



問1. 次の証明の空欄を埋めよ。

(1) 定理  $X$  を上に有界な実数の集合とする。  $a = \sup X$  とすると、

$a$  に収束する  $X$  の数列  $\{x_n\}$  がある。

(証明)  $n$  を自然数とする。  $a$  は上限であるから、  $a$  未満の  $a - \frac{1}{n}$  は上界でない。

よって  $a - \frac{1}{n} < x_n \leq a$  となる  $x_n \in X$  がある。

$\boxed{A}\epsilon > 0$  に対し、  $\frac{1}{\epsilon} < N$  となる  $N$  を選ぶと、  $\boxed{B} > N \Rightarrow |x_n - \boxed{C}| = \boxed{C} - x_n < \frac{1}{n} < \boxed{D}$  □

(2) 定理 有界な数列  $\{x_n\}$  には集積点  $a$  がある。

(証明) 有界より、  $\boxed{A}a_1, \boxed{A}b_1, \boxed{B}n \in \mathbf{N}; a_1 \leq x_n \leq b_1$  である。

$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}, n_1 = 1$  とする。

そこで、増加数列  $\{a_i\}$ 、減少数列  $\{b_i\}$ 、増加数列  $\{n_i\}$ 、  $c_i = \frac{a_i + b_i}{2}$  を、

$a_i < b_i, x_n \in [a_i, b_i]$  となる  $n$  が無限個ある、  $b_i - a_i = \frac{b_1 - a_1}{2^{i-1}}, x_{n_i} \in [a_i, b_i]$

を満たすように、順に、次のように選ぶ。  $i$  まで上のように選んであるとする。

$x_n \in [a_i, c_i]$  となる  $\boxed{C}$  が無限個あるならば、

その中で  $n_1, \dots, n_i$  よりも大きい物を  $n_{i+1}$  とし、  $a_{i+1} = \boxed{D}_i, b_{i+1} = c_i$  とする。

そうでないならば、  $x_n \in [c_i, b_i]$  となる  $\boxed{C}$  が無限個あるから、

同様に十分大きい  $n_{i+1}$  を選び、  $a_{i+1} = c_i, b_{i+1} = \boxed{E}_i$  とする。

以上の  $a_i, b_i, n_i$  が条件を満たすことは明らかである。

$\{a_i\}$  は上に有界な増加数列であり、  $\{b_i\}$  は下に有界な減少数列であるから、どちらも収束する。

$a = \lim_{i \rightarrow \infty} a_i, b = \lim_{i \rightarrow \infty} b_i$  とすると、  $\lim_{i \rightarrow \infty} (b_i - a_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{b_1 - a_1}{2^{i-1}} = 0$  から、  $b = \boxed{F}$  である。

$a_i \leq x_{n_i} \leq b_i$  と挟み撃ちの原理により、  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i} = \boxed{F}$  □

(3) 定理 関数  $y = f(x)$  が区間  $[a, b]$  で連続で、

$f(a) > 0, f(b) < 0$  ならば、  $\exists c \in (a, b); f(c) = 0$

(証明)  $X = \{x \in [a, b]; f(x) > 0\}$  とする。  $a \in X$  より  $X \neq \emptyset$  であり、

上に有界であるから、上限  $c = \sup X$  がある。

1)  $f(c) > 0$  とする。  $0 < \epsilon < f(c)$  となる  $\epsilon$  がある。

$c$  での連続の定義で、  $\epsilon$  に対応する  $\delta$  を取る。

$c < x < c + \boxed{A}$  となる  $x$  に対し、  $|x - c| = x - c < \boxed{A}$  だから、

$|f(x) - f(c)| < \boxed{B}, 0 < f(c) - \boxed{B} < f(x) < f(c) + \boxed{B}$

よって、  $\boxed{C} \in X$  であり、  $c$  が  $X$  の上限である事に矛盾する。

2)  $f(c) < 0$  とする。  $0 < \epsilon < -f(c)$  となる  $\epsilon > 0$  がある。

$c$  での連続の定義で、 $\epsilon$  に対応する  $\delta$  を取る。

すると、 $c - \boxed{D} < x < c$  ならば、 $|x - c| = c - x < \boxed{D}$  だから、

$$|f(x) - f(c)| < \boxed{E}, f(c) - \boxed{E} < f(x) < f(c) + \boxed{E} < 0$$

一方、 $c$  は上限であるから、 $c - \boxed{D} < x \leq c$  となる  $\boxed{F} \in X$  がある。

ここで、 $c \notin X$  より  $c - \boxed{D} < x < c$  である。

$\boxed{F} \in X$  は  $f(x) > 0$  を意味し、上の  $f(x) < 0$  と矛盾する。

3)  $f(c) > 0, f(c) < 0$  どちらでも矛盾するから  $f(c) = \boxed{G}$   $\square$

(4) 定理 関数  $y = f(x)$  が区間  $[a, b]$  で連続ならば、最小値  $f(c), c \in [a, b]$  がある。

(証明)  $F = \{f(x) | x \in [a, b]\}$  とする。

1) もし、 $F$  が、下に有界でないならば、 $\boxed{A}n \in \mathbf{N}, \exists x_n \in [a, b]; f(x_n) < -n$

集積点定理により、部分数列  $\{x_{n_i}\}$  があり、 $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i} = d \in [a, b]$

連続より、 $\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{n_i}) = f(\boxed{B})$  である。

だが、 $x_{n_i}$  の定義より  $\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{n_i}) = -\boxed{C}$  であり矛盾する。

よって、 $F$  は下に有界。

2)  $F \neq \emptyset$  だから、下限  $m$  がある。

その時、 $F$  の数列  $\{f(x_n)\}$  で  $m$  に収束するものがある。

集積点定理より、収束する部分数列  $\{x_{n_i}\}$  がある。その収束値を  $c$  とする。

連続より、 $f(\boxed{D}) = f\left(\lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i}\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{n_i}) = \boxed{E}$  だから  $m \in F$  である。

よって、 $\boxed{F}$  は  $F$  の最小値である。  $\square$

(5) 定理 二つの関数  $y = f(x), y = g(x)$  が区間  $[a, b]$  で連続、 $(a, b)$  で微分可能であり、

$(a, b)$  で  $g'(x) \neq 0$  ならば、 $\exists c \in (a, b); \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$  である。

(証明) 1) もし、 $g(b) - g(a) = \boxed{A}$  であるならば、

ロールの定理により、 $g'(c) = \boxed{A}$  となる  $c \in (a, b)$  がある。

これは、仮定と矛盾するから、 $g(b) - g(a) \neq \boxed{A}$

2)  $F(x) = f(x)\{g(b) - g(a)\} - \{f(b) - f(a)\}g(x)$  と置くと、

$$F(b) = -f(\boxed{B})g(\boxed{C}) + f(\boxed{C})g(\boxed{B}) = F(a),$$

$$F'(x) = f'(\boxed{D})\{g(b) - g(a)\} - \{f(b) - f(a)\}g'(\boxed{D})$$

より、ロールの定理から、

$$\exists c \in (a, b); F'(c) = f'(\boxed{E})\{g(b) - g(a)\} - \{f(b) - f(a)\}g'(\boxed{E}) = \boxed{A}$$

よって、 $\{f(b) - f(a)\}g'(\boxed{E}) = f'(\boxed{E})\{g(b) - g(a)\}$

これから定理は明らかである。  $\square$

(6) 定理  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  を正項級数とし、極限值  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$  があるとする。

もし、 $a < 1$  ならば、この正項級数は収束する。

(証明) 1)  $\exists r > 0; 0 \leq a < r < 1$  である。 $\epsilon = r - a$  とすると、

$$\boxed{A}N; n > N \Rightarrow |\sqrt[n]{a_n} - a| < \boxed{B}$$

よって、 $a - \boxed{B} < \sqrt[n]{a_n} < a + \boxed{B} = \boxed{C}$  より、 $n > N \Rightarrow 0 < a_n < \boxed{C}^n$  である。

2)  $\sum_{n=1}^k r^n = r \frac{1-r^k}{1-r}$  と  $0 < r < 1$  より  $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$  は収束する。

また、正項級数は、数列としては増加数列であるから、

部分和が上に有界になる事が収束するための必要十分条件である。

例えば、 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$  は、 $\sum_{n=1}^k r^n = r \frac{1-r^k}{1-r} < \frac{\boxed{D}}{1-\boxed{D}}$  より、部分和は上に有界になる。

次に、 $n > N$  で  $a_n < \boxed{C}^n$  であるから、級数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  の部分和は

$$\sum_{n=1}^k a_n = \sum_{n=1}^N a_n + \sum_{n=N+1}^k a_n \leq \sum_{n=1}^N a_n + \sum_{n=N+1}^k \boxed{C}^n \leq \sum_{n=1}^N a_n + \frac{\boxed{E}}{1-\boxed{E}}$$

だから、上に有界になる。よって、収束する。  $\square$

問2. 次の空欄を埋めよ。

上限  $a = \sup X$  の定義:  $(\boxed{A}x \in X; x \boxed{B}a) \wedge \{(\boxed{A}x \in X; x \boxed{B}b) \Rightarrow a \boxed{C}b\}$

問3. 次の集合  $X$  の下限  $a = \inf X$  および上限  $b = \sup X$  を求めよ。

$$X = \left\{ \frac{n+1}{n} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$$

問4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$  の次の証明の空欄を埋めよ。

(証明)  $\forall \epsilon > 0$  に対し、 $\frac{\boxed{A}}{\epsilon} - \boxed{B} < N$  となるように  $N$  を取る。すると、

$$n > N \text{ ならば、} \frac{\boxed{A}}{n + \boxed{B}} < \epsilon \text{ より、} \left| \frac{2n+1}{n+1} - \boxed{C} \right| < \epsilon \quad \square$$

問5. 次のべき級数の収束半径  $R$  を求めよ。

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n x^n$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n}{2^n + 1} x^n$$

問6. 陰関数  $x^2 + xy + y^2 = 1$  の両辺を  $x$  で微分することにより、 $y'$ ,  $y''$  を求める。

$$y' = -\frac{\boxed{A}x + \boxed{B}y}{x + \boxed{C}y}, \quad y'' = -\frac{\boxed{D}}{(x + \boxed{E}y)\boxed{F}}$$

問7.  $s > 0$  に対し、 $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$  をガンマ関数とする。次の性質を示せ。

(1)  $\Gamma(1) = \boxed{A}$

(2)  $\Gamma(2) = \boxed{B}$

(3)  $\Gamma(s+1) = \left[ -\boxed{C}^{-\boxed{D}} x^{\boxed{E}} \right]_0^\infty + \boxed{F} \int_0^\infty \boxed{C}^{-\boxed{D}} x^{\boxed{E}-1} dx = \boxed{F} \Gamma(\boxed{G}) = \boxed{H}!$

問8. 正規分布曲線の面積  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$  を計算する。

$I(a) = \int_0^a e^{-x^2} dx$  とする。関数  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$  と領域

$$D(a) = \{(\theta, r) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \wedge 0 \leq r \leq a\}, \quad E(a) = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a \wedge 0 \leq y \leq a\}$$

を考える。すると、
$$\iint_{D(a)} f(x, y) dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^a e^{-\boxed{A}^2} \boxed{B} dr \right\} d\theta = \frac{\boxed{D}}{\boxed{C}} \left( 1 - \boxed{E} - \boxed{F}^2 \right)$$

一方 
$$\iint_{E(a)} f(x, y) dS = \int_0^a \left\{ \int_0^a e^{-x^2} e^{-y^2} dy \right\} dx = (I(a))^{\boxed{G}}$$

さらに、 $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} > 0$  と  $D(a) \subset E(a) \subset D(\sqrt{\boxed{H}}a)$  より、

$$\frac{\boxed{D}}{\boxed{C}} \left( 1 - \boxed{E} - \boxed{F}^2 \right) \leq I(a)^{\boxed{G}} \leq \frac{\boxed{D}}{\boxed{C}} \left( 1 - \boxed{E} - \boxed{I} \boxed{F}^2 \right)$$

以上より、 $a \rightarrow \infty$  にすると、 $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$  が計算できる。  $\square$

--	--	--	--	--	--	--

--

0	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
1	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
2	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
3	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
4	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
5	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪
6	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫
7	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬
8	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬	⑭
9	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬	⑭	⑮

問1(1)

A	▽	⊃	€	δ	n	m	a	b
B	▽	⊃	€	δ	n	m	a	b
C	▽	⊃	€	δ	n	m	a	b
D	▽	⊃	€	δ	n	m	a	b

(2)

A	▽	⊃	€	δ	n	m	a	b
B	▽	⊃	€	δ	n	m	a	b
C	▽	⊃	€	δ	n	m	a	b
D	▽	⊃	€	δ	n	m	a	b
E	▽	⊃	€	δ	n	m	a	b
F	▽	⊃	€	δ	n	m	a	b

(3)

A	€	δ	a	c	x	0	<	>
B	€	δ	a	c	x	0	<	>
C	€	δ	a	c	x	0	<	>
D	€	δ	a	c	x	0	<	>
E	€	δ	a	c	x	0	<	>
F	€	δ	a	c	x	0	<	>

(4)

A	▽	⊃	c	d	n	m	0	∞
B	▽	⊃	c	d	n	m	0	∞
C	▽	⊃	c	d	n	m	0	∞
D	▽	⊃	c	d	n	m	0	∞
E	▽	⊃	c	d	n	m	0	∞
F	▽	⊃	c	d	n	m	0	∞

(5)

A	▽	⊃	0	a	b	c	x	=
B	▽	⊃	0	a	b	c	x	=
C	▽	⊃	0	a	b	c	x	=
D	▽	⊃	0	a	b	c	x	=
E	▽	⊃	0	a	b	c	x	=

(6)

A	▽	⊃	€	δ	r	a	b	<
B	▽	⊃	€	δ	r	a	b	<
C	▽	⊃	€	δ	r	a	b	<
D	▽	⊃	€	δ	r	a	b	<
E	▽	⊃	€	δ	r	a	b	<

