数学ターミナル　線型代数の発想

ダイジェスト版　**9**

前回の補足

★ 本書 p.80

連立1次方程式をマトリックスとベクトルで表す方法

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

x_1, x_2 : 入力(未知), y_1, y_2 : 出力(既知)

連立1次方程式は, 出力に対応する入力を求める方程式です.

問題1 この連立1次方程式を, マトリックスとタテベクトルで表してください.

$\boxed{\text{解}}$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

記号：$\mathbb{y} = A\mathbb{x}$.

$\boxed{\text{参考}}$ スカラー積

$$y_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$y_2 = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

を並べてまとめた形.

$\boxed{\text{問題２}}$ この連立１次方程式を，マトリックスとヨコベクトルで表してください.

$\boxed{\text{解}}$ ★ダイジェスト版 **5** p.2

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

記号：$\mathbb{y}' = \mathbb{x}' \ {}^tA$.

注意　問題 **1** のマトリックスを転置マトリックスに書き換えるだけでなく，
マトリックスとベクトルとの乗法の順序も変えないと，
もとの連立１次方程式と一致しません．

$\boxed{\text{参考}}$ スカラー積

$$y_1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix},$$

$$y_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

を並べてまとめた形．

そうついせい

双対性

★ 本書 p.80

タテベクトルの世界 $$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

アベコベの世界

ヨコベクトルの世界 $$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{連立１次方程式の解法 — Cramer の方法}}$ ★ 本書 1.6 節

連立１次方程式の解を分数で表す発想　Why?

● 必要な概念 (知識)

行列式の概念

注意　マトリックス(行列)とはまったく異なります.

導入 ★ 本書 p.13

基本１ 0を含む分数

$$\frac{0}{\clubsuit} \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\spadesuit}{0} \qquad \clubsuit \neq 0, \ \spadesuit \neq 0.$$

★ ダイジェスト版 **7** p.7

0　　不定　　不能

連立１次方程式の解を分数で表すと,

① 解が１組の例, ② 解が無数に存在する例, ③ 解が存在しない例
を判別することができます.

基本２　１元１次方程式

$$3x = 5.$$

解

$$x = \frac{5}{3}.$$

Q1　この解の特徴を見出せるでしょうか?
連立１次方程式の解を求めるための手がかりになります.

$$3x = 5. \qquad x = \frac{5}{3}.$$

分子：定数項（右辺）
分母：係数（左辺）

$\boxed{\text{拡張}}$ $\Downarrow$ 2元連立1次方程式

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 5 \\ 2x_1 + (-7)x_2 = 1 \end{cases}$$

九九と同じように，まず計算法に慣れることにします．あとで，なぜ解が求まるかを理解します．

$\boxed{\text{How}}$ Cramer の方法 本書 p.83

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -7 \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -7 \end{vmatrix}}$$

分子：定数項（右辺）
分母：係数（左辺）

２次の行列式

★ 本書 p.83

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \overset{\text{定義}}{=} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$\boxed{\textbf{問題3}}$ x_1, x_2 を求めてください.

$\boxed{解}$

$$\text{分母}\quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = 3 \times (-7) - 4 \times 2 = -29.$$

$$x_1\text{の分子}\quad \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = 5 \times (-7) - 4 \times 1 = -39.$$

$$x_2\text{の分子}\quad \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 1 - 5 \times 2 = -7.$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -7 \end{vmatrix}} = \frac{-39}{-29} = \frac{39}{29}.$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -7 \end{vmatrix}} = \frac{-7}{-29} = \frac{7}{29}.$$

