数学ターミナル　線型代数の発想

ダイジェスト版　**5**

前回の復習

スカラー積の注意—転置の意味

記号　タテベクトルとヨコベクトルとを区別するとき　★ 本書 p.35

例　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$　　$\boldsymbol{a}' = (\ 2 \quad 3\ )$　　手書き　$\mathbb{a}$　$\mathbb{a}'$　プライム(ダッシュ)

タテベクトルしかないとき，タテベクトル $\begin{pmatrix} {x_1}' \\ {x_2}' \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{x}'$ と表すこともある．

問題 1　$(\ 2 \quad 3\ )\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}(\ 2 \quad 3\ )$ を計算してください．

★ 1分間 考えてわからなかったら，つぎのページを見よ．

$\boxed{\text{解}}$ スカラー積 ヨコベクトル $\times$ タテベクトル

$$\begin{pmatrix} \boxed{2 \quad 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 5 \\ 4 \end{matrix}} \end{pmatrix} = 2 \times 5 + 3 \times 4 = 22.$$

$\begin{pmatrix} \boxed{5} \\ \boxed{4} \end{pmatrix}$ をヨコベクトルの並び，$\begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{3} \end{pmatrix}$ をタテベクトルの並びと見て，

$$\begin{pmatrix} \boxed{5} \\ \boxed{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \times 2 & 5 \times 3 \\ 4 \times 2 & 4 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$$

のように計算する．

$\square$, $\square$ は一つの数ですが，ヨコベクトル，タテベクトルと見ます．

$\boxed{\text{重要}}$

$$\begin{pmatrix} \boxed{2 \quad 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 5 \\ 4 \end{matrix}} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \boxed{5} \\ \boxed{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{3} \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{記号}}$ $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}' = \begin{pmatrix} 5 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\boldsymbol{a}' \ \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{b} \ \boldsymbol{a}'.$$

手書き $\mathbb{a}' \ \mathbb{b} \neq \mathbb{b} \ \mathbb{a}'$.

$\boxed{\text{問題2}}$ $\begin{pmatrix} 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ を計算して，問題1と比べてください．

$\boxed{解}$　スカラー積　ヨコベクトル $\times$ タテベクトル

$$\begin{pmatrix} \boxed{5 \quad 4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}} \end{pmatrix} = 5 \times 2 + 4 \times 3$$
$$= 22.$$

$\boxed{記号}$　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}' = (\ 2 \quad 3\ )$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}' = (\ 5 \quad 4\ )$.

$$\boldsymbol{a}'\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}'\ \boldsymbol{a}.$$

手書き　$\mathbb{a}'\ \mathbb{b} = \mathbb{b}'\ \mathbb{a}.$

$\boxed{重要}$　転置　（ヨコとタテとの入れ換え）　★ 本書 pp.35 − 36

$\boxed{記号}$　${}^t\boldsymbol{a}$ または $\boldsymbol{a}^*$　transpose　手書き　${}^t\mathbb{a}$ または $\mathbb{a}^*$

$${}^t\boldsymbol{a} = {}^t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (2 \quad 3) = \boldsymbol{a}'.$$

$\boxed{\text{問題}\,\mathbf{3}}$ 記号の使い方

$\boldsymbol{a}' \ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}' \ \boldsymbol{a}$ を転置の記号で書いてください.

★ 20秒間 考えてわからなかったら, つぎのページを見よ.

$\boxed{\text{解}}$

$$ {}^{t}\boldsymbol{a} \;=\; {}^{t}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (2 \;\; 3) = \boldsymbol{a}', $$

$$ {}^{t}\boldsymbol{b} \;=\; {}^{t}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = (5 \;\; 4) = \boldsymbol{b}' $$

だから

$$ \boldsymbol{a}' \; \boldsymbol{b} \;=\; \boldsymbol{b}' \; \boldsymbol{a} $$

は

$$ {}^{t}\boldsymbol{a} \; \boldsymbol{b} \;=\; {}^{t}\boldsymbol{b} \; \boldsymbol{a} $$

と書くことができます.

手書き ${}^{t}\mathbb{a} \; \mathbb{b} = {}^{t}\mathbb{b} \; \mathbb{a}$.