問2

A	▽	⊃	€	δ	a	x	<	>
B	▽	⊃	€	δ	a	x	<	>
C	▽	⊃	€	δ	a	x	<	>

問3

a	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
b	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧

問4

A	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
B	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
C	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧

問5

(1)	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
(2)	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧

問6

A	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
B	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
C	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
D	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
E	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
F	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧

問7

A	0	1	2	s	x	π	e	∞
B	0	1	2	s	x	π	e	∞
C	0	1	2	s	x	π	e	∞
D	0	1	2	s	x	π	e	∞
E	0	1	2	s	x	π	e	∞
F	0	1	2	s	x	π	e	∞
G	0	1	2	s	x	π	e	∞
H	0	1	2	s	x	π	e	∞

問8

A	①	②	③	④	a	r	π	e
B	①	②	③	④	a	r	π	e
C	①	②	③	④	a	r	π	e
D	①	②	③	④	a	r	π	e
E	①	②	③	④	a	r	π	e
F	①	②	③	④	a	r	π	e
G	①	②	③	④	a	r	π	e
H	①	②	③	④	a	r	π	e
I	①	②	③	④	a	r	π	e

--	--	--	--	--	--	--

--

0	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
1	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ①
2	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> ②
3	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ③
4	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> ④
5	<input type="radio"/> ⑤	<input type="radio"/> ⑤	<input type="radio"/> ⑤	<input type="radio"/> ⑤	<input type="radio"/> ⑤	<input type="radio"/> ⑤	<input type="radio"/> ⑤
6	<input type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑥
7	<input type="radio"/> ⑦	<input type="radio"/> ⑦	<input type="radio"/> ⑦	<input type="radio"/> ⑦	<input type="radio"/> ⑦	<input type="radio"/> ⑦	<input type="radio"/> ⑦
8	<input type="radio"/> ⑧	<input type="radio"/> ⑧	<input type="radio"/> ⑧	<input type="radio"/> ⑧	<input type="radio"/> ⑧	<input type="radio"/> ⑧	<input type="radio"/> ⑧
9	<input type="radio"/> ⑨	<input type="radio"/> ⑨	<input type="radio"/> ⑨	<input type="radio"/> ⑨	<input type="radio"/> ⑨	<input type="radio"/> ⑨	<input type="radio"/> ⑨

問1(1)

A	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
B	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
C	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
D	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
(2)	A	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
B	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
C	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
D	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
E	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
F	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
(3)	A	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
B	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
C	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
D	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
E	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
F	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
G	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
(4)	A	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
B	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
C	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
D	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
E	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
F	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
(5)	A	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
B	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
C	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
D	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
E	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
(6)	A	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
B	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
C	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
D	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
E	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

問2

A	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
B	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
C	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
問3	a	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> ⑤	<input type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑦
b	<input type="radio"/> ①	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> ⑤	<input type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑦	<input type="radio"/> ⑧
問4	A	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> ⑤	<input type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑦
B	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> ⑤	<input type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑦	<input type="radio"/> ⑧
C	<input type="radio"/> ①	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> ⑤	<input type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑦	<input type="radio"/> ⑧
問5	(1)	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> ⑤	<input type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑦
(2)	<input type="radio"/> ①	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> ⑤	<input type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑦	<input type="radio"/> ⑧
問6	A	<input type="radio"/> ①	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> ⑤	<input type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑦
B	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> ⑤	<input type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑦	<input type="radio"/> ⑧
C	<input type="radio"/> ①	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> ⑤	<input type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑦	<input type="radio"/> ⑧
D	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> ⑤	<input checked="" type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑦	<input type="radio"/> ⑧
E	<input type="radio"/> ①	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> ⑤	<input type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑦	<input type="radio"/> ⑧
F	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ②	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> ⑤	<input type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑦	<input type="radio"/> ⑧
問7	A	<input type="radio"/> ①	<input checked="" type="radio"/> ②	<input type="radio"/> s	<input type="radio"/> x	<input type="radio"/> $\pi$	<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> $\infty$
B	<input type="radio"/> ①	<input checked="" type="radio"/> ②	<input type="radio"/> s	<input type="radio"/> x	<input type="radio"/> $\pi$	<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> $\infty$	
C	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> s	<input type="radio"/> x	<input type="radio"/> $\pi$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $\infty$
D	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> s	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $\pi$	<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> $\infty$
E	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ②	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> x	<input type="radio"/> $\pi$	<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> $\infty$
F	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ②	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> x	<input type="radio"/> $\pi$	<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> $\infty$
G	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ②	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> x	<input type="radio"/> $\pi$	<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> $\infty$
H	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ②	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> x	<input type="radio"/> $\pi$	<input type="radio"/> e	<input type="radio"/> $\infty$
問8	A	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> a	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $\pi$
B	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> a	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $\pi$	<input type="radio"/> e
C	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> ③	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> r	<input type="radio"/> $\pi$	<input type="radio"/> e
D	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> r	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> e
E	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> r	<input type="radio"/> $\pi$	<input checked="" type="radio"/>
F	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> r	<input type="radio"/> $\pi$	<input type="radio"/> e
G	<input type="radio"/> ①	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> r	<input type="radio"/> $\pi$	<input type="radio"/> e
H	<input type="radio"/> ①	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> r	<input type="radio"/> $\pi$	<input type="radio"/> e
I	<input type="radio"/> ①	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> a	<input type="radio"/> r	<input type="radio"/> $\pi$	<input type="radio"/> e

数学I 期末試験1 解答

問1

- (1)  $A = \forall, B = n, C = a, D = \epsilon,$
- (2)  $A = \exists, B = \forall, C = n, D = a, E = b, F = a$
- (3)  $A = \delta, B = \epsilon, C = x, D = \delta, E = \epsilon, F = x, G = 0$
- (4)  $A = \forall, B = d, C = \infty, D = c, E = m, F = m$
- (5)  $A = 0, B = b, C = a, D = x, E = c$
- (6)  $A = \exists, B = \epsilon, C = r, D = r, E = r$

問2

$A = \forall, B = \leq, C = \leq$

問3

$a = \inf X = 1, b = \sup X = 2$

問4

$A = 1, B = 1, C = 2$

問5

- (1) 1 (2) 2

問6

$A = 2, B = 1, C = 2, D = 6, E = 2, F = 3$

問7

$A = 1, B = 1, C = e, D = x, E = s, F = s, G = s, H = s$

問8

$A = r, B = r, C = 4, D = \pi, E = e, F = a, G = 2, H = 2, I = 2$





問1. 次の証明の空欄を埋めよ。

(1) 定理  $X$  を下に有界な実数の集合とする。  $a = \inf X$  とすると、

$X$  の数列  $\{x_n\}$  で  $a$  に収束する数列がある。

(証明)  $n$  を自然数とする。  $a$  は下限であるから、  $a$  より大きい  $a + \frac{1}{n}$  は下界でない。

よって  $\boxed{A} + \frac{1}{n} > x_n \geq \boxed{A}$  となる  $x_n \in X$  がある。

$\boxed{B}\epsilon > 0$  に対し、  $\frac{1}{\epsilon} < N$  となる  $N$  を選ぶと、  $\boxed{C} > N \Rightarrow |x_n - a| = x_n - a < \frac{1}{n} < \boxed{D}$  □

(2) 定理 有界な数列  $\{x_n\}$  には集積点  $a$  がある。

(証明) 有界より、  $\boxed{A}K > 0$ ,  $\boxed{B}n \in \mathbf{N}; -K < x_n < K$  である。

$X = \{x | x_n \leq x \text{ となる } n \text{ は有限個}\}$  とする。

$x_n \leq -K$  となる  $\boxed{C}$  は 0 個 (有限個) だから  $-K \in X$  であり、  $X \neq \emptyset$  である。

次に、  $x \in X$  ならば、  $x < x_n$  となる  $\boxed{C}$  は無限個だから、一つは  $x < x_n$  となる  $\boxed{C}$  がある。

よって、  $x < x_n < K$  となり、  $X$  は上に有界である。以上から、上限  $a = \sup X$  がある。

そこで、  $\forall i \in \mathbf{N}$  に対し、増加自然数列  $n_i$  で、  $|x_{n_i} - a| \leq \frac{1}{i}$  となる物を選ぶために次のように考える。

ある集合の上限よりも大きい数は、それが上限でないならばその集合の要素にはならないから、

$\boxed{D} < \boxed{D} + \frac{1}{i}$  から、  $\boxed{D} + \frac{1}{i} \notin X$  であり、  $x_n \leq \boxed{D} + \frac{1}{i}$  となる  $\boxed{C}$  は無限個ある。

一方、  $\boxed{D} - \frac{1}{i}$  は、  $\boxed{D}$  未満なので上界ではない。そこで、  $\boxed{D} - \frac{1}{i} < x \leq \boxed{D}$  となる  $x \in X$  がある。

$X$  の定義から、  $x_n \leq \boxed{E}$  となる  $\boxed{C}$  は有限個である。無限個から有限個を引いても無限個であるから、

1)  $\boxed{D} - \frac{1}{i} < \boxed{E} < x_n \leq \boxed{D} + \frac{1}{i}$  となる  $\boxed{C}$  は無限個ある。

以上から、求める  $n_i$  を次のように選ぶ、

$i = 1$  に対しては、1) から、  $\boxed{D} - 1 < x_{n_1} \leq \boxed{D} + 1$  となる物を選ぶ。

$n_1 < \dots < n_{i-1}$  まで選ばれているとし、1) の無限個の  $\boxed{C}$  から、  $n_{i-1}$  より大きい物を  $n_i$  とする。

このとき、  $|x_{n_i} - a| \leq \frac{1}{i}$  から、  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i} = \boxed{F}$  □

(3) 定理 コーシー列  $\{x_n\}$  は収束する。

(証明) コーシー列の定義で、  $\epsilon = 1$  とし、対応する  $N$  を取り、  $m = N + 1$  とすると、

$\boxed{A} > N \Rightarrow |x_n - x_{N+1}| < 1$  であり、  $x_{N+1} - 1 < x_n < x_{N+1} + 1$  だから、  $\{x_n\}$  は有界になる。

集積点定理により、集積点  $a$  とそれに収束する部分数列  $\{x_{n_i}\}$  がある。ここで、  $\{n_i\}$  は増加数列である。

収束の定義から、  $\boxed{B}\epsilon > 0$  に対して、  $\exists I; i > I \Rightarrow |x_{n_i} - \boxed{C}| < \frac{\epsilon}{2}$  である。

さらに、コーシー列の定義で  $\frac{\epsilon}{2}$  に対応する  $N$  を取る。

$\{n_i\}$  は増加数列であるから、  $i > I, n_i > N$  となるように  $i$  を取れる。

すると、  $\boxed{D} > N$  ならば  $|x_n - \boxed{E}| = |x_n - x_{n_i} + x_{n_i} - \boxed{E}| \leq |x_n - x_{n_i}| + |x_{n_i} - \boxed{E}| < \boxed{F}$  □

(4) 定理 関数  $y = f(x)$  が区間  $[a, b]$  で連続で、

$f(a) < 0, f(b) > 0$  ならば、 $\exists c \in (a, b); f(c) = 0$

(証明)  $X = \{x \in [a, b]; f(x) > 0\}$  とする。 $b \in X$  より  $X \neq \emptyset$  であり、下に有界であるから、下限  $c = \inf X$  がある。

1)  $f(c) > 0$  とする。 $0 < \epsilon < f(c)$  となる  $\epsilon$  がある。

$c$  での連続の定義で、 $\epsilon$  に対応する  $\delta$  を取る。

$c - \delta < x < c$  となる  $x$  に対し、 $|x - c| = c - x < \boxed{A}$  だから、

$|f(x) - f(c)| < \boxed{B}, 0 < f(c) - \boxed{B} < f(x) < f(c) + \boxed{B}$

よって、 $\boxed{C} \in X$  であり、 $c$  が  $X$  の下限である事に矛盾する。

2)  $f(c) < 0$  とする。 $0 < \epsilon < -f(c)$  となる  $\epsilon > 0$  がある。

$c$  での連続の定義で、 $\epsilon$  に対応する  $\delta$  を取る。

すると、 $c < x < c + \delta$  ならば、 $|x - c| = x - c < \boxed{D}$  だから、

$|f(x) - f(c)| < \boxed{E}, f(c) - \boxed{E} < f(x) < f(c) + \boxed{E} < 0$

一方、 $\boxed{F}$  は下限であるから、 $\boxed{F} \leq x < \boxed{F} + \delta$  となる  $x \in X$  がある。

ここで、 $c \notin X$  より  $\boxed{F} < x < \boxed{F} + \delta$  である。

$x \in X$  は  $f(x) > 0$  を意味し、上の  $f(x) < 0$  と矛盾する。

3)  $f(c) > 0, f(c) < 0$  どちらでも矛盾するから  $f(c) = \boxed{G}$  □

(5) 定理 関数  $y = f(x)$  が区間  $[a, b]$  で連続、 $(a, b)$  で微分可能、

$f(a) = f(b)$  ならば、 $\exists c \in (a, b); f'(c) = 0$  である。

(証明) 最小値の定理より、 $f(x)$  の最小値  $f(c)$ ,  $c \in [a, b]$  がある。

もし、 $c = a$  または  $c = b$  ならば、 $f(d)$  が最大値になる  $d \in (a, b)$  があるから、

以下と同じ証明で  $f'(d) = 0$  が言える。

よって、 $c \in (a, b)$  と仮定する。

$f(c)$  は最小値であるから、 $c + h \in [a, b]$  ならば、 $f(c + h) - f(c) \boxed{A} 0$

もし、 $h > 0$  ならば  $f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + \boxed{B}) - f(c)}{\boxed{B}} \boxed{C} 0$

もし、 $h < 0$  ならば  $f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + \boxed{B}) - f(c)}{\boxed{B}} \boxed{D} 0$

よって、 $f'(c) = \boxed{E}$  □

(6) 定理  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  を正項級数とし、極限值  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$  があるとする。