$\boxed{\text{Why}}$ ★ 本書 p.85

$$
\begin{cases}
3x_1 + 4x_2 = 5 & ① \\
2x_1 + (-7)x_2 = 1 & ②
\end{cases}
$$

$① \times (-7) - ② \times 4$

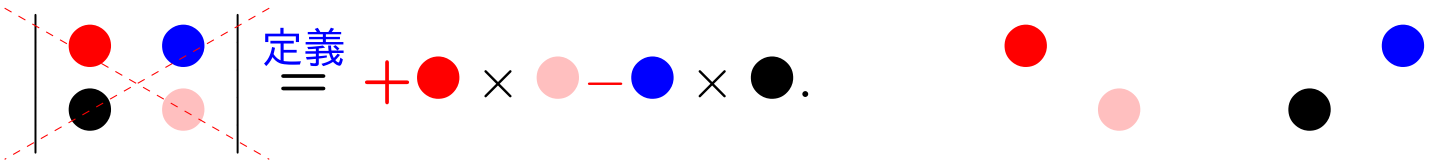
$$
\begin{array}{rrcrcr}
 & 3 \times (-7)x_1 & + & 4 \times (-7)x_2 & = & 5 \times (-7) \\
-) & 2 \times 4x_1 & + & (-7) \times 4x_2 & = & 1 \times 4 \\
\hline
 & \{3 \times (-7) - 2 \times 4\}x_1 & & & = & 5 \times (-7) - 1 \times 4
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{5 \times (-7) - 1 \times 4}{3 \times (-7) - 2 \times 4} \\
&= \frac{\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -7 \end{vmatrix}}.
\end{aligned}
$$

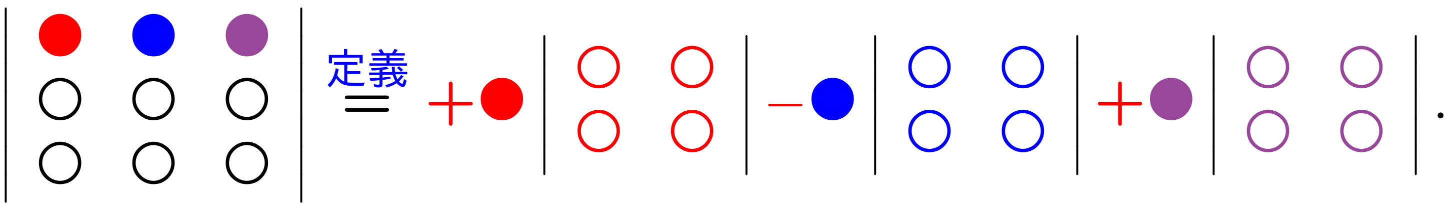
$\boxed{\text{自習}}$ x_2 も確かめてください.

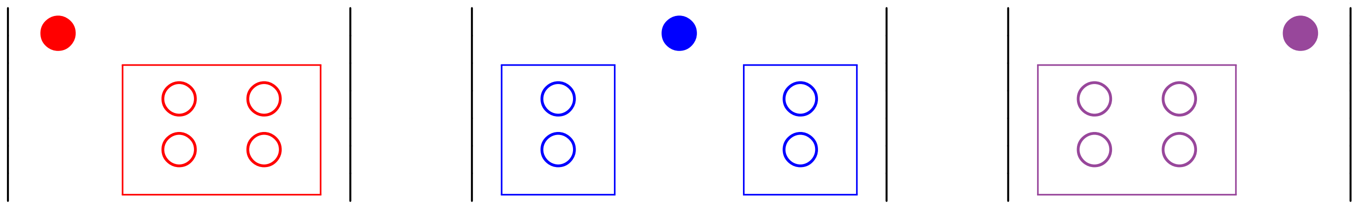
３元連立１次方程式

準備　２次の行列式



$\boxed{\text{拡張}}$ ⇓ ３次の行列式　　★ 本書 p.86

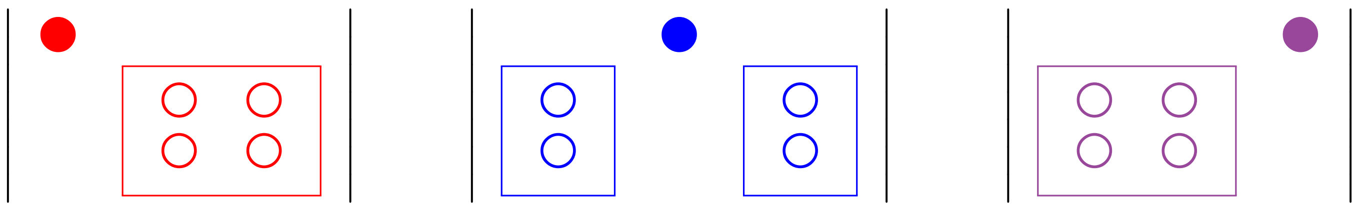




$\boxed{\text{問題 4}}$ $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 3 \end{vmatrix}$ を計算してください.