★ 本書 p.38 2.1 自習

マトリックスの第１列のタテベクトルと第１行のヨコベクトルの関係 **？**

★ 本書 pp.35 – 36　本書 p.36 $\boxed{\text{補足}}$

$$
\begin{array}{cc}
 & \boldsymbol{a}_1{}' \\
A = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix} \\
 & \boldsymbol{a}_1
\end{array}
$$

$a_{\text{行番号 列番号}}$

$$
\begin{aligned}
{}^t\boldsymbol{a}_1 &= (a_{11} \ \ a_{21} \cdots a_{n1}) \\
&\neq (a_{11} \ \ a_{12} \cdots a_{1n}) \\
&= \boldsymbol{a}_1{}'.
\end{aligned}
$$

ねらい

比例定数を拡張したマトリックスは写像を表す．

- 線型性の応用
- 合成写像 —— 複比例の拡張

★ 今回のねらいは，ダイジェスト版 **2** p.5 旧法則保存の原理と関わっています．

線型性の応用

★ 本書 p.41 [参考 3]

マトリックスが同じとき,

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 1} \\ \\ \boxed{1 \quad 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 1 \times 3 \\ 1 \times 2 + 2 \times 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 1} \\ \\ \boxed{1 \quad 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 5 \\ 4 \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 1 \times 4 \\ 1 \times 5 + 2 \times 4 \end{pmatrix}$$

のようなマトリックスとタテベクトルとの乗法をくり返すのは手間がかかります.

Q1　このようなとき, 計算の手間を省くことはできないでしょうか?

準備のために，つぎの問題を考えてください．

$\boxed{\textbf{問題4}}$ マトリックス $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ で $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のうつり先を求めてください．

★ 30秒間 考えてわからなかったら，つぎのページを見よ．

$\boxed{解}$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 1} \\ \\ \boxed{1 \quad 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 0 \\ 1 \times 1 + 2 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 1} \\ \\ \boxed{1 \quad 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 0 + 1 \times 1 \\ 1 \times 0 + 2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

$\boxed{重要}$ $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$ 第１列, $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}} \end{pmatrix}$ 第２列.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix}$ の計算の工夫

★ 本書 p.33, p.39, ダイジェスト版 **3** p.5

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}k + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ell\right] \\ = & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}k\right] + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ell\right] \\ = & \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]k + \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]\ell \\ = & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}k + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\ell. \end{aligned}$$

$f(\ \ )$ が $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ で表せる場合

線型性

$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

x_1 が $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}k$, x_2 が $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ell$ の場合

$f(xk) = \{f(x)\}k$

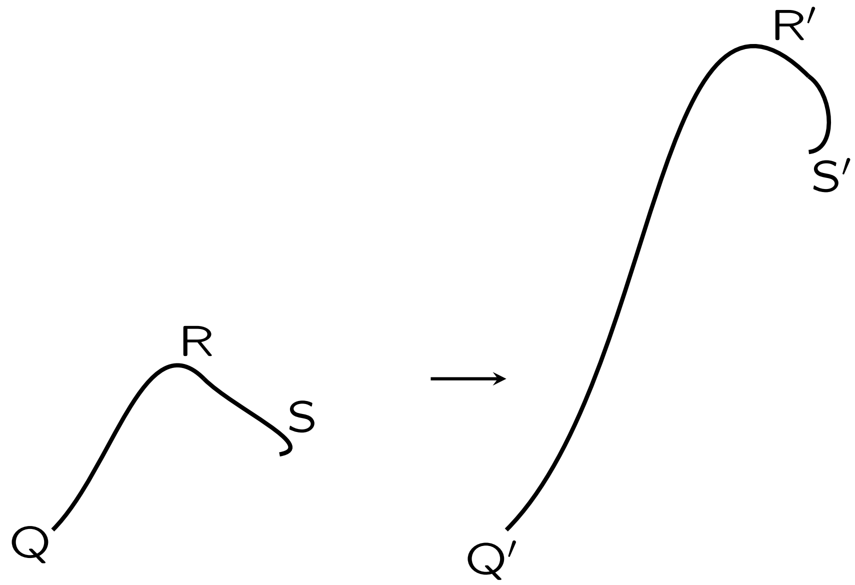
x が $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の場合

k, ℓ の値が何通りもあるとき, この式に k, ℓ の値を代入すると計算は簡単です.

Q2　この計算方法の応用例はあるのでしょうか?

アニメで表情を変えるとき，眉毛 $\mathrm{Q}, \mathrm{R}, \mathrm{S}$ の位置 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ のうつり先 Q', R', S' を $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix}$ で求めることができます.

規則は $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とは限りません.