もし、 $a < 1$  ならば、この正項級数は収束する。

(証明) 1)  $\exists r > 0; 0 \leq a < r < 1$  である。 $\epsilon = r - a$  とすると、収束の定義より、

$$\exists N; [A] > N \Rightarrow |\sqrt[n]{a_n} - a| < [B]$$

よって、 $a - [B] < \sqrt[n]{a_n} < a + [B] = [C]$  より、 $[A] > N \Rightarrow 0 < a_n < [C]^n$  である。

2)  $\sum_{n=1}^k r^n = r \frac{1-r^{k+1}}{1-r}$  と  $0 < r < 1$  より  $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$  は収束する。

また、正項級数は、数列としては増加数列であるから、

部分和が上に有界になる事が収束するための必要十分条件である。

例えば、 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$  は  $\sum_{n=1}^k r^n < \frac{r}{1-r}$  より部分和は上に有界になる。

次に、 $[A] > N$  で  $a_n < [C]^n$  であるから、級数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  の部分和に対し、

$$\sum_{n=1}^k a_n = \sum_{n=1}^N a_n + \sum_{n=N+1}^k a_n \leq \sum_{n=1}^N a_n + \sum_{n=N+1}^k [C]^n \leq \sum_{n=1}^N a_n + \frac{[C]^{N+1}}{[E] - [C]}$$

だから、上に有界になる。よって、収束する。  $\square$

問2. 次の空欄を埋めよ。

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$  の定義:  $[A]\epsilon > 0, \exists \delta > 0; |x - a| < [B] \Rightarrow |f(x) - \alpha| < [C]$

問3. 次の集合  $X$  の下限  $a = \inf X$  および上限  $b = \sup X$  を求めよ。

$$X = \left\{ \frac{3n-1}{n} \mid n \in \mathbf{N} \right\}, a = \inf X, b = \sup X$$

問4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+3}{n+2} = 3$  の次の証明の空欄を埋めよ。

(証明)  $\forall \epsilon > 0$  に対し、 $\frac{[A]}{\epsilon} - [B] < N$  となるように  $N$  を取る。すると、

$$n > N \text{ ならば、 } \frac{[A]}{n + [B]} < \epsilon \text{ より、 } \left| \frac{3n+3}{n+2} - [C] \right| < \epsilon \quad \square$$

問5. 次のべき級数の収束半径  $R$  を求めよ。

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{n}{3n+1} \right)^n x^n \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$$

問6. 陰関数  $x^2 + 2xy + 2y^2 = 3$  の両辺を  $x$  で微分することにより、 $y'$ ,  $y''$  を求める。

$$y' = -\frac{\boxed{A}x + \boxed{B}y}{x + \boxed{C}y}, \quad y'' = -\frac{\boxed{D}}{(x + \boxed{E}y)\boxed{F}}$$

問7. 解答用紙の  $s$  は  $\sin$  を、 $c$  は  $\cos$  を表す。

不定積分  $I = \int e^{ax} \sin bx \, dx$ ,  $J = \int e^{ax} \cos bx \, dx$  を求める。

積分  $\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{\boxed{A}} e^{ax} + C$  を使用して、 $I$  に部分積分を適用すると、

$$I = \frac{1}{\boxed{A}} e^{ax} \boxed{B} bx - \frac{\boxed{C}}{\boxed{A}} \int e^{ax} \boxed{D} bx \, dx$$

同様に、 $J$  にも部分積分を適用すると

$$J = \frac{1}{\boxed{A}} e^{ax} \boxed{E} bx + \frac{\boxed{C}}{\boxed{A}} \int e^{ax} \boxed{F} bx \, dx$$

以上から、上式を  $I$ ,  $J$  に関する連立方程式とみなして、解くと

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} \left( \boxed{G} \sin bx - \boxed{H} \cos bx \right), \quad J = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} \left( \boxed{I} \sin bx + \boxed{J} \cos bx \right)$$

問8. ラプラス変換  $L(f) = \int_0^\infty e^{-tx} f(x) \, dx$  を求める。

ただし、以下では、 $a > 0$  に対し、 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-ax} f(x) = 0$  とする。

$$(1) L(1) = \int_0^\infty e^{-tx} \, dx = \frac{1}{\boxed{A}}$$

$$(2) L(e^{ax}) = \int_0^\infty e^{-tx} e^{ax} \, dx = \frac{1}{\boxed{B} - \boxed{C}}, \quad (t > a)$$

$$(3) \int e^{-tx} \, dx = -\frac{e^{-tx}}{\boxed{A}} \text{ より、部分積分から、}$$

$$L(x) = \int_0^\infty e^{-tx} x \, dx = \left[ -\frac{e^{-tx}}{\boxed{A}} x \right]_0^\infty + \frac{\boxed{E}}{\boxed{D}} \int_0^\infty e^{-tx} \, dx = \frac{\boxed{G}}{\boxed{F}}$$

--	--	--	--	--	--	--

--

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

問1(1)

A	▽	⊃	€	δ	n	m	a	b
B	▽	⊃	€	δ	n	m	a	b
C	▽	⊃	€	δ	n	m	a	b
D	▽	⊃	€	δ	n	m	a	b

(2)

A	▽	⊃	€	δ	n	m	a	x
B	▽	⊃	€	δ	n	m	a	x
C	▽	⊃	€	δ	n	m	a	x
D	▽	⊃	€	δ	n	m	a	x
E	▽	⊃	€	δ	n	m	a	x
F	▽	⊃	€	δ	n	m	a	x

(3)

A	▽	⊃	€	δ	n	m	a	b
B	▽	⊃	€	δ	n	m	a	b
C	▽	⊃	€	δ	n	m	a	b
D	▽	⊃	€	δ	n	m	a	b
E	▽	⊃	€	δ	n	m	a	b
F	▽	⊃	€	δ	n	m	a	b

(4)

A	€	δ	a	c	x	0	<	>
B	€	δ	a	c	x	0	<	>
C	€	δ	a	c	x	0	<	>
D	€	δ	a	c	x	0	<	>
E	€	δ	a	c	x	0	<	>
F	€	δ	a	c	x	0	<	>
G	€	δ	a	c	x	0	<	>

(5)

A	0	a	b	c	x	h	≤	≥
B	0	a	b	c	x	h	≤	≥
C	0	a	b	c	x	h	≤	≥
D	0	a	b	c	x	h	≤	≥
E	0	a	b	c	x	h	≤	≥

(6)

A	▽	⊃	€	δ	r	a	n	1
B	▽	⊃	€	δ	r	a	n	1
C	▽	⊃	€	δ	r	a	n	1
D	▽	⊃	€	δ	r	a	n	1
E	▽	⊃	€	δ	r	a	n	1

問2

A	▽	⊃	€	δ	a	x	n	m
B	▽	⊃	€	δ	a	x	n	m
C	▽	⊃	€	δ	a	x	n	m

問3

a	1	2	3	4	5	6	7	8
b	1	2	3	4	5	6	7	8

問4

A	1	2	3	4	5	6	7	8
B	1	2	3	4	5	6	7	8
C	1	2	3	4	5	6	7	8

問5

(1)	1	2	3	4	5	6	7	8
(2)	1	2	3	4	5	6	7	8

問6

A	1	2	3	4	5	6	7	8
B	1	2	3	4	5	6	7	8
C	1	2	3	4	5	6	7	8
D	1	2	3	4	5	6	7	8
E	1	2	3	4	5	6	7	8
F	1	2	3	4	5	6	7	8

問7

A	x	e	a	a <sup>2</sup>	b	b <sup>2</sup>	s	c
B	x	e	a	a <sup>2</sup>	b	b <sup>2</sup>	s	c
C	x	e	a	a <sup>2</sup>	b	b <sup>2</sup>	s	c
D	x	e	a	a <sup>2</sup>	b	b <sup>2</sup>	s	c
E	x	e	a	a <sup>2</sup>	b	b <sup>2</sup>	s	c
F	x	e	a	a <sup>2</sup>	b	b <sup>2</sup>	s	c
G	x	e	a	a <sup>2</sup>	b	b <sup>2</sup>	s	c
H	x	e	a	a <sup>2</sup>	b	b <sup>2</sup>	s	c
I	x	e	a	a <sup>2</sup>	b	b <sup>2</sup>	s	c
J	x	e	a	a <sup>2</sup>	b	b <sup>2</sup>	s	c

問8

A	1	2	3	x	t	t <sup>2</sup>	a	e
B	1	2	3	x	t	t <sup>2</sup>	a	e
C	1	2	3	x	t	t <sup>2</sup>	a	e
D	1	2	3	x	t	t <sup>2</sup>	a	e
E	1	2	3	x	t	t <sup>2</sup>	a	e
F	1	2	3	x	t	t <sup>2</sup>	a	e
G	1	2	3	x	t	t <sup>2</sup>	a	e

--	--	--	--	--	--	--

--

0	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
1	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 1
2	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 2
3	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 3
4	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 4
5	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 5
6	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 6
7	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 7
8	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 8
9	<input type="radio"/> 9	<input type="radio"/> 9	<input type="radio"/> 9	<input type="radio"/> 9	<input type="radio"/> 9	<input type="radio"/> 9	<input type="radio"/> 9

問1(1)

A	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $m$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $b$
B	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $m$	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $b$
C	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $m$	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $b$
D	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $m$	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $b$
(2)	A	<input type="radio"/> $\forall$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $m$	<input type="radio"/> $a$
	B	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $m$	<input type="radio"/> $a$
	C	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $m$	<input type="radio"/> $a$
	D	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $m$	<input checked="" type="radio"/>
	E	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $m$	<input type="radio"/> $a$
	F	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $n$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $x$
(3)	A	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $m$	<input type="radio"/> $a$
	B	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $m$	<input type="radio"/> $a$
	C	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $m$	<input checked="" type="radio"/>
	D	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $m$	<input type="radio"/> $a$
	E	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $m$	<input checked="" type="radio"/>
	F	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $m$	<input type="radio"/> $a$
(4)	A	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $c$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $<$
	B	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $c$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $<$
	C	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $c$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $<$
	D	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $c$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $<$
	E	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $c$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $<$
	F	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $a$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $<$
	G	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $c$	<input type="radio"/> $x$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $<$
(5)	A	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $b$	<input type="radio"/> $c$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $h$	<input checked="" type="radio"/> $<$
	B	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $b$	<input type="radio"/> $c$	<input type="radio"/> $x$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $<$
	C	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $b$	<input type="radio"/> $c$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $h$	<input checked="" type="radio"/>
	D	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $b$	<input type="radio"/> $c$	<input type="radio"/> $x$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $>$
	E	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $b$	<input type="radio"/> $c$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $h$	<input type="radio"/> $<$
(6)	A	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $r$	<input type="radio"/> $a$	<input checked="" type="radio"/> 1
	B	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $r$	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $n$
	C	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $n$
	D	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $r$	<input type="radio"/> $a$	<input checked="" type="radio"/>
	E	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $r$	<input type="radio"/> $a$	<input checked="" type="radio"/>

問2

A	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $m$
B	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $m$
C	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $m$
問3	a	<input type="radio"/> 1	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7
	b	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7
問4	A	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7
	B	<input type="radio"/> 1	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7
	C	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7
問5	(1)	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7
	(2)	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7
問6	A	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7
	B	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7
	C	<input type="radio"/> 1	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7
	D	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7
	E	<input type="radio"/> 1	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7
	F	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7
問7	A	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $e$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $a^2$	<input type="radio"/> $b$	<input type="radio"/> $b^2$	<input type="radio"/> $s$
	B	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $e$	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $a^2$	<input type="radio"/> $b$	<input type="radio"/> $b^2$	<input checked="" type="radio"/>
	C	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $e$	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $a^2$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $b^2$	<input type="radio"/> $s$
	D	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $e$	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $a^2$	<input type="radio"/> $b$	<input type="radio"/> $b^2$	<input checked="" type="radio"/>
	E	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $e$	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $a^2$	<input type="radio"/> $b$	<input type="radio"/> $b^2$	<input checked="" type="radio"/>
	F	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $e$	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $a^2$	<input type="radio"/> $b$	<input type="radio"/> $b^2$	<input checked="" type="radio"/>
	G	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $e$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $a^2$	<input type="radio"/> $b$	<input type="radio"/> $b^2$	<input type="radio"/> $s$
	H	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $e$	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $a^2$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $b^2$	<input type="radio"/> $s$
	I	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $e$	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $a^2$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $b^2$	<input type="radio"/> $s$
	J	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $e$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $a^2$	<input type="radio"/> $b$	<input type="radio"/> $b^2$	<input type="radio"/> $s$
問8	A	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> $x$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $t^2$	<input type="radio"/> $a$
	B	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> $x$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $t^2$	<input type="radio"/> $a$
	C	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $t$	<input type="radio"/> $t^2$	<input checked="" type="radio"/>
	D	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> $x$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $t^2$	<input type="radio"/> $a$
	E	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $t$	<input type="radio"/> $t^2$	<input type="radio"/> $a$
	F	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $t$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $a$
	G	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $t$	<input type="radio"/> $t^2$	<input type="radio"/> $a$

## 数学I 期末試験 2 解答

### 問 1

(1)  $A = a, B = \forall, C = n, D = \epsilon,$

(2)  $A = \exists, B = \forall, C = n, D = a, E = x, F = a$

(3)  $A = n, B = \forall, C = a, D = n, E = a, F = \epsilon$

(4)  $A = \delta, B = \epsilon, C = x, D = \delta, E = \epsilon, F = c, G = 0$

(5)  $A = \geq, B = h, C = \geq, D = \leq, E = 0$

(6)  $A = n, B = \epsilon, C = r, D = 1, E = 1$

### 問 2

$A = \forall, B = \delta, C = \epsilon$

### 問 3

$a=2, b=3$

### 問 4

$A=3, B=2, C=3$

### 問 5

(1) 3 (2) 1

### 問 6

$A = 1, B = 1, C = 2, D = 3, E = 2, F = 3$

### 問 7

$A = a, B = \sin, C = b, D = \cos, E = \cos, F = \sin, G = a, H = b, I = b, J = a$

