数学ターミナル　線型代数の発想

ダイジェスト版　7

$\boxed{\text{前回の復習}}$

★ 本書 p.44 例題 1.3（改題）

注意 $\quad 2\begin{pmatrix} 2\ \text{本}/\text{人} & 3\text{本}/\text{人} \\ 5\ \text{冊}/\text{人} & 4\ \text{冊}/\text{人} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 2\ \text{本}/\text{人} & 2\times 3\ \text{本}/\text{人} \\ 2\times 5\ \text{冊}/\text{人} & 2\times 4\ \text{冊}/\text{人} \end{pmatrix}$

1×1 不一致 2×2

なぜ 2×2 ？

$(\boxed{\bullet})\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\spadesuit \\ \heartsuit\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}\clubsuit \\ \diamondsuit\end{matrix}} \end{pmatrix}$

$\bullet \times \spadesuit + ? \times \heartsuit$

$\bullet \times \clubsuit + ? \times \diamondsuit$

？ の成分がない．

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\ \text{本}/\text{人} & 3\text{本}/\text{人} \\ 5\ \text{冊}/\text{人} & 4\ \text{冊}/\text{人} \end{pmatrix}$$

◀ マトリックスの乗法の定義にしたがう．

$$= \begin{pmatrix} 2\times 2\ \text{本}/\text{人} + 0\times 5\ \text{冊}/\text{人} & 2\times 3\ \text{本}/\text{人} + 0\times 4\ \text{冊}/\text{人} \\ 0\times 2\ \text{本}/\text{人} + 2\times 5\ \text{冊}/\text{人} & 0\times 3\ \text{本}/\text{人} + 2\times 4\ \text{冊}/\text{人} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\times 2\ \text{本}/\text{人} & 2\times 3\ \text{本}/\text{人} \\ 2\times 5\ \text{冊}/\text{人} & 2\times 4\ \text{冊}/\text{人} \end{pmatrix}$$

◀ どの成分も 2 倍する．

の略記と考えます．

★ 本書 pp.47 – 48

連立１次方程式の解法 —— Gauss – Jordan の消去法　　★ 本書 1.4 節

● なぜ連立１次方程式を考えるのか ？

● 連立１次方程式の解の特徴が説明できる解法

① Gauss – Jordan の消去法（今回）

② Cramer の方法（ダイジェスト版 **9**)

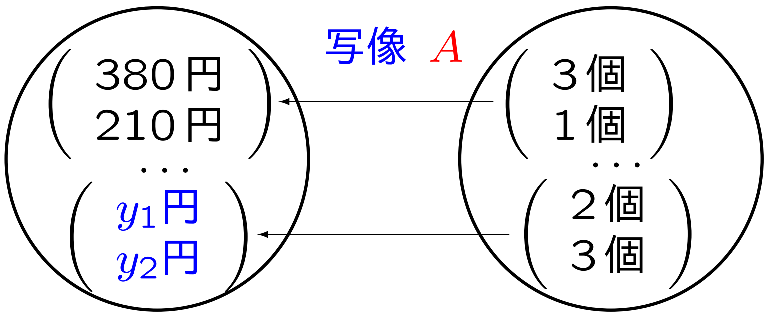
導入

★ 本書 pp.50 – 51

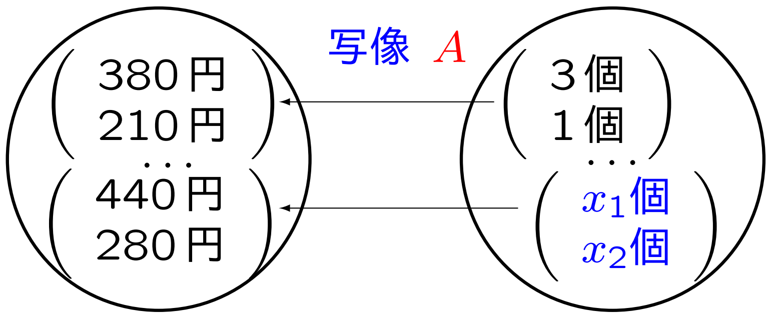
品目	Ａセット	Ｂセット
りんご	100 円 / 個	80 円 / 個
みかん	50 円 / 個	60 円 / 個

$$\begin{pmatrix} \text{りんごの合計額} \\ \text{みかんの合計額} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \text{Ａセットの個数} \\ \text{Ｂセットの個数} \end{pmatrix}.$$

値域（出力の集合 Y） 定義域（入力の集合 X）



値域（出力の集合 Y） 定義域（入力の集合 X）



未知 既知（個数）

$$\begin{pmatrix} y_1\text{円} \\ y_2\text{円} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100\text{円/個} & 80\text{円/個} \\ 50\text{円/個} & 60\text{円/個} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\text{個} \\ 3\text{個} \end{pmatrix}.$$

