線形代数レポート解答

レポート 1　解答 1 （6 点）

(1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & -3 & -6 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \qquad \boxed{\begin{cases} x = & 1 \\ y = & 3 \\ z = & -2 \end{cases}}$$

(2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 6 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \boxed{\begin{cases} x = & 3 \\ y = & -1 \\ z = & 1 \end{cases}}$$

(3)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & -6 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & 5 & 4 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 3 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & 5 & 4 & 9 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{13}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{9}{5} & -\frac{12}{5} & -\frac{27}{5} \\ 0 & 0 & \frac{13}{5} & \frac{16}{5} & \frac{61}{5} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{13}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -3 \\ 0 & 0 & \frac{13}{5} & \frac{16}{5} & \frac{61}{5} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{20}{3} & 20 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \qquad \boxed{\begin{cases} x_1 = & -1 \\ x_2 = & 2 \\ x_3 = & 1 \\ x_4 = & 3 \end{cases}}$$

注 2 列目の消去法で、2 行と 3 行を入れ換えると後の計算が楽になる。

レポート 1　解答 2

(4)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 5 & 5 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + 2z = & 1 \\ y + z = & 3 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} x = & 1 - 2z \\ y = & 3 - z \end{cases}}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2z \\ 3 - z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(5)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + z & = 2 \\ y - z & = 1 \\ 0 & = 3 \end{cases} \qquad \boxed{\text{解なし}}$$

(6)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -5 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 4 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & 6 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 6 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = & 1 \\ x_2 - 2x_3 - 2x_4 = & 2 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} x_1 & = 1 - x_3 - 2x_4 \\ x_2 & = 2 + 2x_3 + 2x_4 \end{cases}}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x_3 - 2x_4 \\ 2 + 2x_3 + 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

レポート 2 解答 1 （11 点）

問 1. (1)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2&1&1&0\\ 3&4&0&1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\ 3&4&0&1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\ 0&\frac{5}{2}&-\frac{3}{2}&1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\ 0&1&-\frac{3}{5}&\frac{2}{5}\end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1&0&\frac{4}{5}&-\frac{1}{5}\\ 0&1&-\frac{3}{5}&\frac{2}{5}\end{array}\right) \qquad A^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{4}{5}&-\frac{1}{5}\\ -\frac{3}{5}&\frac{2}{5}\end{pmatrix}}$$

階数 $\operatorname{rank} A = 2$

(2)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&1&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&1&0\\ 1&0&1&0&0&1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&1&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&1&0\\ 0&-1&1&-1&0&1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&-1&1&-1&0\\ 0&1&1&0&1&0\\ 0&0&2&-1&1&1\end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&-1&1&-1&0\\ 0&1&1&0&1&0\\ 0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ 0&1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\ 0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right) \qquad A^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}}$$

階数 $\operatorname{rank} A = 3$

(3)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0&2&-1&1&0&0\\ -2&1&2&0&1&0\\ 3&-2&-1&0&0&1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2&1&2&0&1&0\\ 0&2&-1&1&0&0\\ 3&-2&-1&0&0&1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&-\frac{1}{2}&-1&0&-\frac{1}{2}&0\\ 0&2&-1&1&0&0\\ 3&-2&-1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&-\frac{1}{2}&-1&0&-\frac{1}{2}&0\\ 0&2&-1&1&0&0\\ 0&-\frac{1}{2}&2&0&\frac{3}{2}&1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&-\frac{1}{2}&-1&0&-\frac{1}{2}&0\\ 0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\ 0&-\frac{1}{2}&2&0&\frac{3}{2}&1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&-\frac{5}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}&0\\ 0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\ 0&0&\frac{7}{4}&\frac{1}{4}&\frac{3}{2}&1\end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&-\frac{5}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}&0\\ 0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\ 0&0&1&\frac{1}{7}&\frac{6}{7}&\frac{4}{7}\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&\frac{3}{7}&\frac{4}{7}&\frac{5}{7}\\ 0&1&0&\frac{4}{7}&\frac{3}{7}&\frac{2}{7}\\ 0&0&1&\frac{1}{7}&\frac{6}{7}&\frac{4}{7}\end{array}\right) \qquad A^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{3}{7}&\frac{4}{7}&\frac{5}{7}\\ \frac{4}{7}&\frac{3}{7}&\frac{2}{7}\\ \frac{1}{7}&\frac{6}{7}&\frac{4}{7}\end{pmatrix}}$$