### 問 8

$A = t, B = t, C = a, D = t, E = 1, F = t^2, G = 1,$





問1. 次の証明の空欄を埋めよ。

(1) 定理  $X$  を上に有界な実数の集合とする。  $a = \sup X$  とすると、

$X$  の数列  $\{x_n\}$  で  $a$  に収束する数列がある。

(証明)  $n$  を自然数とする。  $a$  は上限であるから、  $a$  未満の  $a - \frac{1}{n}$  は上界でない。

よって  $a - \frac{1}{n} < x_n \leq a$  となる  $x_n \in X$  がある。

$\forall \epsilon > 0$  に対し、  $\frac{1}{A} < N$  となる  $N$  を選ぶと、  $n > N \Rightarrow |x_n - B| = B - x_n < \frac{1}{C} < D$  □

(2) 定理 有界な数列  $\{x_n\}$  には集積点  $a$  がある。

(証明) 有界より、  $\exists a_1, \exists b_1, A n \in \mathbf{N}; a_1 \leq x_n \leq b_1$  である。  $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}, n_1 = 1$  とする。

そこで、増加数列  $\{a_i\}$ 、減少数列  $\{b_i\}$ 、増加数列  $\{n_i\}$ 、  $c_i = \frac{a_i + b_i}{2}$  を、

$$a_i < b_i, x_n \in [a_i, b_i] \text{ となる } n \text{ が無限個ある、 } b_i - a_i = \frac{b_1 - a_1}{2^{i-1}}, x_{n_i} \in [a_i, b_i]$$

を満たすように、順に、次のように選ぶ。  $i - 1$  まで上のように選んであるとする。

$x_n \in [a_{i-1}, c_{i-1}]$  となる  $B$  が無限個あるならば、

その中で  $n_1, \dots, n_{i-1}$  よりも大きい物を  $n_C$  とし、  $a_C = a_{i-1}, b_C = c_{i-1}$  とする。

そうでないならば、  $x_n \in [c_{i-1}, b_{i-1}]$  となる  $B$  が無限個あるから、

同様に十分大きい  $n_C$  を選び、  $a_C = c_{i-1}, b_C = b_{i-1}$  とする。

以上の  $a_C, b_C, n_C$  が条件を満たすことは明らかである。

$\{a_i\}$  は上に有界な増加数列であり、  $\{b_i\}$  は下に有界な減少数列であるから、どちらも収束する。

$a = \lim_{i \rightarrow \infty} a_i, b = \lim_{i \rightarrow \infty} b_i$  とすると、  $\lim_{i \rightarrow \infty} (b_C - a_C) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{b_1 - a_1}{2^{D-1}} = 0$  から、  $E = a$  である。

挟み撃ちの定理により、  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i} = F$  □

(3) 定理 関数  $y = f(x)$  が区間  $[a, b]$  で連続で、

$f(a) > 0, f(b) < 0$  ならば、  $\exists c \in (a, b); f(c) = 0$

(証明)  $X = \{x \in [a, b]; f(x) < 0\}$  とする。  $b \in X$  より  $X \neq \emptyset$  であり、

下に有界であるから、下限  $c = \inf X$  がある。

1)  $f(c) > 0$  とする。  $0 < \epsilon < f(c)$  となる  $\epsilon > 0$  がある。  $c$  での連続の定義で、  $\epsilon$  に対応する  $\delta$  を取る。

すると、  $c < A < c + \delta$  ならば、  $|A - c| = A - c < \delta$  だから、

$$|f(A) - f(c)| < \epsilon, 0 < f(c) - \epsilon < f(A) < f(c) + \epsilon$$

一方、  $B$  は下限であるから、  $B \leq x < B + \delta$  となる  $x \in X$  がある。

ここで、  $c \notin X$  より  $B < x < B + \delta$  である。

$x \in X$  は  $f(x) < 0$  を意味し、上と矛盾する。

2)  $f(c) < 0$  とする。  $0 < \epsilon < -f(c)$  となる  $\epsilon$  がある。

$c$  での連続の定義で、 $\epsilon$  に対応する  $\delta$  を取る。

$\boxed{D} - \delta < x < \boxed{D}$  となる  $x$  に対し、 $|x - \boxed{D}| = \boxed{D} - x < \delta$  だから、

$$|f(x) - f(\boxed{D})| < \boxed{E}, f(\boxed{D}) - \boxed{E} < f(x) < f(\boxed{D}) + \boxed{E} \quad \boxed{F} 0$$

よって、 $x \in X$  であり、 $c$  が  $X$  の下限である事に矛盾する。

3)  $f(c) > 0, f(c) < 0$  どちらも矛盾するから  $f(c) = \boxed{G}$   $\square$

(4) 定理 関数  $y = f(x)$  が区間  $[a, b]$  で連続ならば、最大値  $f(c), c \in [a, b]$  がある。

(証明)  $F = \{f(x) | x \in [a, b]\}$  とする。

1) もし、 $F$  が、上に有界でないならば、 $\forall n \in \mathbf{N}, \exists x_n \in [a, b]; f(x_n) > n$

集積点定理により、部分数列  $\{x_{n_i}\}$  があり、 $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i} = d \in [a, b]$

連続より、 $\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{n_i}) = f(\boxed{A})$  である。

だが、 $x_{n_i}$  の定義より  $\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{n_i}) = \boxed{B}$  であり矛盾する。

よって、 $F$  は上に有界。

2)  $F \neq \emptyset$  だから、上限  $m$  がある。

その時、 $F$  の数列  $\{f(x_n)\}$  で  $m$  に収束するものがある。

集積点定理より、収束する部分数列  $\{x_{n_i}\}$  がある。その収束値を  $c \in [a, b]$  とする。

連続より、 $f(\boxed{C}) = f\left(\lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i}\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{n_i}) = \boxed{D}$  だから  $\boxed{E} \in F$  である。

よって、 $f(\boxed{F}) = \boxed{E}$  は  $F$  の最大値である。  $\square$

(5) 定理 関数  $y = f(x)$  が区間  $[a, b]$  で連続、 $(a, b)$  で微分可能、

$f(a) = f(b)$  ならば、 $\exists c \in (a, b); f'(c) = 0$  である。

(証明) 最大値の定理より、 $f(x)$  の最大値  $f(c), c \in [a, b]$  がある。

もし、 $c = a$  または  $c = b$  ならば、 $f(d)$  が最小値になる  $d \in (a, b)$  があるから、

以下と同じ証明で  $f'(d) = 0$  が言える。

よって、 $c \in (a, b)$  と仮定する。

$f(c)$  は最大値であるから、 $c + h \in [a, b]$  ならば、 $f(c + \boxed{A}) - f(c) \boxed{B} 0$

もし、 $\boxed{A} > 0$  ならば  $f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + \boxed{A}) - f(c)}{\boxed{A}} \boxed{C} 0$

もし、 $\boxed{A} < 0$  ならば  $f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + \boxed{A}) - f(c)}{\boxed{A}} \boxed{D} 0$

よって、 $f'(c) = \boxed{E}$   $\square$

## 微積分前期期末試験 No.2

(6) 定理 二つの関数  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  が区間  $[a, b]$  で連続、 $(a, b)$  で微分可能であり、  
 $(a, b)$  で  $g'(x) \neq 0$  ならば、 $\exists c \in (a, b); \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$  である。

(証明) 1) もし、 $g(b) - g(a) = 0$  であるならば、  
 ロールの定理により、 $\boxed{A} c \in (a, b); g'(c) = 0$  となる。  
 これは、仮定  $g'(x) \neq 0$  と矛盾するから、 $g(b) - g(a) \neq 0$

2)  $F(x) = f(x)\{g(b) - g(a)\} - \{f(b) - f(a)\}g(x)$  と置くと、  
 $F(b) = -f(b)g(\boxed{B}) + f(\boxed{B})g(b) = F(\boxed{B})$ ,  
 $F'(x) = f'(x)\{g(\boxed{C}) - g(a)\} - \{f(\boxed{C}) - f(a)\}g'(x)$  より、  
 ロールの定理から、 $\exists c \in (a, b); F'(\boxed{D}) = f'(\boxed{D})\{g(\boxed{C}) - g(a)\} - \{f(\boxed{C}) - f(a)\}g'(\boxed{D}) = \boxed{E}$   
 よって、 $\{f(\boxed{C}) - f(a)\}g'(\boxed{D}) = f'(\boxed{D})\{g(\boxed{C}) - g(a)\}$   
 これから定理は明らかである。  $\square$

問 2. 次の空欄を埋めよ。

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  の定義:  $\forall \epsilon > 0, \boxed{A} N; \boxed{B} > N \Rightarrow |a_n - \boxed{C}| < \epsilon$

問 3. 次の集合  $X$  の下限  $a = \inf X$  および上限  $b = \sup X$  を求めよ。

$$X = \left\{ \frac{n+2}{n} \mid n \in \mathbf{N} \right\}, a = \inf X, b = \sup X$$

問 4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n-1} = 3$  の次の証明の空欄を埋めよ。

(証明)  $\forall \epsilon > 0$  に対し、 $\frac{\boxed{A}}{\epsilon} + \boxed{B} < N$  となるように  $N$  を取る。すると、  
 $n > N$  ならば、 $\frac{\boxed{A}}{n - \boxed{B}} < \epsilon$  より、 $\left| \frac{3n+1}{n-1} - \boxed{C} \right| < \epsilon$   $\square$

問 5. 次のべき級数の収束半径  $R$  を求めよ。

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n} x^n \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n+1} x^n$$

問6. 陰関数  $x^2 + 2xy + 2y^2 = 3$  の両辺を  $x$  で微分することにより、 $y'$ ,  $y''$  を求める。

$$y' = -\frac{\boxed{A}x + \boxed{B}y}{x + \boxed{C}y}, \quad y'' = -\frac{\boxed{D}}{(x + \boxed{E}y)\boxed{F}}$$

問7. 解答用紙の  $s$  は  $\sin$  を、 $c$  は  $\cos$  を表す。

不定積分  $I = \int e^{ax} \sin bx \, dx$ ,  $J = \int e^{ax} \cos bx \, dx$  を求める。

積分  $\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{\boxed{A}} e^{ax} + C$  を使用して、 $I$  に部分積分を適用すると、

$$I = \frac{1}{\boxed{A}} e^{ax} \boxed{B} bx - \frac{\boxed{C}}{\boxed{A}} \int e^{ax} \boxed{D} bx \, dx$$

同様に、 $J$  にも部分積分を適用すると

$$J = \frac{1}{\boxed{A}} e^{ax} \boxed{E} bx + \frac{\boxed{C}}{\boxed{A}} \int e^{ax} \boxed{F} bx \, dx$$

以上から、上式を  $I$ ,  $J$  に関する連立方程式とみなして、解くと

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} \left( \boxed{G} \sin bx - \boxed{H} \cos bx \right), \quad J = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} \left( \boxed{I} \sin bx + \boxed{J} \cos bx \right)$$

問8. ラプラス変換  $L(f) = \int_0^\infty e^{-tx} f(x) \, dx$  を求める。

ただし、以下では、 $a > 0$  に対し、 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-ax} f(x) = 0$  とする。

$$(1) L(1) = \int_0^\infty e^{-tx} \, dx = \frac{1}{\boxed{A}}$$

$$(2) L(e^{ax}) = \int_0^\infty e^{-tx} e^{ax} \, dx = \frac{1}{\boxed{B} - \boxed{C}}, \quad (t > a)$$

$$(3) \int e^{-tx} \, dx = -\frac{e^{-tx}}{\boxed{A}} \text{ より、部分積分から、}$$

$$L(x) = \int_0^\infty e^{-tx} x \, dx = \left[ -\frac{e^{-tx}}{\boxed{A}} x \right]_0^\infty + \frac{\boxed{E}}{\boxed{D}} \int_0^\infty e^{-tx} \, dx = \frac{\boxed{G}}{\boxed{F}}$$

--	--	--	--	--	--	--

--

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

問1(1)

A	$\forall$	$\exists$	$\in$	$\delta$	$n$	$m$	$a$	$b$
B	$\forall$	$\exists$	$\in$	$\delta$	$n$	$m$	$a$	$b$
C	$\forall$	$\exists$	$\in$	$\delta$	$n$	$m$	$a$	$b$
D	$\forall$	$\exists$	$\in$	$\delta$	$n$	$m$	$a$	$b$

(2)

A	$\forall$	$\exists$	$\in$	$\delta$	$n$	$i$	$a$	$b$
B	$\forall$	$\exists$	$\in$	$\delta$	$n$	$i$	$a$	$b$
C	$\forall$	$\exists$	$\in$	$\delta$	$n$	$i$	$a$	$b$
D	$\forall$	$\exists$	$\in$	$\delta$	$n$	$i$	$a$	$b$
E	$\forall$	$\exists$	$\in$	$\delta$	$n$	$i$	$a$	$b$
F	$\forall$	$\exists$	$\in$	$\delta$	$n$	$i$	$a$	$b$

(3)

A	$\in$	$\delta$	$a$	$c$	$x$	0	$<$	$>$
B	$\in$	$\delta$	$a$	$c$	$x$	0	$<$	$>$
C	$\in$	$\delta$	$a$	$c$	$x$	0	$<$	$>$
D	$\in$	$\delta$	$a$	$c$	$x$	0	$<$	$>$
E	$\in$	$\delta$	$a$	$c$	$x$	0	$<$	$>$
F	$\in$	$\delta$	$a$	$c$	$x$	0	$<$	$>$

(4)

A	$\forall$	$\exists$	$c$	$d$	$n$	$m$	0	$\infty$
B	$\forall$	$\exists$	$c$	$d$	$n$	$m$	0	$\infty$
C	$\forall$	$\exists$	$c$	$d$	$n$	$m$	0	$\infty$
D	$\forall$	$\exists$	$c$	$d$	$n$	$m$	0	$\infty$
E	$\forall$	$\exists$	$c$	$d$	$n$	$m$	0	$\infty$
F	$\forall$	$\exists$	$c$	$d$	$n$	$m$	0	$\infty$

(5)