合成写像 — マトリックス量の乗法 ★ 本書 pp.42 – 43

Q3 ある規則でベクトルからベクトルにうつしたあとで, 別の規則でうつす操作をつづけることはできるのでしょうか?

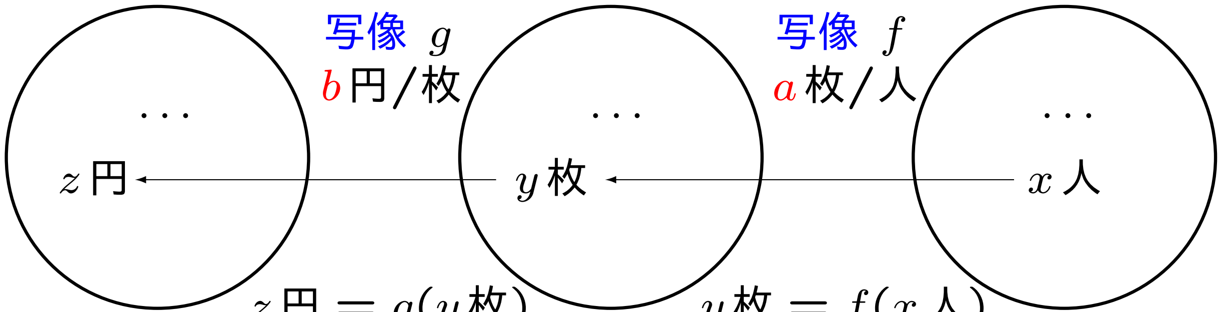
導入

複比例

★ 本書 p.42

値域（出力の集合 Z）　定義域（入力の集合 Y）

値域（出力の集合 Y）　定義域（入力の集合 X）



x, y, z, a, b は数値を表す.

z 円 $= g(y$ 枚$)$
出力　　入力

y 枚 $= f(x$ 人$)$
出力　　入力

比例 z 円 $= b$ 円/枚 $\times$ y 枚.

比例 y 枚 $= a$ 枚/人 $\times$ x 人.

複比例 z 円 $= b$ 円/枚 $\times$ a 枚/人 $\times$ x 人.

数の関係式

$$y = ax$$

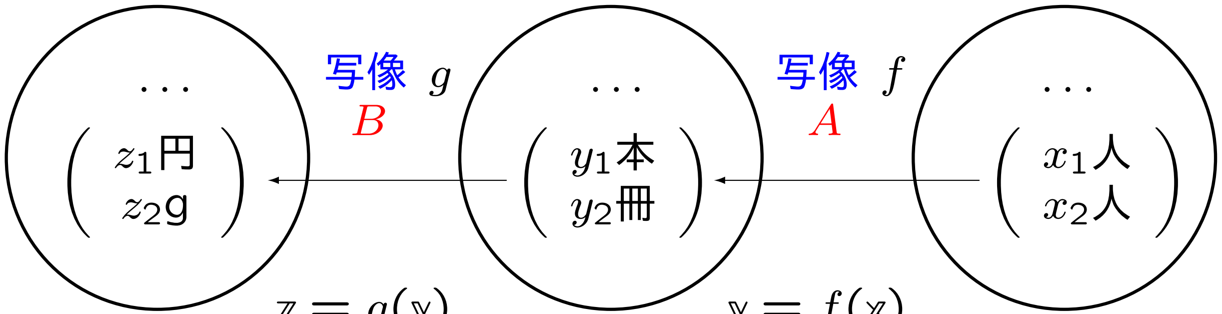
$$z = by$$

$$z = bax$$

$\boxed{\text{拡張}}$ ★ 本書 p.42 例題 1.2（改題）

値域（出力の集合 Z） 定義域（入力の集合 Y）

値域（出力の集合 Y） 定義域（入力の集合 X）



１クラス，２クラスの人数の組

ペンの本数，ノートの冊数の組

価格，質量の組

$\mathbb{z} = g(\mathbb{y})$ $\mathbb{y} = f(\mathbb{x})$

出力 入力 出力 入力

比例 $\mathbb{z} = B\mathbb{y}$.

比例 $\mathbb{y} = A\mathbb{x}$.

複比例 $\mathbb{z} = BA\mathbb{x}$.

A，B はマトリックス量，

BA はマトリックス量の乗法を表す．

Q4 マトリックス量 A，B，BA は，どのように表すのでしょうか?

表をマトリックス量で表します.