既知（予算） 未知

$$\begin{pmatrix} 440\text{円} \\ 280\text{円} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100\text{円/個} & 80\text{円/個} \\ 50\text{円/個} & 60\text{円/個} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\text{個} \\ x_2\text{個} \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{問題 1}}$

$$\begin{pmatrix} 440\text{円} \\ 280\text{円} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100\text{円}/\text{個} & 80\text{円}/\text{個} \\ 50\text{円}/\text{個} & 60\text{円}/\text{個} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\text{個} \\ x_2\text{個} \end{pmatrix}$$

の右辺を計算して，x_1，x_2 についての連立１次方程式を書いてください．

★ 解を求めるのではなく，方程式を書く問題です．

$\boxed{解}$ $\begin{pmatrix} \boxed{100\ 円/個\quad 80\ 円/個} \\ \\ \boxed{50\ 円/個\quad 60\ 円/個} \end{pmatrix}$ のようにヨコベクトル量の並びと見て

$$\left(\boxed{100\ 円/個\quad 80\ 円/個}\right) と \left(\boxed{\begin{array}{l} x_1\ 個 \\ x_2\ 個 \end{array}}\right) とのスカラー積$$

$$100\ 円/個 \times x_1\ 個 + 80\ 円/個 \times x_2\ 個,$$

$$\left(\boxed{50\ 円/個\quad 60\ 円/個}\right) と \left(\boxed{\begin{array}{l} x_1\ 個 \\ x_2\ 個 \end{array}}\right) とのスカラー積$$

$$50\ 円/個 \times x_1\ 個 + 60\ 円/個 \times x_2\ 個$$

を並べて

本書 p.32

$$\begin{cases} 100\ 円/個 \times x_1\ 個 + 80\ 円/個 \times x_2\ 個 = 440\ 円 \\ \ \ 50\ 円/個 \times x_1\ 個 + 60\ 円/個 \times x_2\ 個 = 280\ 円 \end{cases}$$

を単位で割ると

$$\begin{cases} 100x_1 + 80x_2 = 440 \\ \ \ 50x_1 + 60x_2 = 280. \end{cases}$$

準備　１元１次方程式

★ 本書 p.13，p.18 ADVICE 欄，p.50

表１　０を含む１元１次方程式

方程式	解	解の個数
$3x = 0$	$x = 0$	１個
$0x = 0$	不定	無数
$0x = 3$	不能	０個

連立１次方程式でも，

① 解が１組の例，② 解が無数に存在する例，③ 解が存在しない例

があります．

中学数学の方法では，解の特徴を判別することがむずかしいので，
連立１次方程式の解法を工夫します．

発展　Gauss − Jordan の消去法（掃き出し法）

★ ２元連立１次方程式：本書 pp.53 − 56，３元連立１次方程式：本書 pp.69 − 71

発想

「解を求める」とは　　（この例の 1，2，3，4，5，6 は数の並びが美しいと思いませんか?）

例 $$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{cases} x_1 = \spadesuit \\ x_2 = \clubsuit \end{cases}$$

のように，

もとの連立１次方程式を書き換える操作

と考えることができます．ただし，この書き方では，

どのように書き換えればいいかという手がかり

がつかめません．

係数 0,1（いち）を「いちいち書く」と解法の糸口が見えてきます．

$\boxed{\text{連立１次方程式の書き換え}}$ ★ 本書 p.52

例 $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{cases} 1x_1 + 0x_2 = \spadesuit \\ 0x_1 + 1x_2 = \clubsuit \end{cases}$

の連立１次方程式の形のまま書き表すと

係数と定数項の値を

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \spadesuit \\ 0 & 1 & \clubsuit \end{pmatrix}$$

のように書き換えればいいことに気づきます．

$\boxed{\text{係数 1, 0 は重要!}}$

Q1 どのように進めると，このように書き換えることができるのでしょうか?

$\boxed{\text{重要}}$ ★ 本書 p.52

$$\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{\begin{matrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 6 \\ 1 \end{matrix} \end{array}\right) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left(\begin{array}{cc} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} \spadesuit \\ \clubsuit \end{matrix} \end{array}\right)$$

単位マトリックス

ダイジェスト版 **6** p.14, 本書 p.44

文字と等号を省いた仮の姿であり，一つの行は一つの方程式を表します．

仮の姿	真の姿（本当はこれらの式）
4 5 6	$4x_1 + 5x_2 = 6$
3 2 1	$3x_1 + 2x_2 = 1$
1 0 ♠	$1x_1 + 0x_2 = \spadesuit$
0 1 ♣	$0x_1 + 1x_2 = \clubsuit$

$\boxed{\text{解法}}$ **基本行操作**

注意１　同じ行の数は運命共同体であり，単独行動はできません．

注意２　係数を書き換える順序が重要です．

注意３　左辺と右辺は等しくないから等号 ＝ は成り立たず，$\longrightarrow$ を使います．

$$\begin{pmatrix} \boxed{4} & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{①-②} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ \boxed{3} & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