A	$\forall$	$\exists$	0	$c$	$x$	$h$	$<$	$>$
B	$\forall$	$\exists$	0	$c$	$x$	$h$	$<$	$>$
C	$\forall$	$\exists$	0	$c$	$x$	$h$	$<$	$>$
D	$\forall$	$\exists$	0	$c$	$x$	$h$	$<$	$>$
E	$\forall$	$\exists$	0	$c$	$x$	$h$	$<$	$>$

(6)

A	$\forall$	$\exists$	0	$a$	$b$	$c$	$x$	$=$
B	$\forall$	$\exists$	0	$a$	$b$	$c$	$x$	$=$
C	$\forall$	$\exists$	0	$a$	$b$	$c$	$x$	$=$
D	$\forall$	$\exists$	0	$a$	$b$	$c$	$x$	$=$
E	$\forall$	$\exists$	0	$a$	$b$	$c$	$x$	$=$

問2

A	$\forall$	$\exists$	$\in$	$\delta$	$a$	$n$	$<$	$>$
B	$\forall$	$\exists$	$\in$	$\delta$	$a$	$n$	$<$	$>$
C	$\forall$	$\exists$	$\in$	$\delta$	$a$	$n$	$<$	$>$

問3

a	1	2	3	4	5	6	7	8
b	1	2	3	4	5	6	7	8

問4

A	1	2	3	4	5	6	7	8
B	1	2	3	4	5	6	7	8
C	1	2	3	4	5	6	7	8

問5

(1)	1	2	3	4	5	6	7	8
(2)	1	2	3	4	5	6	7	8

問6

A	1	2	3	4	5	6	7	8
B	1	2	3	4	5	6	7	8
C	1	2	3	4	5	6	7	8
D	1	2	3	4	5	6	7	8
E	1	2	3	4	5	6	7	8
F	1	2	3	4	5	6	7	8

問7

A	0	1	2	3	$\pi$	$n$	$s$	$c$
B	0	1	2	3	$\pi$	$n$	$s$	$c$
C	0	1	2	3	$\pi$	$n$	$s$	$c$
D	0	1	2	3	$\pi$	$n$	$s$	$c$
E	0	1	2	3	$\pi$	$n$	$s$	$c$
F	0	1	2	3	$\pi$	$n$	$s$	$c$
G	0	1	2	3	$\pi$	$n$	$s$	$c$
H	0	1	2	3	$\pi$	$n$	$s$	$c$
I	0	1	2	3	$\pi$	$n$	$s$	$c$
J	0	1	2	3	$\pi$	$n$	$s$	$c$

問8

A	0	1	2	3	$\infty$	$e$	$x$	$s$
B	0	1	2	3	$\infty$	$e$	$x$	$s$
C	0	1	2	3	$\infty$	$e$	$x$	$s$
D	0	1	2	3	$\infty$	$e$	$x$	$s$
E	0	1	2	3	$\infty$	$e$	$x$	$s$
F	0	1	2	3	$\infty$	$e$	$x$	$s$
G	0	1	2	3	$\infty$	$e$	$x$	$s$

--	--	--	--	--	--	--

--

0	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
1	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 1
2	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 2
3	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 3
4	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 4
5	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 5
6	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 6
7	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 7
8	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 8
9	<input type="radio"/> 9	<input type="radio"/> 9	<input type="radio"/> 9	<input type="radio"/> 9	<input type="radio"/> 9	<input type="radio"/> 9	<input type="radio"/> 9

問1(1)

A	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	$\delta$	$n$	$m$	$a$	$b$
B	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	$\epsilon$	$\delta$	$n$	$m$	<input checked="" type="radio"/>	$b$
C	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	$\epsilon$	$\delta$	<input checked="" type="radio"/>	$m$	$a$	$b$
D	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	$\delta$	$n$	$m$	$a$	$b$
A	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	$\epsilon$	$\delta$	$n$	$i$	$a$	$b$
B	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	$\epsilon$	$\delta$	<input checked="" type="radio"/>	$i$	$a$	$b$
C	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	$\epsilon$	$\delta$	$n$	<input checked="" type="radio"/>	$a$	$b$
D	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	$\epsilon$	$\delta$	$n$	<input checked="" type="radio"/>	$a$	$b$
E	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	$\epsilon$	$\delta$	$n$	$i$	$a$	<input checked="" type="radio"/>
F	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	$\epsilon$	$\delta$	$n$	$i$	<input checked="" type="radio"/>	$b$
A	$\epsilon$	$\delta$	$a$	$c$	<input checked="" type="radio"/>	0	<	>
B	$\epsilon$	$\delta$	$a$	<input checked="" type="radio"/>	$x$	0	<	>
C	$\epsilon$	$\delta$	$a$	$c$	$x$	0	<input checked="" type="radio"/>	>
D	$\epsilon$	$\delta$	$a$	<input checked="" type="radio"/>	$x$	0	<	>
E	<input checked="" type="radio"/>	$\delta$	$a$	$c$	$x$	0	<	>
F	$\epsilon$	$\delta$	$a$	$c$	$x$	0	<input checked="" type="radio"/>	>
G	$\epsilon$	$\delta$	$a$	$c$	$x$	<input checked="" type="radio"/>	<	>
A	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	$c$	<input checked="" type="radio"/>	$n$	$m$	0	$\infty$
B	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	$c$	$d$	$n$	$m$	0	<input checked="" type="radio"/>
C	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	$d$	$n$	$m$	0	$\infty$
D	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	$c$	$d$	$n$	<input checked="" type="radio"/>	0	$\infty$
E	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	$c$	$d$	$n$	<input checked="" type="radio"/>	0	$\infty$
F	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	$d$	$n$	$m$	0	$\infty$
A	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	0	$c$	$x$	<input checked="" type="radio"/>	<	>
B	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	0	$c$	$x$	$h$	<input checked="" type="radio"/>	>
C	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	0	$c$	$x$	$h$	<input checked="" type="radio"/>	>
D	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	0	$c$	$x$	$h$	<	<input checked="" type="radio"/>
E	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	$c$	$x$	$h$	<	>
A	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	0	$a$	$b$	$c$	$x$	=
B	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	0	<input checked="" type="radio"/>	$b$	$c$	$x$	=
C	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	0	$a$	<input checked="" type="radio"/>	$c$	$x$	=
D	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	0	$a$	$b$	<input checked="" type="radio"/>	$x$	=
E	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	$a$	$b$	$c$	$x$	=

問2

A	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	$\epsilon$	$\delta$	$a$	$n$	$\leq$	$\geq$
B	<input type="radio"/>	$\exists$	$\epsilon$	$\delta$	$a$	<input checked="" type="radio"/>	$<$	$>$
C	<input type="radio"/>	$\exists$	$\epsilon$	$\delta$	<input checked="" type="radio"/>	$n$	$<$	$>$
a	<input checked="" type="radio"/>	2	3	4	5	6	7	8
b	1	2	<input checked="" type="radio"/>	4	5	6	7	8
A	1	2	3	<input checked="" type="radio"/>	5	6	7	8
B	<input checked="" type="radio"/>	2	3	4	5	6	7	8
C	1	2	<input checked="" type="radio"/>	4	5	6	7	8
(1)	1	<input checked="" type="radio"/>	3	4	5	6	7	8
(2)	1	2	<input checked="" type="radio"/>	4	5	6	7	8
A	1	<input checked="" type="radio"/>	3	4	5	6	7	8
B	1	2	<input checked="" type="radio"/>	4	5	6	7	8
C	1	2	<input checked="" type="radio"/>	4	5	6	7	8
D	1	<input checked="" type="radio"/>	3	4	5	6	7	8
E	1	2	3	4	<input checked="" type="radio"/>	6	7	8
F	1	2	<input checked="" type="radio"/>	4	5	6	7	8
A	0	1	2	3	<input checked="" type="radio"/>	$n$	$s$	$c$
B	0	<input checked="" type="radio"/>	2	3	$\pi$	$n$	$s$	$c$
C	0	1	2	3	$\pi$	$n$	<input checked="" type="radio"/>	$c$
D	0	1	2	3	$\pi$	<input checked="" type="radio"/>	$s$	$c$
E	0	1	2	3	$\pi$	$n$	<input checked="" type="radio"/>	$c$
F	0	1	<input checked="" type="radio"/>	3	$\pi$	$n$	$s$	$c$
G	0	1	<input checked="" type="radio"/>	3	$\pi$	$n$	$s$	$c$
H	0	1	<input checked="" type="radio"/>	3	$\pi$	$n$	$s$	$c$
I	0	1	<input checked="" type="radio"/>	3	$\pi$	$n$	$s$	$c$
J	0	1	2	<input checked="" type="radio"/>	$\pi$	$n$	$s$	$c$
A	0	<input checked="" type="radio"/>	2	3	$\infty$	$e$	$x$	$s$
B	0	<input checked="" type="radio"/>	2	3	$\infty$	$e$	$x$	$s$
C	0	1	2	3	$\infty$	<input checked="" type="radio"/>	$x$	$s$
D	0	1	2	3	$\infty$	$e$	<input checked="" type="radio"/>	$s$
E	0	1	2	3	$\infty$	$e$	$x$	<input checked="" type="radio"/>
F	0	1	2	3	$\infty$	$e$	$x$	<input checked="" type="radio"/>
G	0	1	2	3	$\infty$	$e$	$x$	<input checked="" type="radio"/>

## 数学I 期末試験 3 解答

### 問 1

(1)  $A = \epsilon$ ,  $B = a$ ,  $C = n$ ,  $D = \epsilon$ ,

(2)  $A = \forall$ ,  $B = n$ ,  $C = i$ ,  $D = i$ ,  $E = b$ ,  $F = a$

(3)  $A = x$ ,  $B = c$ ,  $C = <$ ,  $D = c$ ,  $E = \epsilon$ ,  $F = <$ ,  $G = 0$

(4)  $A = d$ ,  $B = \infty$ ,  $C = c$ ,  $D = m$ ,  $E = m$ ,  $F = c$

(5)  $A = h$ ,  $B = \leq$ ,  $C = \leq$ ,  $D = \geq$ ,  $E = 0$

(6)  $A = \exists$ ,  $B = a$ ,  $C = b$ ,  $D = c$ ,  $E = 0$

### 問 2

$A = \exists$ ,  $B = n$ ,  $C = a$ ,

### 問 3

$a = \inf X = 1$ ,  $b = \sup X = 3$

### 問 4

$A = 4$ ,  $B = 1$ ,  $C = 3$

### 問 5

(1) 2 (2) 3

### 問 6

$A = 2$ ,  $B = 3$ ,  $C = 3$ ,  $D = 2$ ,  $E = 5$ ,  $F = 3$

### 問 7

$A = \pi$ ,  $B = 1$ ,  $C = \sin$ ,  $D = n$ ,  $E = \sin$ ,  $F = 2$ ,  $G = 2$ ,  $H = 2$ ,  $I = 2$ ,  $J = 3$

### 問 8

$A = 1$ ,  $B = 1$ ,  $C = e$ ,  $D = x$ ,  $E = s$ ,  $F = s$ ,  $G = s$ ,





問1. 次の証明の空欄を埋めよ。

(1) 定理 有界な数列  $\{x_n\}$  には集積点  $a$  がある。

(証明) 有界より、 $\exists K > 0, \forall n \in \mathbf{N}; -K < x_n < K$  である。

$X = \{x | x_n \leq x \text{ となる } n \text{ は無限個} \}$  とする。

$x_n < K$  は全ての  $\boxed{A}$  で成り立つ (無限個) から  $K \in X$  であり、 $X \neq \emptyset$  である。

次に、 $x \in X$  ならば、 $x_n \leq x$  となる  $\boxed{A}$  は無限個だから、一つは  $x_n \leq x$  となる  $\boxed{A}$  がある。

よって、 $-K < x_n \leq x$  となり、 $X$  は下に有界である。以上から、下限  $a = \inf X$  がある。

そこで  $\forall i \in \mathbf{N}$  に対し、増加自然数列  $n_i$  で、 $|x_{n_i} - a| < \frac{1}{i}$  となる物を選ぶ為に、次のように考える。

$\boxed{B} - \frac{1}{i} < \boxed{B}$  から、 $\boxed{B} - \frac{1}{i} \notin X$  であり、 $x_n \leq \boxed{B} - \frac{1}{i}$  となる  $\boxed{A}$  は有限個である。

一方、 $\boxed{B} + \frac{1}{i}$  は、 $\boxed{B}$  より大きいので下界ではない。そこで、 $a \leq x < \boxed{B} + \frac{1}{i}$  となる  $x \in X$  がある。

$X$  の定義から、 $x_n \leq x$  となる  $\boxed{A}$  は無限個である。無限個から有限個を引いても無限個であるから、

1)  $\boxed{B} - \frac{1}{i} < x_n \leq x < \boxed{B} + \frac{1}{i}$  となる  $\boxed{A}$  は無限個ある。

以上から、求める  $n_i$  を次のように選ぶ、

$i = 1$  に対しては、1) から、 $\boxed{B} - 1 < x_{n_1} < \boxed{B} + 1$  となる物を選ぶ。

$n_1 < \dots < n_{i-1}$  まで選ばれているとし、1) の無限個の  $\boxed{A}$  から、 $n_{i-1}$  より大きい物を  $n_i$  とする。

このとき、 $|x_{n_i} - \boxed{B}| < \frac{1}{\boxed{C}}$  から、 $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i} = \boxed{D}$   $\square$

(2) 定理 コーシー列  $\{x_n\}$  は収束する。

(証明) コーシー列の定義で、 $\epsilon = 1$  とし、対応する  $N$  を取り、 $m = N + 1$  とすると、

$\boxed{A} > N \Rightarrow |x_n - x_{N+1}| < 1$  であり、 $x_{N+1} - 1 < x_n < x_{N+1} + 1$  だから、 $\{x_n\}$  は有界になる。

集積点定理により、集積点  $a$  とそれに収束する部分数列  $\{x_{n_i}\}$  がある。ここで、 $\{n_i\}$  は増加数列である。

収束の定義から、 $\forall \epsilon > 0$  に対して、 $\boxed{B} I; i > I \Rightarrow |x_{n_i} - \boxed{C}| < \frac{\epsilon}{2}$  である。