階数 $\operatorname{rank} A = 3$

レポート 2 解答 2

問 1. (4)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right) \qquad A^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}}$$

階数 $\operatorname{rank} A = 3$

(5)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -4 & 6 & 1 & 0 \\ 6 & -9 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 6 & -9 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right) \qquad \boxed{\text{逆行列無し}}$$

階数 $\operatorname{rank} A = 1$

(6)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 7 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \boxed{\text{逆行列無し}}$$

階数 $\operatorname{rank} A = 2$

(7)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\boxed{\text{逆行列無し}}$

階数 $\operatorname{rank} A = 1$

レポート 2 解答 3

問 2. (1) $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると、$\vec{x} = A^{-1}\vec{d} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}}$

(2) $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると、$\vec{x} = A^{-1}\vec{d} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}}$

(3) $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると、$\vec{x} = A^{-1}\vec{d} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{6}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}$

(4) $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると、$\vec{x} = A^{-1}\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}}$

レポート 3 解答 （4 点）

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{13}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 2(-\dfrac{5}{4} + \dfrac{65}{4}) = \boxed{30}$

別解

$= -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -10 & -5 \\ 0 & -8 & -1 \end{vmatrix} = -(-10(-1) - (-5)(-8)) = 30$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 7 & 4 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & \frac{13}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \end{vmatrix} = 2(-\dfrac{65}{4} - \dfrac{65}{4}) = \boxed{0}$

別解

$= -\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \\ -6 & 4 & 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 14 & 5 \\ 0 & -14 & -5 \end{vmatrix} = -(-1)(14(-5) - 5(-14)) = 0$

(3) $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 5 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & -18 & -24 \\ 0 & -1 & 9 & 12 \\ 0 & -1 & 9 & 7 \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} 2 & -18 & -24 \\ -1 & 9 & 12 \\ -1 & 9 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 9 & 12 \\ 2 & -18 & -24 \\ -1 & 9 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \boxed{0}$

(4) $\begin{vmatrix} -1 & 6 & 9 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 9 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 6 & 9 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 15 & 14 & 0 \\ 0 & -12 & -17 & 3 \end{vmatrix}$

$= (-1)\begin{vmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 15 & 14 & 0 \\ -12 & -17 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & -13 & 3 \end{vmatrix} = (-3)(9 \cdot 3 - 0(-13)) = \boxed{81}$

レポート 4 解答 No.1 （5 点）

問 1.　(1)

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = \boxed{-3}, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = \boxed{6}, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = \boxed{-3}$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = \boxed{6}, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = \boxed{-12}, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = \boxed{6}$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = \boxed{-3}, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = \boxed{6}, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \boxed{-3}$$

1 行の展開から $|A| = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 6 + 3 \cdot (-3) = \boxed{0}$

(2)

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{-9}, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{5}, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \boxed{3}$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{4}, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{-3}, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \boxed{1}$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \boxed{2}, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \boxed{2}, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = \boxed{-3}$$

1 行の展開から $|A| = 1 \cdot (-9) + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = \boxed{7}$

問 2. (1)

$$\begin{vmatrix} x & a & b \\ a & x & b \\ a & b & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+a+b & a & b \\ a+x+b & x & b \\ a+b+x & b & x \end{vmatrix} = (x+a+b)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & x & b \\ 1 & b & x \end{vmatrix}$$

$$= (x+a+b)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & x-a & 0 \\ 0 & b-a & x-b \end{vmatrix} = \boxed{(x+a+b)(x-a)(x-b)}$$