◀ 4 を 1 に書き換えるには?
丸数字は直前の式の番号．

$$\xrightarrow{②-①\times 3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & \boxed{-7} & -14 \end{pmatrix}$$

◀ 3 を 0 に書き換えるには?
丸数字は直前の式の番号．

$$\xrightarrow{②\times\left(-\frac{1}{7}\right)} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{3} & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

◀ -7 を 1 に書き換えるには?
丸数字は直前の式の番号．

$$\xrightarrow{①-②\times 3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

◀ 3 を 0 に書き換えるには?
丸数字は直前の式の番号．

順序
$$\begin{array}{ccc} 1 & & 0 \\ \downarrow & & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 = -1 \\ 0x_1 + 1x_2 = 2 \end{cases}$$

◀ 真の姿（$1, 0, -1, 0, 1, 2$ は「本当はこれらの式」という意味）

注意　未知数の個数　$4x_1 + 5x_2 = 6$　x_1, x_2 の2個.

解の個数　$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$ の1個（1組）.

$\boxed{\text{問題2}}$ Gauss – Jordanの消去法（掃き出し法）で

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 = 3 \\ 2x_1 + 6x_2 = 1 \end{cases}$$

を解いてください．

★ ねらいは Gauss – Jordanの消去法の使い方を練習することだから，二つの方程式が実質的に一致しないことはどうでもいい．

$\boxed{\text{解}}$

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & 9 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{①-②} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ \boxed{2} & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

◀ ３を１に書き換えるには**?**
丸数字は直前の式の番号**.**

$$\xrightarrow{②-①\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

◀ ２を０に書き換えるには**?**
丸数字は直前の式の番号**.**

順序 $\begin{array}{ccc} 1 & & 0 \\ \downarrow & & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & 1 \end{array}$

$$\begin{cases} 1x_1 + 3x_2 = 2 \\ 0x_1 + 0x_2 = -3 \end{cases}$$

◀ 真の姿 (1, 3, 2, 0, 0, −3 は「本当はこれらの式」という意味)

第２式は $0 = -3$ という正しくない式だから**,** 解は存在しません**.** $\boxed{\text{不能}}$

$\boxed{\text{問題3}}$　Gauss – Jordan の消去法（掃き出し法）で

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 = 6 \\ 2x_1 + 6x_2 = 4 \end{cases}$$

を解いてください．

★ ねらいは Gauss – Jordan の消去法の使い方を練習することだから，二つの方程式が実質的に同じであることはどうでもいい．

$\boxed{\text{解}}$

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{①\times\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ \boxed{2} & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

◀ 3を1に書き換えるには?
丸数字は直前の式の番号.

$$\xrightarrow{②-①\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

◀ 2を0に書き換えるには?
丸数字は直前の式の番号.

順序 $\begin{matrix} 1 & & 0 \\ \downarrow & & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & 1 \end{matrix}$

$$\begin{cases} 1x_1 + 3x_2 = 2 \\ 0x_1 + 0x_2 = 0 \end{cases}$$

◀ 真の姿 $(1, 3, 2, 0, 0, 0$ は「本当はこれらの式」という意味)

第2式は $0=0$ という正しい式だから, 解は存在します.
実質的な方程式は

$$1x_1 + 3x_2 = 2$$

だけしかありません. この方程式をみたす解は1組ではありません. $\boxed{\text{不定}}$

Q2 「解が不定」とは, どんな値でも取り得るという意味でしょうか?

デタラメに $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ を $1x_1 + 3x_2 = 2$ に代入しても
右辺の値に一致しません．どのように解を求めるのでしょうか?

$x_2 = s$（s は任意の実数）とおくと

$$1x_1 + 3s = 2$$

だから

$$x_1 = 2 - 3s$$

です．解は

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 3s \\ x_2 = s \end{cases}$$

と表せます．

$\boxed{\text{参考}}$「s は任意の実数」であることを $\forall s \in \mathbb{R}$ と表します．$\forall$ は「任意の (any の頭文字)」です．

★ 本書 p.200

例 $s=3$ のとき

$$\begin{cases} x_1 = -7 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

です．s はどんな値でも取ることができます．

問題4 $x_1 = t$ (t は任意の実数) とおいて，解を表してください．

$\boxed{\text{解}}$ $x_1 = t$（t は任意の実数）とおくと

$$1t + 3x_2 = 2$$

だから

$$x_2 = -\frac{1}{3}t + \frac{2}{3}$$

です．解は

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -\dfrac{1}{3}t + \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

と表せます．

例 $t = -7$ のとき

$$\begin{cases} x_1 = -7 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

です．t はどんな値でも取ることができます．

次回のための予習

解の特徴を判別する方法 —— 階数　本書 1.5 節