さらに、コーシー列の定義で  $\frac{\epsilon}{2}$  に対応する  $N$  を取る。

$\{n_i\}$  は増加数列であるから、 $i > I, n_i > N$  となるように  $i$  を取れる。

すると、 $\boxed{D} > N$  ならば  $|x_n - \boxed{E}| = |x_n - x_{n_i} + x_{n_i} - \boxed{E}| \leq |x_n - x_{n_i}| + |x_{n_i} - \boxed{E}| < \boxed{F}$   $\square$

(3) 定理 関数  $y = f(x)$  が区間  $[a, b]$  で連続で、

$f(a) < 0, f(b) > 0$  ならば、 $\exists c \in (a, b); f(c) = 0$

(証明)  $X = \{x \in [a, b]; f(x) < 0\}$  とする。 $a \in X$  より  $X \neq \emptyset$  であり、上に有界であるから、

上限  $c = \sup X$  がある。

1)  $f(c) > 0$  とする。 $0 < \epsilon < f(c)$  となる  $\epsilon > 0$  がある。 $c$  での連続の定義で、 $\epsilon$  に対応する  $\delta$  を取る。

すると、 $c - [A] < x < c$  ならば、 $|x - c| = c - x < [A]$  だから、

$$|f(x) - f([B])| < \epsilon, 0 < f([B]) - \epsilon < f(x) < f([B]) + \epsilon$$

一方、 $[C]$  は上限であるから、 $[C] - [A] < x \leq [C]$  となる  $x \in X$  がある。

ここで、 $[C] \notin X$  より  $[C] - \delta < x < [C]$  である。

$x \in X$  は  $f(x) < [D]$  を意味し、上と矛盾する。

2)  $f(c) < 0$  とする。 $0 < \epsilon < -f(c)$  となる  $\epsilon$  がある。 $c$  での連続の定義で、 $\epsilon$  に対応する  $\delta$  を取る。

$c < x < c + [E]$  となる  $x$  に対し、 $|x - c| = x - c < [E]$  だから、

$$|f(x) - f([F])| < \epsilon, f([F]) - \epsilon < f(x) < f([F]) + \epsilon < [D]$$

よって、 $x \in X$  であり、 $[G]$  が  $X$  の上限である事に矛盾する。

3)  $f(c) > 0, f(c) < 0$  どちらも矛盾するから  $f(c) = 0$   $\square$

(4) 定理 関数  $y = f(x)$  が区間  $[a, b]$  で連続ならば、最小値  $f(c), c \in [a, b]$  がある。

(証明)  $F = \{f(x) | x \in [a, b]\}$  とする。

1) もし、 $F$  が、下に有界でないならば、 $\forall n \in \mathbf{N}, [A]x_n \in [a, b]; f(x_n) < -n$

集積点定理により、部分数列  $\{x_{n_i}\}$  があり、 $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i} = d \in [a, b]$

連続より、 $\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{n_i}) = f(d)$  である。

だが、 $x_{n_i}$  の定義より  $\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{n_i}) = -[B]$  であり矛盾する。よって、 $F$  は下に有界。

2)  $F \neq \emptyset$  だから、下限  $m$  がある。その時、 $F$  の数列  $\{f(x_n)\}$  で  $m$  に収束するものがある。

集積点定理より、収束する部分数列  $\{x_{n_i}\}$  がある。その収束値を  $c$  とする。

連続より、 $f([C]) = f\left(\lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i}\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{n_i}) = [D]$  だから  $[E] \in F$  である。

よって、 $f([F])$  は  $F$  の最小値である。  $\square$

(5) 定理 関数  $y = f(x)$  が区間  $[a, b]$  で連続、 $(a, b)$  で微分可能、

$f(a) = f(b)$  ならば、 $\exists c \in (a, b); f'(c) = 0$  である。

(証明) 最小値の定理より、 $f(x)$  の最小値  $f(c), c \in [a, b]$  がある。

もし、 $c = a$  または  $c = b$  ならば、 $f(d)$  が最大値になる  $d \in (a, b)$  があるから、

以下と同じ証明で  $f'(d) = 0$  が言える。よって、 $c \in (a, b)$  と仮定する。

$f(c)$  は最小値であるから、 $[A] + h \in [a, b]$  ならば、 $f([A] + h) - f([A]) \geq 0$

$$\text{もし、} h > 0 \text{ ならば } f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + [B]) - f(c)}{[B]} [C] 0$$

$$\text{もし、} h < 0 \text{ ならば } f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + [B]) - f(c)}{[B]} [D] 0$$

よって、 $f'(c) = [E]$   $\square$

(6) 定理  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  を正項級数とし、極限值  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$  があるとする。

もし、 $a < 1$  ならば、この正項級数は収束する。

(証明) 1)  $\exists r > 0; 0 \leq a < r < 1$  である。 $\epsilon = r - a$  とすると、

$$\exists N; \boxed{A} > N \Rightarrow \left| \sqrt[n]{a_n} - \boxed{B} \right| < \epsilon$$

よって、 $\boxed{B} - \epsilon < \sqrt[n]{a_n} < \boxed{B} + \epsilon = \boxed{C}$  より、 $n > N \Rightarrow 0 < a_n < \boxed{C}^n$  である。

2)  $\sum_{n=1}^k r^n = r \frac{1-r^k}{1-r}$  と  $0 < r < 1$  より  $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$  は収束する。

また、正項級数は、数列としては増加数列であるから、

部分和が上に有界になる事が収束するための必要十分条件である。

例えば、 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$  は、 $\sum_{n=1}^k r^n = r \frac{1-r^k}{1-r} < \frac{\boxed{D}}{1-\boxed{D}}$  より、部分和は上に有界になる。

次に、 $n > N$  で  $a_n < \boxed{C}^n$  であるから、級数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  の部分和は

$$\sum_{n=1}^k a_n = \sum_{n=1}^N a_n + \sum_{n=N+1}^k a_n \leq \sum_{n=1}^N a_n + \sum_{n=N+1}^k \boxed{C}^n \leq \sum_{n=1}^N a_n + \frac{\boxed{E}}{1-\boxed{E}}$$

だから、上に有界になる。よって、収束する。  $\square$

問2. 次の空欄を埋めよ。

連続の定義:  $\forall \epsilon > 0, \boxed{A} \delta > 0; |x - a| < \boxed{B} \Rightarrow |f(x) - f(\boxed{C})| < \epsilon$

問3. 次の集合  $X$  の下限  $a = \inf X$  および上限  $b = \sup X$  を求めよ。

$$X = \left\{ \frac{4n-2}{n} \mid n \in \mathbf{N} \right\}, a = \inf X, b = \sup X$$

問4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{2n-1} = 1$  の次の証明の空欄を埋めよ。

(証明)  $\forall \epsilon > 0$  に対し、 $\frac{1}{\epsilon} + \frac{\boxed{B}}{\boxed{A}} < N$  となるように  $N$  を取る。すると、

$n > N$  ならば、 $\frac{\boxed{A}}{\boxed{A}n - \boxed{B}} < \epsilon$  より、 $\left| \frac{2n-3}{2n-1} - \boxed{C} \right| < \epsilon$   $\square$

問5. 次のべき級数の収束半径  $R$  を求めよ。

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^n x^n$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n-1}{2^n+3} x^n$$

問6. 陰関数  $x^2 - 2xy + 2y^2 = 4$  の両辺を  $x$  で微分することにより、 $y'$ ,  $y''$  を求める。

$$y' = \frac{\boxed{A}x - \boxed{B}y}{x - \boxed{C}y}, \quad y'' = \frac{\boxed{D}}{(x - \boxed{E}y)\boxed{F}}$$

問7. ラプラス変換  $F(t) = L(f) = \int_0^\infty e^{-tx} f(x) dx$  を求める。

ただし、以下では、 $a > 0$  に対し、 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-ax} f(x) = 0$  とする。

$$(1) L(e^{ax}) = \int_0^\infty e^{-tx} e^{ax} dx = \frac{1}{\boxed{A} - \boxed{B}} \quad (t > a)$$

$$(2) F(t) = L(f) \text{ として、} L(f') = \boxed{C}F(t) - f(\boxed{D})$$

(3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-ax} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-ax} f'(x) = 0$  が成り立つならば、

$$L(f'') = \boxed{E}F(t) - \boxed{F}f(\boxed{G}) - f'(\boxed{H})$$

問8. 正規分布曲線の面積  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$  を計算する。

$I(a) = \int_0^a e^{-x^2} dx$  とする。関数  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$  と領域

$$D(a) = \{(\theta, r) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \wedge 0 \leq r \leq a\}, \quad E(a) = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a \wedge 0 \leq y \leq a\}$$

を考える。すると、
$$\iint_{D(a)} f(x, y) dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^a e^{-r^2} \boxed{A} dr \right\} d\theta = \frac{\boxed{C}}{\boxed{B}} \left( 1 - e^{-\boxed{D}^2} \right)$$

一方 
$$\iint_{E(a)} f(x, y) dS = \int_0^a \left\{ \int_0^a e^{-x^2} e^{-y^2} dy \right\} dx = (I(a))\boxed{E}$$

さらに、 $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} > 0$  と  $D(a) \subset E(a) \subset D(\sqrt{\boxed{F}}a)$  より、

$$\frac{\boxed{C}}{\boxed{B}} \left( 1 - e^{-\boxed{D}^2} \right) \boxed{G} I(a) \boxed{E} \boxed{G} \frac{\boxed{C}}{\boxed{B}} \left( 1 - e^{-\boxed{H}\boxed{D}^2} \right)$$

以上より、 $\boxed{I} \rightarrow \infty$  にすると、 $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$  が計算できる。  $\square$

--	--	--	--	--	--	--

--

0	①	①	①	①	①	①	①
1	①	①	①	①	①	①	①
2	②	②	②	②	②	②	②
3	③	③	③	③	③	③	③
4	④	④	④	④	④	④	④
5	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤
6	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
7	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
8	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
9	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

問1(1)

A	▽	⊃	€	δ	n	i	a	b
B	▽	⊃	€	δ	n	i	a	b
C	▽	⊃	€	δ	n	i	a	b
D	▽	⊃	€	δ	n	i	a	b

(2)

A	▽	⊃	€	δ	n	m	i	a
B	▽	⊃	€	δ	n	m	i	a
C	▽	⊃	€	δ	n	m	i	a
D	▽	⊃	€	δ	n	m	i	a
E	▽	⊃	€	δ	n	m	i	a
F	▽	⊃	€	δ	n	m	i	a

(3)

A	€	δ	a	c	x	0	<	>
B	€	δ	a	c	x	0	<	>
C	€	δ	a	c	x	0	<	>
D	€	δ	a	c	x	0	<	>
E	€	δ	a	c	x	0	<	>
F	€	δ	a	c	x	0	<	>

(4)

A	▽	⊃	c	d	n	m	0	∞
B	▽	⊃	c	d	n	m	0	∞
C	▽	⊃	c	d	n	m	0	∞
D	▽	⊃	c	d	n	m	0	∞
E	▽	⊃	c	d	n	m	0	∞
F	▽	⊃	c	d	n	m	0	∞

(5)

A	0	a	b	c	x	h	<	>
B	0	a	b	c	x	h	<	>
C	0	a	b	c	x	h	<	>
D	0	a	b	c	x	h	<	>
E	0	a	b	c	x	h	<	>

(6)

A	▽	⊃	€	δ	r	a	n	<
B	▽	⊃	€	δ	r	a	n	<
C	▽	⊃	€	δ	r	a	n	<
D	▽	⊃	€	δ	r	a	n	<
E	▽	⊃	€	δ	r	a	n	<

問2

A	▽	⊃	€	δ	a	x	<	>
B	▽	⊃	€	δ	a	x	<	>
C	▽	⊃	€	δ	a	x	<	>

問3

a	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
b	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧

問4

A	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
B	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
C	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧

問5

(1)	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
(2)	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧

問6

A	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
B	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
C	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
D	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
E	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
F	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧

問7

A	0	∞	e	a	x	$x^2$	t	$t^2$
B	0	∞	e	a	x	$x^2$	t	$t^2$
C	0	∞	e	a	x	$x^2$	t	$t^2$
D	0	∞	e	a	x	$x^2$	t	$t^2$
E	0	∞	e	a	x	$x^2$	t	$t^2$
F	0	∞	e	a	x	$x^2$	t	$t^2$
G	0	∞	e	a	x	$x^2$	t	$t^2$
H	0	∞	e	a	x	$x^2$	t	$t^2$

問8

A	①	②	③	④	a	r	π	<
B	①	②	③	④	a	r	π	<
C	①	②	③	④	a	r	π	<
D	①	②	③	④	a	r	π	<
E	①	②	③	④	a	r	π	<
F	①	②	③	④	a	r	π	<
G	①	②	③	④	a	r	π	<
H	①	②	③	④	a	r	π	<
I	①	②	③	④	a	r	π	<

--	--	--	--	--	--	--

--

0	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
1	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ①
2	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> ②
3	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ③
4	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> ④
5	<input type="radio"/> ⑤	<input type="radio"/> ⑤	<input type="radio"/> ⑤	<input type="radio"/> ⑤	<input type="radio"/> ⑤	<input type="radio"/> ⑤	<input type="radio"/> ⑤
6	<input type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑥
7	<input type="radio"/> ⑦	<input type="radio"/> ⑦	<input type="radio"/> ⑦	<input type="radio"/> ⑦	<input type="radio"/> ⑦	<input type="radio"/> ⑦	<input type="radio"/> ⑦
8	<input type="radio"/> ⑧	<input type="radio"/> ⑧	<input type="radio"/> ⑧	<input type="radio"/> ⑧	<input type="radio"/> ⑧	<input type="radio"/> ⑧	<input type="radio"/> ⑧
9	<input type="radio"/> ⑨	<input type="radio"/> ⑨	<input type="radio"/> ⑨	<input type="radio"/> ⑨	<input type="radio"/> ⑨	<input type="radio"/> ⑨	<input type="radio"/> ⑨