他方で、余因子展開から

$$\begin{vmatrix} x & a & b \\ a & x & b \\ a & b & x \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} x & b \\ b & x \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} a & b \\ a & x \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} a & x \\ a & b \end{vmatrix} = x^3 - (a^2+b^2+ab)x + a^2b + ab^2$$

(2)

$$\begin{vmatrix} a+x & b & c \\ a & b+x & c \\ a & b & c+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+x+b+c & b & c \\ a+b+x+c & b+x & c \\ a+b+c+x & b & c+x \end{vmatrix} = (x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b+x & c \\ 1 & b & c+x \end{vmatrix}$$

$$= (x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = \boxed{x^2(x+a+b+c)}$$

レポート 4 解答 No.2

(3)

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix}
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ 0 & x_2^3 - x_1 x_2^2 & x_3^3 - x_1 x_3^2 & x_4^3 - x_1 x_4^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_2^2 - x_1 x_2 & x_3^2 - x_1 x_3 & x_4^2 - x_1 x_4 \\ 0 & x_2^2(x_2 - x_1) & x_3^2(x_3 - x_1) & x_4^2(x_4 - x_1) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & x_4(x_4 - x_1) \\ 0 & x_2^2(x_2 - x_1) & x_3^2(x_3 - x_1) & x_4^2(x_4 - x_1) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & x_4(x_4 - x_1) \\ x_2^2(x_2 - x_1) & x_3^2(x_3 - x_1) & x_4^2(x_4 - x_1) \end{vmatrix} \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

さらに、

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}
= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_3^2 - x_2 x_3 & x_4^2 - x_2 x_4 \end{vmatrix}
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_3 - x_2 & x_4 - x_2 \\ 0 & x_3(x_3 - x_2) & x_4(x_4 - x_2) \end{vmatrix} \\
= \begin{vmatrix} x_3 - x_2 & x_4 - x_2 \\ x_3(x_3 - x_2) & x_4(x_4 - x_2) \end{vmatrix}
&= (x_3 - x_2)(x_4 - x_2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_3 & x_4 \end{vmatrix} \\
&= (x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)
\end{aligned}
$$

以上より、$|A| = \boxed{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)}$

数学II　レポート 5 解答 No. 1 （7 点）

問 1. (1) $\begin{matrix} A_{11}=4, & A_{12}=-3 \\ A_{21}=-1, & A_{22}=2 \end{matrix}$　　$|A| = 2\times 4 + 1\times(-3) = 5$

$A^{-1} = \boxed{\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}$ または $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

(2)

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$|A| = 1\times 1 + 1\times 1 + 0\times(-1) = 2$

$A^{-1} = \boxed{\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$ または $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(3)

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$|A| = 0\times 3 + 2\times 4 + (-1)\times 1 = 7$

$A^{-1} = \boxed{\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}}$ または $\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{6}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$

(4)

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$|A| = 2\times 2 + 1\times(-2) + 2\times(-2) = -2$

$A^{-1} = \boxed{\dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}}$ または $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

レポート 5 解答　No. 2

問 2. (1) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 18 - 6 = \boxed{12}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \\ 7 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 13 \\ 0 & -9 & -15 \end{vmatrix} = -105 + 117 = 12, \qquad x = \frac{12}{12} = \boxed{1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 30 - (-6) = 36, \qquad y = \frac{36}{12} = \boxed{3}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -9 - 15 = -24, \qquad z = \frac{-24}{12} = \boxed{-2}$$

(2) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2(-15 - 0) = \boxed{-30}$

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 11 & -7 \end{vmatrix} = -2(-21 + 66) = -90, \ x = \frac{-90}{-30} = \boxed{3}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 2(15 - 0) = 30, \qquad y = \frac{30}{-30} = \boxed{-1}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 2(-18 + 3) = -30, \qquad z = \frac{-30}{-30} = \boxed{1}$$

