} \\ \boxed{3} \end{pmatrix} \text{ とのスカラー積}$$

を計算して、これらの値を第1行、第2行に並べたタテベクトルをつくる。

★ 2分間 考えてわからなかったら、つぎのページを見よ。

解

$$\begin{pmatrix} 100 & 80 \\ 50 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \times 2 + 80 \times 3 \\ 50 \times 2 + 60 \times 3 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 440 \\ 280 \end{pmatrix}.$$

次回のための予習

線型性 本書 p.33, pp.38 – 39

合成写像 本書 p.42