$\boxed{解}$

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 3 \end{vmatrix}
&= +3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \\
&= 3 \times \{1 \times 3 - 0 \times (-3)\} - 2\{(-2) \times 3 - 0 \times 4\} \\
&\quad -\{(-2) \times (-3) - 1 \times 4\} \\
&= 19.
\end{aligned}
$$



$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 1x_3 = 5 \\ -2x_1 + 1x_2 + 0x_3 = -4 \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

解

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 3 \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -2 & -4 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 3 \end{vmatrix}} \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & -4 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 3 \end{vmatrix}}$$

分子：定数項（右辺）
分母：係数（左辺）

数学は突然変異しない！２元連立１次方程式と同じ方法を拡張します．

$\boxed{\text{問題 5}}$ x_1, x_2, x_3 を求めてください.

$\boxed{解}$

$$分母\quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 19. \qquad ◀ 問題2$$

$$x_1 の分子\quad 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 29.$$

$$x_2 の分子\quad 3\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -18.$$

$$x_3 の分子\quad 3\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -44.$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{29}{19} \\ x_2 = -\frac{18}{19} \\ x_3 = -\frac{44}{19} \end{cases}$$

検算

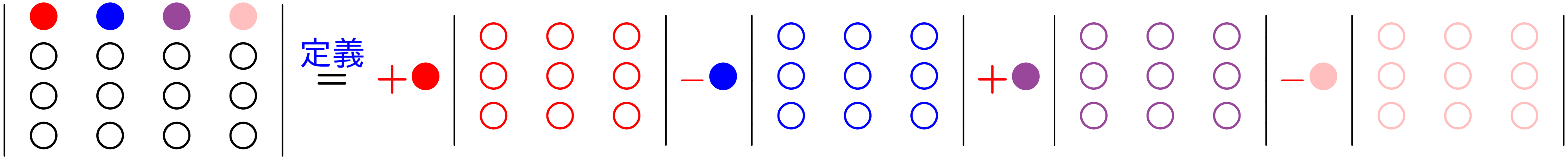
$$\frac{3 \times 29 - 2 \times 18 + 44}{19} = \frac{95}{19} = 5.$$

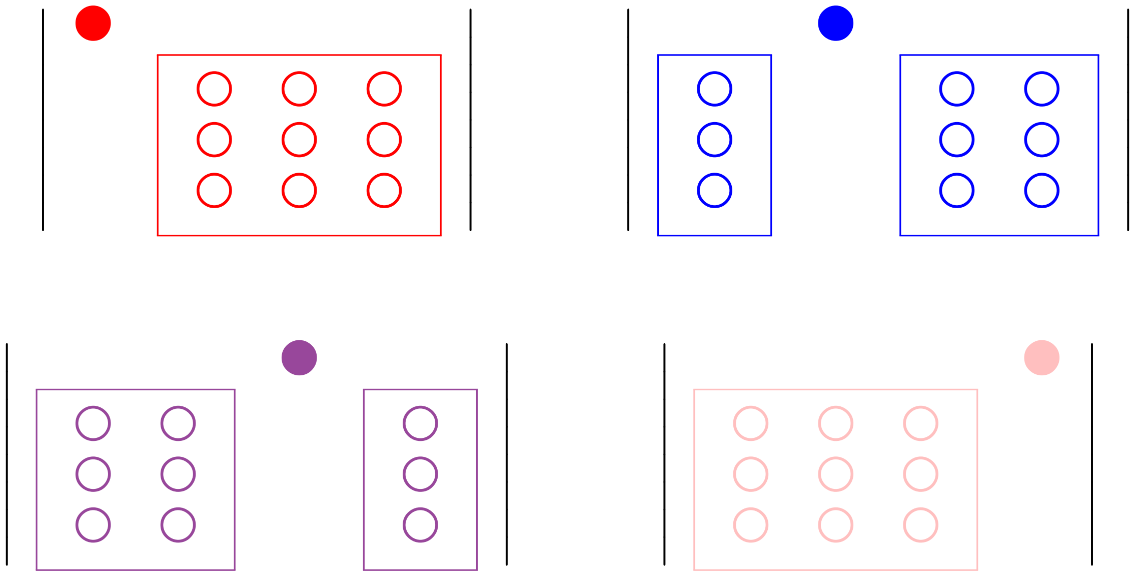
$$\frac{-2 \times 29 - 18}{19} = \frac{-76}{19} = -4.$$