レポート 5 解答 No. 3

(3) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ -4 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -4 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

$= -3\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -3(-(-20)) = \boxed{-60}$

$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & -1 \\ -6 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -13 & 7 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 14 & -4 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -13 & 7 & 5 \\ -3 & 3 & 0 \\ 14 & -4 & -5 \end{vmatrix} = -(-3)\begin{vmatrix} -13 & 7 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 14 & -4 & -5 \end{vmatrix}$

$= -3\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -13 & 7 & 5 \\ 14 & -4 & -5 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} = -3(30-50) = 60, \qquad x_1 = \frac{60}{-60} = \boxed{-1}$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -6 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 9 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 9 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 9 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ 9 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

$= 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 3(-15-25) = -120, \qquad x_2 = \frac{-120}{-60} = \boxed{2}$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -6 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & 9 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -4 & 1 \\ 3 & -3 & -3 \\ -4 & 9 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -5 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -4 & 9 & 4 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -5 & -4 & 1 \\ -4 & 9 & 4 \end{vmatrix}$

$= -3\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -9 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -3(0+20) = -60, \qquad x_3 = \frac{-60}{-60} = \boxed{1}$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -6 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & -3 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -5 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -5 & 3 & -4 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$

$= -3\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} = -3(15+45) = -180, \qquad x_4 = \frac{-180}{-60} = \boxed{3}$

レポート 6 解答 No. 1 （6 点）

(1) Ker$A$: $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in$ Ker$A$ とすると、定義 Ker$A = \{\vec{v} | A\vec{v} = \vec{0}\}$ より、連立方程式 $A\vec{v} = \vec{0}$ を消去法により解くと、

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & -4 & -6 & 0 \\ -3 & 6 & 9 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ であるから、$x - 2y - 3z = 0,\ x = 2y + 3z$

$$\mathrm{Ker}A \ni \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y + 3z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって、Ker$A$ の基底は $\boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$

ImA : 上の消去法の計算から、A の階数は 1 であるから、１列目が基底である。

基底 $\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}}$

(2) Ker$A$: $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in$ Ker$A$ とすると、定義 Ker$A = \{\vec{v} | A\vec{v} = \vec{0}\}$ より、連立方程式 $A\vec{v} = \vec{0}$ を消去法により解くと、

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & -7 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

であるから、$\begin{cases} x + 3z &= 0 \\ y - 2z &= 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x &= -3z \\ y &= 2z \end{cases}$ となり、Ker$A \ni \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

よって、Ker$A$ の基底は $\boxed{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$

ImA : 上の消去法の計算から、A の階数は 2 であるから、１列目, 2 列目が基底である。

基底 $\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}}$ （小行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ より、1 列と 2 列は 1 次独立）

レポート 6 解答 No. 2

(3) Ker$A$:

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}A$ とすると、定義 $\mathrm{Ker}A = \{\vec{v} | A\vec{v} = \vec{0}\}$ より、連立方程式 $A\vec{v} = \vec{0}$ を消去法により解くと、

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

であるから、$x = 0, y = 0, z = 0$ となり、$\mathrm{Ker}A \ni \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

よって、Ker$A$ の基底は $\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$

ImA :

上の消去法の計算から、A の階数は 3 であるから、１列目, 2 列目, 3 列目が基底である。

基底 $\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}$

レポート 7 解答 No.1　（21 点）

(1) 固有多項式 $|A-\lambda E|=0$ は、

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -2 \\ 2 & 4-\lambda & -4 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 2 & 4-\lambda \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)\{(4-\lambda)(-1-\lambda)+4\} - \{2(-1-\lambda)+8\} - 2\{2-2(4-\lambda)\} = 0$$

$$-\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6=0, \quad \lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$$

以上より、固有値 $\boxed{\lambda=1,2,3}$

各固有値の固有空間 $\mathrm{Ker}(A-\lambda E)$ の基底は、レポート 6 のように計算する。

$\lambda=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

以上から、$\begin{cases} x-\frac{1}{2}z & =0 \\ y-z & =0 \end{cases}$, $\begin{cases} x & =\frac{1}{2}z \\ y & =z \end{cases}$, よって、