問1(1)

<input type="radio"/> A	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $i$	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $b$
<input type="radio"/> B	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $i$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $b$
<input type="radio"/> C	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $n$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $b$
<input type="radio"/> D	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $i$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $b$
(2) <input type="radio"/> A	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $m$	<input type="radio"/> $i$	<input type="radio"/> $a$
<input type="radio"/> B	<input type="radio"/> $\forall$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $m$	<input type="radio"/> $i$	<input type="radio"/> $a$
<input type="radio"/> C	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $m$	<input type="radio"/> $i$	<input checked="" type="radio"/>
<input type="radio"/> D	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $m$	<input type="radio"/> $i$	<input type="radio"/> $a$
<input type="radio"/> E	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $m$	<input type="radio"/> $i$	<input checked="" type="radio"/>
<input type="radio"/> F	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $m$	<input type="radio"/> $i$	<input type="radio"/> $a$
(3) <input type="radio"/> A	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $c$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $<$	<input type="radio"/> $>$
<input type="radio"/> B	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $a$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $<$	<input type="radio"/> $>$
<input type="radio"/> C	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $a$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $<$	<input type="radio"/> $>$
<input type="radio"/> D	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $c$	<input type="radio"/> $x$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $<$	<input type="radio"/> $>$
<input type="radio"/> E	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $c$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $<$	<input type="radio"/> $>$
<input type="radio"/> F	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $a$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $<$	<input type="radio"/> $>$
(4) <input type="radio"/> G	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $a$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $<$	<input type="radio"/> $>$
<input type="radio"/> A	<input type="radio"/> $\forall$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $c$	<input type="radio"/> $d$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $m$	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $\infty$
<input type="radio"/> B	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $c$	<input type="radio"/> $d$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $m$	<input type="radio"/> 0	<input checked="" type="radio"/>
<input type="radio"/> C	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $d$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $m$	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $\infty$
<input type="radio"/> D	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $c$	<input type="radio"/> $d$	<input type="radio"/> $n$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $\infty$
<input type="radio"/> E	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $c$	<input type="radio"/> $d$	<input type="radio"/> $n$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $\infty$
<input type="radio"/> F	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $d$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $m$	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $\infty$
(5) <input type="radio"/> A	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $b$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $h$	<input type="radio"/> $<$	<input type="radio"/> $>$
<input type="radio"/> B	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $b$	<input type="radio"/> $c$	<input type="radio"/> $x$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $<$	<input type="radio"/> $>$
<input type="radio"/> C	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $b$	<input type="radio"/> $c$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $h$	<input type="radio"/> $<$	<input checked="" type="radio"/>
<input type="radio"/> D	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $b$	<input type="radio"/> $c$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $h$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $>$
<input type="radio"/> E	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $b$	<input type="radio"/> $c$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $h$	<input type="radio"/> $<$	<input type="radio"/> $>$
(6) <input type="radio"/> A	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $r$	<input type="radio"/> $a$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $<$
<input type="radio"/> B	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $r$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $<$
<input type="radio"/> C	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $<$
<input type="radio"/> D	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $<$
<input type="radio"/> E	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $<$

問2

<input type="radio"/> A	<input type="radio"/> $\forall$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $<$	<input type="radio"/> $>$
<input type="radio"/> B	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $<$	<input type="radio"/> $>$
<input type="radio"/> C	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $<$	<input type="radio"/> $>$
問3 <input type="radio"/> a	<input type="radio"/> ①	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> ⑤	<input type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑦	<input type="radio"/> ⑧
<input type="radio"/> b	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> ③	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> ⑤	<input type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑦	<input type="radio"/> ⑧
問4 <input type="radio"/> A	<input type="radio"/> ①	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> ⑤	<input type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑦	<input type="radio"/> ⑧
<input type="radio"/> B	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> ⑤	<input type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑦	<input type="radio"/> ⑧
<input type="radio"/> C	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> ⑤	<input type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑦	<input type="radio"/> ⑧
問5 (1)	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> ⑤	<input type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑦	<input type="radio"/> ⑧
(2)	<input type="radio"/> ①	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> ⑤	<input type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑦	<input type="radio"/> ⑧
問6 <input type="radio"/> A	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> ⑤	<input type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑦	<input type="radio"/> ⑧
<input type="radio"/> B	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> ⑤	<input type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑦	<input type="radio"/> ⑧
<input type="radio"/> C	<input type="radio"/> ①	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> ⑤	<input type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑦	<input type="radio"/> ⑧
<input type="radio"/> D	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> ③	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> ⑤	<input type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑦	<input type="radio"/> ⑧
<input type="radio"/> E	<input type="radio"/> ①	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> ⑤	<input type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑦	<input type="radio"/> ⑧
<input type="radio"/> F	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ②	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> ⑤	<input type="radio"/> ⑥	<input type="radio"/> ⑦	<input type="radio"/> ⑧
問7 <input type="radio"/> A	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $\infty$	<input type="radio"/> $e$	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $x^2$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $t^2$
<input type="radio"/> B	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $\infty$	<input type="radio"/> $e$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $x^2$	<input type="radio"/> $t$	<input type="radio"/> $t^2$
<input type="radio"/> C	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $\infty$	<input type="radio"/> $e$	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $x^2$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $t^2$
<input type="radio"/> D	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $\infty$	<input type="radio"/> $e$	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $x^2$	<input type="radio"/> $t$	<input type="radio"/> $t^2$
<input type="radio"/> E	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $\infty$	<input type="radio"/> $e$	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $x^2$	<input type="radio"/> $t$	<input checked="" type="radio"/>
<input type="radio"/> F	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $\infty$	<input type="radio"/> $e$	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $x^2$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $t^2$
<input type="radio"/> G	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $\infty$	<input type="radio"/> $e$	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $x^2$	<input type="radio"/> $t$	<input type="radio"/> $t^2$
<input type="radio"/> H	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $\infty$	<input type="radio"/> $e$	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $x^2$	<input type="radio"/> $t$	<input type="radio"/> $t^2$
問8 <input type="radio"/> A	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> $a$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $\pi$	<input type="radio"/> $<$
<input type="radio"/> B	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> ③	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $r$	<input type="radio"/> $\pi$	<input type="radio"/> $<$
<input type="radio"/> C	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $r$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $<$
<input type="radio"/> D	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $r$	<input type="radio"/> $\pi$	<input type="radio"/> $<$
<input type="radio"/> E	<input type="radio"/> ①	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $r$	<input type="radio"/> $\pi$	<input type="radio"/> $<$
<input type="radio"/> F	<input type="radio"/> ①	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $r$	<input type="radio"/> $\pi$	<input type="radio"/> $<$
<input type="radio"/> G	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $r$	<input type="radio"/> $\pi$	<input checked="" type="radio"/>
<input type="radio"/> H	<input type="radio"/> ①	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $r$	<input type="radio"/> $\pi$	<input type="radio"/> $<$
<input type="radio"/> I	<input type="radio"/> ①	<input type="radio"/> ②	<input type="radio"/> ③	<input type="radio"/> ④	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $r$	<input type="radio"/> $\pi$	<input type="radio"/> $<$

## 数学I 期末試験 4 解答

### 問 1

(1)  $A = n$ ,  $B = a$ ,  $C = i$ ,  $D = a$ ,

(2)  $A = n$ ,  $B = \exists$ ,  $C = a$ ,  $D = n$ ,  $E = a$ ,  $F = \epsilon$

(3)  $A = \delta$ ,  $B = c$ ,  $C = c$ ,  $D = 0$ ,  $E = \delta$ ,  $F = c$ ,  $G = c$

(4)  $A = \exists$ ,  $B = \infty$ ,  $C = c$ ,  $D = m$ ,  $E = m$ ,  $F = c$

(5)  $A = c$ ,  $B = h$ ,  $C = \geq$ ,  $D = \leq$ ,  $E = 0$

(6)  $A = n$ ,  $B = a$ ,  $C = r$ ,  $D = r$ ,  $E = r$

### 問 2

$A = \exists$ ,  $B = \delta$ ,  $C = a$

### 問 3

$a = \inf X = 2$ ,  $b = \sup X = 4$

### 問 4

$A = 2$ ,  $B = 1$ ,  $C = 1$

### 問 5

(1) 1 (2) 2

### 問 6

$A = 1$ ,  $B = 1$ ,  $C = 2$ ,  $D = 4$ ,  $E = 2$ ,  $F = 3$

### 問 7

$A = t$ ,  $B = a$ ,  $C = t$ ,  $D = 0$ ,  $E = t^2$ ,  $F = t$ ,  $G = 0$ ,  $H = 0$

### 問 8

$A = r$ ,  $B = 4$ ,  $C = \pi$ ,  $D = a$ ,  $E = 2$ ,  $F = 2$ ,  $G = \leq$ ,  $H = 2$ ,  $I = a$





問1. 次の証明の空欄を埋めよ。

(1) 定理  $X$  を下に有界な実数の集合とする。  $a = \inf X$  とすると、

$X$  の数列  $\{x_n\}$  で  $a$  に収束する数列がある。

(証明)  $n$  を自然数とする。  $\boxed{A}$  は下限であるから、  $\boxed{A}$  より大きい  $\boxed{A} + \frac{1}{n}$  は下界でない。

よって  $\boxed{A} + \frac{1}{n} > x_n \geq \boxed{A}$  となる  $x_n \in X$  がある。

$\forall \epsilon > 0$  に対し、  $\frac{1}{\boxed{B}} < N$  となる  $N$  を選ぶと、  $n > N \Rightarrow |x_n - \boxed{A}| = x_n - \boxed{A} < \frac{1}{\boxed{C}} < \boxed{D}$  □

(2) 定理 有界な数列  $\{x_n\}$  には集積点  $a$  がある。

(証明)  $\exists K > 0, \forall n \in \mathbf{N}; -K < x_n < K$  とし、  $X = \{x | x_n \leq x \text{ となる } n \text{ は有限個}\}$  とする。

$x_n < -K$  となる  $\boxed{A}$  は 0 個 (有限個) だから  $-K \in X$  であり、  $X \neq \emptyset$  である。

次に、  $x \in X$  ならば、  $x < x_n$  となる  $\boxed{A}$  は無限個だから、一つは  $x < x_n$  となる  $\boxed{A}$  がある。

よって、  $x < x_n < K$  となり、  $X$  は上に有界である。以上から、上限  $a = \sup X$  がある。

そこで、  $\forall i \in \mathbf{N}$  に対し、増加自然数列  $n_i$  で、  $|x_{n_i} - a| \leq \frac{1}{i}$  となる物を選ぶために次のように考える。

$\boxed{B} < \boxed{B} + \frac{1}{i}$  から、  $\boxed{B} + \frac{1}{i} \notin X$  であり、  $x_n \leq \boxed{B} + \frac{1}{i}$  となる  $\boxed{A}$  は無限個ある。

一方、  $\boxed{B} - \frac{1}{i}$  は、  $\boxed{B}$  未満なので上界ではない。そこで、  $\boxed{B} - \frac{1}{i} < x \leq \boxed{B}$  となる  $x \in X$  がある。

$X$  の定義から、  $x_n \leq x$  となる  $\boxed{A}$  は有限個である。無限個から有限個を引いても無限個であるから、

1)  $\boxed{B} - \frac{1}{i} < x < x_n \leq \boxed{B} + \frac{1}{i}$  となる  $\boxed{A}$  は無限個ある。

以上から、求める  $n_i$  を順に次のように選ぶ、

$i = 1$  に対しては、1) から、  $\boxed{B} - \boxed{C} < x_{n_1} \leq \boxed{B} + \boxed{C}$  となる物を選ぶ。

$n_{i-1}$  まで選ばれているとする。1) の無限個の  $\boxed{A}$  から、  $n_{i-1}$  より大きい物を選んで  $n_i$  とする。

このとき、  $|x_{n_i} - \boxed{B}| \leq \frac{1}{\boxed{D}}$  から、  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i} = \boxed{F}$  □

(3) 定理 コーシー列  $\{x_n\}$  は収束する。

(証明) コーシー列の定義で、  $\epsilon = 1$  とし、対応する  $N$  を取り、  $m = N + 1$  とすると、

$n > N \Rightarrow |x_n - x_{N+1}| < \boxed{A}$  であり、  $x_{N+1} - \boxed{A} < x_n < x_{N+1} + \boxed{A}$  だから、  $\{x_n\}$  は有界になる。

集積点定理により、集積点  $a$  とそれに収束する部分数列  $\{x_{n_i}\}$  がある。

ここで、  $\{n_i\}$  は増加数列である。

収束の定義から、  $\boxed{B} \epsilon > 0$  に対して、  $\exists I; i > I \Rightarrow |x_{n_i} - \boxed{C}| < \frac{\epsilon}{2}$  である。

さらに、コーシー列の定義で  $\frac{\epsilon}{2}$  に対応する  $N$  を取る。

$\{n_i\}$  は増加数列であるから、 $i > I, n_i > N$  となるように  $i$  を取れる。

すると、 $n > N$  ならば  $|x_n - \boxed{D}| = |x_n - x_{n_i} + x_{n_i} - \boxed{D}| \leq |x_n - x_{n_i}| + |x_{n_i} - \boxed{D}| < \boxed{E}$  □

(4) 定理 関数  $y = f(x)$  が区間  $[a, b]$  で連続で、

$f(a) > 0, f(b) < 0$  ならば、 $\exists c \in (a, b); f(c) = 0$

(証明)  $X = \{x \in [a, b]; f(x) > 0\}$  とする。 $a \in X$  より  $X \neq \emptyset$  であり、

上に有界であるから、上限  $c = \sup X$  がある。

1)  $f(c) > 0$  とする。 $0 < \epsilon < f(c)$  となる  $\epsilon$  がある。 $c$  での連続の定義で、 $\epsilon$  に対応する  $\delta$  を取る。

$\boxed{A} < x < \boxed{A} + \delta$  となる  $x$  に対し、 $|x - \boxed{A}| = x - \boxed{A} < \boxed{B}$  だから、