$$\frac{4 \times 29 + 3 \times 18 - 3 \times 44}{19} = \frac{38}{19} = 2.$$

４次の行列式　（４元連立１次方程式に必要）

★ 本書 p.96

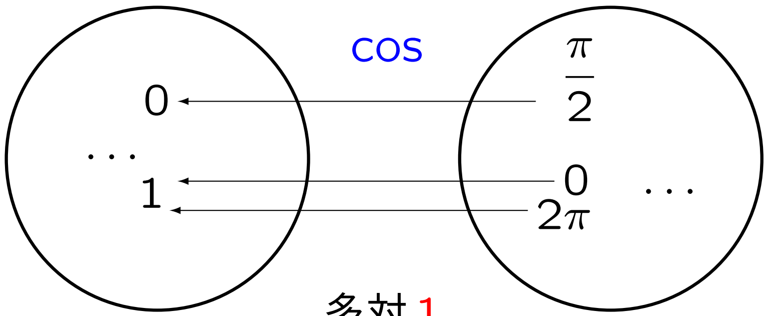




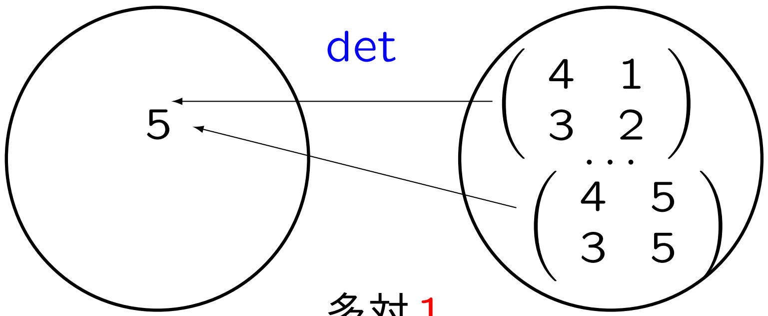
行列式関数

★ 本書 p.93

値域（出力の集合 Y） 定義域（入力の集合 X）　　値域（出力の集合 Y） 定義域（入力の集合 X）



多対 1



多対 1

例　$\cos\frac{\pi}{2},\ \cos\frac{3\pi}{2}, \cdots = 0.$

例　$\det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\ \det\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \cdots = 5.$

$y = f(x)$ と同じ形　$\underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}_{5} = \det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$ マトリックスの関数　$f(\ \ )$ が det の場合

Gauss − Jordanの消去法（掃き出し法）と Cramerの方法との比較

★ 本書 p.103

Gauss − Jordanの消去法	Cramerの方法
• 方程式の個数と未知数の個数とが一致していない場合でも適用できる.	• 方程式の個数と未知数の個数とが一致している場合に適用する.
• プログラミングに有効な手続き	• 係数・定数項で解を表せる.

注意　行列式は正方マトリックスに対して定義します.

Cramerの方法で,解を表す分数の分子・分母は正方マトリックスの行列式です.

次回のための予習

行列式の性質　本書 1.6.2 項