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ より、基底は $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　または、$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}z \\ z \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}z\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ より基底は 、$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}$

または、$\begin{cases} z & =2x \\ y & =z=2x \end{cases}$, より $\begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ としても良い。

$\lambda=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

以上から、$\begin{cases} x-z & =0 \\ y-z & =0 \end{cases}$,　$x=y=z$, よって、$\begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ より、基底は $\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

$\lambda=3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

以上から、$\begin{cases} x-z & =0 \\ y-2z & =0 \end{cases}$, $\begin{cases} x & =z \\ y & =2z \end{cases}$, よって、$\begin{pmatrix} z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ より、基底は $\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$

レポート 7 解答 No. 2

以上から対角化可能であり、$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&2\\2&1&1\end{pmatrix}$ とすると、$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

(2) 固有多項式 $|A-\lambda E|=0$ は、

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&1&-2\\-1&-1-\lambda&1\\1&1&-1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}-1-\lambda&1\\1&-1-\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-1&1\\1&-1-\lambda\end{vmatrix}+(-2)\begin{vmatrix}-1&-1-\lambda\\1&1\end{vmatrix}=0$$

$(2-\lambda)\{(-1-\lambda)(-1-\lambda)-1\}-\{-(-1-\lambda)-1\}-2\{-1-(-1-\lambda)\}=0$

$-\lambda^3+\lambda=0,\quad \lambda^3-\lambda=\lambda(\lambda^2-1)=0$ 以上より、固有値 $\boxed{\lambda=0,\pm1}$

$\lambda=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&0\\-1&-2&1&0\\1&1&-2&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&0\\0&-1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-3&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

以上から、$\begin{cases}x-3z&=0\\y+z&=0\end{cases},\quad\begin{cases}x&=3z\\y&=-z\end{cases}$, よって、$\begin{pmatrix}3z\\-z\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$ より、基底は $\boxed{\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}}$

$\lambda=-1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&1&-2&0\\-1&0&1&0\\1&1&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\-1&0&1&0\\3&1&-2&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&-2&-2&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

以上から、$\begin{cases}x-z&=0\\y+z&=0\end{cases},\quad\begin{cases}x&=z\\y&=-z\end{cases}$, よって、$\begin{pmatrix}z\\-z\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ より、基底は $\boxed{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}$

$\lambda=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&-2&0\\-1&-1&1&0\\1&1&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\\0&0&0&0\\0&-1&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

以上から、$\begin{cases}x-z&=0\\y&=0\end{cases},\quad\begin{cases}x&=z\\y&=0\end{cases}$, よって、$\begin{pmatrix}z\\0\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ より、基底は $\boxed{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}$

以上から対角化可能であり、$P=\begin{pmatrix}3&1&1\\-1&-1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ とすると、$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

レポート 7 解答 No. 3

(3) 固有多項式 $|A-\lambda E|=0$ は、

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$(2-\lambda)\{(1-\lambda)(1-\lambda)-0\}-(0-0)-0\{-3(1-\lambda)\}=0$

$(2-\lambda)(1-\lambda)^2=0$, 以上より、固有値 $\boxed{\lambda=1,2}$

$\lambda=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ 以上から、$x=y=0$, よって、$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ より、

基底は $\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$

$\lambda=2$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$ であるから、$\begin{cases} y & =0 \\ 3x-2y-z & =0 \end{cases}$, $\begin{cases} y & =0 \\ z & =3x \end{cases}$,

よって、$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 3x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ より、

基底は $\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}$

基底の数は 2 個で 3 個に足りないから、対角化不可能。

レポート 7 解答 No. 4

(4) 固有多項式 $|A - \lambda E| = 0$ は、

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)\{-(2-\lambda)\lambda - 1\} - (-\lambda + 1) + \{-1 - (2-\lambda)\} = 0$$

$$-\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda - 6 = 0, \quad \lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 = (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