★ 本書 pp.42 – 43

表１ 単価と単位量あたりの質量

ペン	ノート
10 円 / 本	20 円 / 冊
1 g/ 本	10 g/ 冊

表２ 一人あたりの本数と冊数

品目	１クラス	２クラス
ペン	2 本 / 人	3 本 / 人
ノート	5 冊 / 人	4 冊 / 人

$$A = \begin{pmatrix} 2\ \text{本}/\text{人} & 3\text{本}/\text{人} \\ 5\ \text{冊}/\text{人} & 4\ \text{冊}/\text{人} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 10\ \text{円}/\text{本} & 20\text{円}/\text{冊} \\ 1\ \text{g}/\text{本} & 10\ \text{g}/\text{冊} \end{pmatrix}$$ とおきます.

$\boxed{\text{問題}\mathbf{5}}$ $$\begin{pmatrix} y_1\text{本} \\ y_2\text{冊} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\ \text{本}/\text{人} & 3\text{本}/\text{人} \\ 5\ \text{冊}/\text{人} & 4\ \text{冊}/\text{人} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\text{人} \\ 3\text{人} \end{pmatrix}$$ ◀ $\mathbb{y} = A\mathbb{x}$.

の右辺のマトリックス量とタテベクトル量との乗法を計算してください.

★ 30秒間 考えてわからなかったら，つぎのページを見よ.

$\boxed{\text{解}}$ 右辺は

$$\begin{pmatrix} \boxed{2\ 本/人 \quad 3\ 本/人} \\ \\ \boxed{5\ 冊/人 \quad 4\ 冊/人} \end{pmatrix}$$

のようにヨコベクトル量の並びと見て

$$\left(\boxed{2\ 本/人 \quad 3\ 本/人}\right) \text{ と } \left(\boxed{\begin{matrix} 2人 \\ 3人 \end{matrix}}\right) \text{ とのスカラー積 } 2\ 本/人 \times 2人 + 3本/人 \times 3人,$$

$$\left(\boxed{5\ 冊/人 \quad 4\ 冊/人}\right) \text{ と } \left(\boxed{\begin{matrix} 2人 \\ 3人 \end{matrix}}\right) \text{ とのスカラー積 } 5\ 冊/人 \times 2人 + 4\ 冊/人 \times 3人$$

を計算して，これらの量を第１行，第２行に並べたタテベクトル量をつくる． ★ 本書 p.32

$$\mathbb{y} = A\mathbb{x}. \qquad \begin{pmatrix} 2\ 本/人 & 3本/人 \\ 5\ 冊/人 & 4\ 冊/人 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2人 \\ 3人 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13本 \\ 22冊 \end{pmatrix}.$$

問題 6

$$\begin{pmatrix} z_1\text{円} \\ z_2\ \text{g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\ \text{円}/\text{本} & 20\text{円}/\text{冊} \\ 1\ \text{g}/\text{本} & 10\ \text{g}/\text{冊} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13\text{本} \\ 22\text{冊} \end{pmatrix} \quad \blacktriangleleft\ \mathbb{z} = B\mathbb{y}.$$

の右辺のマトリックス量とタテベクトル量との乗法を計算してください.

★ 30秒間 考えてわからなかったら, つぎのページを見よ.

$\boxed{解}$　右辺は

$$\begin{pmatrix} \boxed{10\ 円/本 \quad 20\ 円/冊} \\ \\ \boxed{1\ g/本 \quad 10\ g/冊} \end{pmatrix}$$

のようにヨコベクトル量の並びと見て

$$\left(\boxed{10\ 円/本 \quad 20\ 円/冊}\right) と \left(\boxed{\begin{matrix} 13本 \\ 22冊 \end{matrix}}\right) とのスカラー積$$

$$10\ 円/本 \times 13本 + 20円/冊 \times 22冊,$$

$$\left(\boxed{1\ g/本 \quad 10\ g/冊}\right) と \left(\boxed{\begin{matrix} 13本 \\ 22冊 \end{matrix}}\right) とのスカラー積$$

$$1\ g/本 \times 13本 + 10\ g/冊 \times 22冊$$

を計算して，これらの量を第１行，第２行に並べたタテベクトル量をつくる．　★ 本書 p.32

$$\mathbb{z} = B\mathbb{y}. \qquad \begin{pmatrix} 10\ 円/本 & 20円/冊 \\ 1\ g/本 & 10\ g/冊 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13本 \\ 22冊 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 570円 \\ 233\ g \end{pmatrix}.$$

次回のための予習

マトリックス量の乗法　本書 pp.44 – 45