以上より、固有値 $\boxed{\lambda = -1, 2, 3}$

$\lambda = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ 以上から、$\begin{cases} x + \frac{1}{2}z & = 0 \\ y - \frac{1}{2}z & = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x & = -\frac{1}{2}z \\ y & = \frac{1}{2}z \end{cases}$,

よって、$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ より、基底は $\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}}$

$\lambda = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\begin{cases} x - z & = 0 \\ y + z & = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x & = z \\ y & = -z \end{cases}$, よって、$\begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ より、基底は $\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

$\lambda = 3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$\begin{cases} x - y - z & = 0 \\ -2z & = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x & = y \\ z & = 0 \end{cases}$, よって、$\begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ より、基底は $\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

以上から対角化可能であり、$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

レポート 7 解答 No 5

(5) 固有多項式 $|A-\lambda E|=0$ は、

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -1-\lambda & 1 \\ -2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1-\lambda \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$(3-\lambda)\{(-\lambda)(-1-\lambda)-2\}+2(-2\lambda+2)+\{4-(-2)(-1-\lambda)\}=0$

$-\lambda^3+2\lambda^2-\lambda=0,\quad \lambda^3-2\lambda^2+\lambda=\lambda(\lambda-1)^2=0$ 以上より、固有値 $\boxed{\lambda=0,1}$

$\lambda=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ から、$\begin{cases} x-y+\frac{1}{2}z & =0 \\ x & =y-\frac{1}{2}z \end{cases}$,

よって、$\begin{pmatrix} y-\frac{1}{2}z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ より、基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

または、$z=-2x+2y$ から、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ -2x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 2y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ より、

基底は $\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$

$\lambda=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ 以上から、$\begin{cases} x+z & =0 \\ y+z & =0 \end{cases}$, $\begin{cases} x & =-z \\ y & =-z \end{cases}$, よって、$\begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = -z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ より、

基底は $\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$

以上から対角化可能であり、$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ とすると、$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

レポート 7 解答 No. 6

(6) 固有多項式 $|A-\lambda E|=0$ は、

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -11 & 3 \\ 2 & -\lambda & 3 \\ -2 & 7 & -\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 7 & -\lambda \end{vmatrix} - (-11)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$(5-\lambda)(\lambda^2-21)+11(-2\lambda+6)+3(14-2\lambda)=0$

$-\lambda^3+5\lambda^2-7\lambda+3=0, \quad \lambda^3-5\lambda^2+7\lambda-3=(\lambda-1)^2(\lambda-3)=0$ 以上より、固有値 $\boxed{\lambda=1,3}$

$\lambda=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -11 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 7 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & -11 & 3 & 0 \\ -2 & 7 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 4 & -11 & 3 & 0 \\ -2 & 7 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -9 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ & 6 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

以上から、$\begin{cases} x+\frac{5}{3}z & =0 \\ y+\frac{1}{3}z & =0 \end{cases}$, $\begin{cases} x & =-\frac{5}{3}z \\ y & =-\frac{1}{3}z \end{cases}$, よって、$\begin{pmatrix} -\frac{5}{3}z \\ -\frac{1}{3}z \\ z \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{3}z\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ より、

基底は $\boxed{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}}$

$\lambda=3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -11 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & 0 \\ -2 & 7 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 3 & 0 \\ 2 & -11 & 3 & 0 \\ -2 & 7 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 2 & -11 & 3 & 0 \\ -2 & 7 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right)$ 以上から、$\begin{cases} x-\frac{3}{2}y+\frac{3}{2}z & =0 \\ -8y & =0 \end{cases}$, $\begin{cases} x & =-\frac{3}{2}z \\ y & =0 \end{cases}$, よって、

$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{2}z\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ より、基底は $\boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}$

以上から基底の数は 2 個で 3 個に足りないから、対角化不可能である。