$|f(x) - f(\boxed{C})| < \boxed{D}, 0 < f(\boxed{C}) - \boxed{D} < f(x) < f(\boxed{C}) + \boxed{D}$

よって、 $x \in X$  であり、 $\boxed{A}$  が  $X$  の上限である事に矛盾する。

2)  $f(c) < 0$  とする。 $0 < \epsilon < -f(c)$  となる  $\epsilon > 0$  がある。 $c$  での連続の定義で、 $\epsilon$  に対応する  $\delta$  を取る。

すると、 $\boxed{E} - \delta < x < \boxed{E}$  ならば、 $|x - \boxed{E}| = \boxed{E} - x < \boxed{F}$  だから、

$|f(x) - f(\boxed{E})| < \boxed{G}, f(\boxed{E}) - \boxed{G} < f(x) < f(\boxed{E}) + \boxed{G} < 0$

一方、 $\boxed{E}$  は上限であるから、 $\boxed{E} - \delta < x \leq \boxed{E}$  となる  $x \in X$  がある。

ここで、 $c \notin X$  より  $\boxed{E} - \delta < x < \boxed{E}$  である。

$x \in X$  は  $f(x) > 0$  を意味し、上の  $f(x) < 0$  と矛盾する。

3)  $f(c) > 0, f(c) < 0$  どちらでも矛盾するから  $f(c) = \boxed{H}$  □

(5) 定理 関数  $y = f(x)$  が区間  $[a, b]$  で連続ならば、最大値  $f(c), c \in [a, b]$  がある。

(証明)  $F = \{f(x) | x \in [a, b]\}$  とする。

1) もし、 $F$  が、上に有界でないならば、 $\boxed{A}n \in \mathbf{N}, \exists x_n \in [a, b]; f(x_n) > n$

集積点定理により、部分数列  $\{x_{n_i}\}$  があり、 $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i} = d \in [a, b]$

連続より、 $\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{n_i}) = f(\boxed{B})$  である。

だが、 $x_{n_i}$  の定義より  $\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{n_i}) = \infty$  であり矛盾する。よって、 $F$  は上に有界。

2)  $F \neq \emptyset$  だから、上限  $m$  がある。

その時、 $F$  の数列  $\{f(x_n)\}$  で  $\boxed{C}$  に収束するものがある。

集積点定理より、収束する部分数列  $\{x_{n_i}\}$  がある。その収束値を  $c$  とする。

連続より、 $f(\boxed{D}) = f\left(\lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i}\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{n_i}) = \boxed{E}$  だから  $\boxed{E} \in F$  である。

よって、 $\boxed{E}$  は  $F$  の最大値である。 □

# 数学Ⅰ期末試験 No.2

(6) 定理 関数  $y = f(x)$  が区間  $[a, b]$  で連続、 $(a, b)$  で微分可能、  
 $f(a) = f(b)$  ならば、 $\exists c \in (a, b); f'(c) = 0$  である。

(証明) 最大値の定理より、 $f(x)$  の最大値  $f(c)$ ,  $c \in [a, b]$  がある。

もし、 $c = a$  または  $c = b$  ならば、 $f(d)$  が最小値になる  $d \in (a, b)$  があるから、  
 以下と同じ証明で  $f'(d) = 0$  が言える。

よって、 $c \in (a, b)$  と仮定する。

$f(c)$  は最大値であるから、 $\boxed{A} + h \in [a, b]$  ならば、 $f(\boxed{A} + h) - f(\boxed{A}) \boxed{B} 0$

もし、 $h > 0$  ならば  $f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\boxed{A} + \boxed{C}) - f(\boxed{A})}{\boxed{C}} \boxed{D} 0$

もし、 $h < 0$  ならば  $f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\boxed{A} + \boxed{C}) - f(\boxed{A})}{\boxed{C}} \boxed{E} 0$

よって、 $f'(c) = 0$        $\square$

問2. 次の空欄を埋めよ。

コーシー列の定義:  $\boxed{A}\epsilon > 0$ ,  $\boxed{B}N$ ;  $n > N$ ,  $m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \boxed{C}$

問3. 次の集合  $X$  の下限  $a = \inf X$  および上限  $b = \sup X$  を求めよ。

$$X = \left\{ \frac{3n+1}{n} \mid n \in \mathbf{N} \right\}, a = \inf X, b = \sup X$$

問4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{2n+1} = 2$  の次の証明の空欄を埋めよ。

(証明)  $\forall \epsilon > 0$  に対し、 $\frac{\boxed{A}}{\boxed{B}\epsilon} - \frac{1}{\boxed{B}} < N$  となるように  $N$  を取る。すると、

$n > N$  ならば、 $\frac{\boxed{A}}{\boxed{B}n+1} < \epsilon$  より、 $\left| \frac{4n-1}{2n+1} - \boxed{C} \right| < \epsilon$        $\square$

問5. 次のべき級数の収束半径  $R$  を求めよ。

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^n} x^n$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n+1} x^n$$

問6. 陰関数  $x^2 + xy + 2y^2 = \frac{1}{2}$  の両辺を  $x$  で微分することにより、 $y'$ ,  $y''$  を求める。

$$y' = -\frac{\boxed{A}x + \boxed{B}y}{x + \boxed{C}y},$$

$$y'' = -\frac{\boxed{D}}{(x + \boxed{E}y)\boxed{F}}$$

問7. 解答用紙の  $s$  は  $\sin$  を、 $c$  は  $\cos$  を表す。

不定積分  $I = \int e^{ax} \sin bx \, dx$ ,  $J = \int e^{ax} \cos bx \, dx$  を求める。

積分  $\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{\boxed{A}}e^{ax} + C$  を使用して、 $I$ ,  $J$  にそれぞれ部分積分を適用すると、

$$I = \frac{1}{\boxed{A}}e^{ax}\boxed{B}bx - \frac{\boxed{C}}{\boxed{A}}J \quad J = \frac{1}{\boxed{A}}e^{ax}\boxed{D}bx + \frac{\boxed{C}}{\boxed{A}}I$$

以上から、上式を  $I$ ,  $J$  に関する連立方程式とみなして、解くと

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} \left( \boxed{E} \sin bx - \boxed{F} \cos bx \right), \quad J = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} \left( \boxed{G} \sin bx + \boxed{H} \cos bx \right)$$

問8. 以下の空欄に 0, 1, 2, 3,  $\pi$ ,  $n$ ,  $\sin$ ,  $\cos$  を入れよ。

ただし、解答欄の  $s$  は  $\sin$  を、 $c$  は  $\cos$  を表す。

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$  を計算する。

まず、 $n = 0, 1$  のとき、 $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0 x \, dx = \frac{\boxed{A}}{2}$ ,  $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \boxed{B}$

$n \geq 2$  のときは、部分積分により、

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\boxed{C}x)' \cos^{n-1} x \, dx = (\boxed{D} - 1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \boxed{E}^2 x \cos^{n-2} x \, dx = (\boxed{D} - 1)I_{n-\boxed{F}} - (\boxed{D} - 1)I_n$$

よって、 $I_n = \frac{\boxed{D} - 1}{\boxed{D}}I_{n-\boxed{F}}$  となり、

$n$  が偶数ならば、 $I_n = \frac{\boxed{D} - 1}{\boxed{D}} \cdots \frac{1}{\boxed{G}} \frac{\boxed{A}}{2}$ 、 $n$  が奇数ならば、 $I_n = \frac{\boxed{D} - 1}{\boxed{D}} \cdots \frac{\boxed{H}}{\boxed{I}} \boxed{B}$

--	--	--	--	--	--	--

--

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

問1(1)

A	$\forall$	$\exists$	$\epsilon$	$\delta$	$n$	$m$	$a$	$b$
B	$\forall$	$\exists$	$\epsilon$	$\delta$	$n$	$m$	$a$	$b$
C	$\forall$	$\exists$	$\epsilon$	$\delta$	$n$	$m$	$a$	$b$
D	$\forall$	$\exists$	$\epsilon$	$\delta$	$n$	$m$	$a$	$b$

(2)

A	0	1	$i$	$n$	$a$	$x$	$<$	$>$
B	0	1	$i$	$n$	$a$	$x$	$<$	$>$
C	0	1	$i$	$n$	$a$	$x$	$<$	$>$
D	0	1	$i$	$n$	$a$	$x$	$<$	$>$
E	0	1	$i$	$n$	$a$	$x$	$<$	$>$
F	0	1	$i$	$n$	$a$	$x$	$<$	$>$

(3)

A	$\forall$	$\exists$	$\epsilon$	0	1	$a$	$n$	$m$
B	$\forall$	$\exists$	$\epsilon$	0	1	$a$	$n$	$m$
C	$\forall$	$\exists$	$\epsilon$	0	1	$a$	$n$	$m$
D	$\forall$	$\exists$	$\epsilon$	0	1	$a$	$n$	$m$
E	$\forall$	$\exists$	$\epsilon$	0	1	$a$	$n$	$m$

(4)

A	$\forall$	$\exists$	$\epsilon$	$\delta$	0	$c$	$x$	$<$
B	$\forall$	$\exists$	$\epsilon$	$\delta$	0	$c$	$x$	$<$
C	$\forall$	$\exists$	$\epsilon$	$\delta$	0	$c$	$x$	$<$
D	$\forall$	$\exists$	$\epsilon$	$\delta$	0	$c$	$x$	$<$
E	$\forall$	$\exists$	$\epsilon$	$\delta$	0	$c$	$x$	$<$
F	$\forall$	$\exists$	$\epsilon$	$\delta$	0	$c$	$x$	$<$
G	$\forall$	$\exists$	$\epsilon$	$\delta$	0	$c$	$x$	$<$
H	$\forall$	$\exists$	$\epsilon$	$\delta$	0	$c$	$x$	$<$

(5)

A	$\forall$	$\exists$	0	$\infty$	$c$	$d$	$x$	$m$
B	$\forall$	$\exists$	0	$\infty$	$c$	$d$	$x$	$m$
C	$\forall$	$\exists$	0	$\infty$	$c$	$d$	$x$	$m$
D	$\forall$	$\exists$	0	$\infty$	$c$	$d$	$x$	$m$
E	$\forall$	$\exists$	0	$\infty$	$c$	$d$	$x$	$m$

(6)

A	$a$	$b$	$c$	$d$	$x$	$h$	$<$	$>$
B	$a$	$b$	$c$	$d$	$x$	$h$	$<$	$>$
C	$a$	$b$	$c$	$d$	$x$	$h$	$<$	$>$
D	$a$	$b$	$c$	$d$	$x$	$h$	$<$	$>$
E	$a$	$b$	$c$	$d$	$x$	$h$	$<$	$>$

問2

A	$\forall$	$\exists$	$\epsilon$	$\delta$	$a$	$x$	$n$	$m$
B	$\forall$	$\exists$	$\epsilon$	$\delta$	$a$	$x$	$n$	$m$
C	$\forall$	$\exists$	$\epsilon$	$\delta$	$a$	$x$	$n$	$m$

問3

a	1	2	3	4	5	6	7	8
b	1	2	3	4	5	6	7	8

問4

A	1	2	3	4	5	6	7	8
B	1	2	3	4	5	6	7	8
C	1	2	3	4	5	6	7	8

問5

(1)	1	2	3	4	5	6	7	8
(2)	1	2	3	4	5	6	7	8

問6

A	1	2	3	4	5	6	7	8
B	1	2	3	4	5	6	7	8
C	1	2	3	4	5	6	7	8
D	1	2	3	4	5	6	7	8
E	1	2	3	4	5	6	7	8
F	1	2	3	4	5	6	7	8

問7

A	$a$	$a^2$	$b$	$b^2$	$\pi$	$e$	$s$	$c$
B	$a$	$a^2$	$b$	$b^2$	$\pi$	$e$	$s$	$c$
C	$a$	$a^2$	$b$	$b^2$	$\pi$	$e$	$s$	$c$
D	$a$	$a^2$	$b$	$b^2$	$\pi$	$e$	$s$	$c$
E	$a$	$a^2$	$b$	$b^2$	$\pi$	$e$	$s$	$c$
F	$a$	$a^2$	$b$	$b^2$	$\pi$	$e$	$s$	$c$
G	$a$	$a^2$	$b$	$b^2$	$\pi$	$e$	$s$	$c$
H	$a$	$a^2$	$b$	$b^2$	$\pi$	$e$	$s$	$c$

問8

A	1	2	3	4	$\pi$	$n$	$s$	$c$
B	1	2	3	4	$\pi$	$n$	$s$	$c$
C	1	2	3	4	$\pi$	$n$	$s$	$c$
D	1	2	3	4	$\pi$	$n$	$s$	$c$
E	1	2	3	4	$\pi$	$n$	$s$	$c$
F	1	2	3	4	$\pi$	$n$	$s$	$c$
G	1	2	3	4	$\pi$	$n$	$s$	$c$
H	1	2	3	4	$\pi$	$n$	$s$	$c$
I	1	2	3	4	$\pi$	$n$	$s$	$c$

--	--	--	--	--	--	--

--

0	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
1	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 1
2	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 2
3	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 3
4	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 4
5	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 5
6	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 6
7	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 7
8	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 8
9	<input type="radio"/> 9	<input type="radio"/> 9	<input type="radio"/> 9	<input type="radio"/> 9	<input type="radio"/> 9	<input type="radio"/> 9	<input type="radio"/> 9

問1(1)

A	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $m$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $b$
B	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $m$	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $b$
C	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $m$	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $b$
D	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $m$	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $b$
(2) A	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> $i$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $<$	<input type="radio"/> $>$
B	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> $i$	<input type="radio"/> $n$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $<$	<input type="radio"/> $>$
C	<input type="radio"/> 0	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $i$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $<$	<input type="radio"/> $>$
D	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> $i$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $x$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $>$
E	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> 1	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $<$	<input type="radio"/> $>$
F	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> $i$	<input type="radio"/> $n$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $<$	<input type="radio"/> $>$
(3) A	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> 0	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $m$
B	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $m$
C	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> 1	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $m$
D	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> 1	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $m$
E	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $m$
(4) A	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> 0	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $<$
B	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $c$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $<$
C	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> 0	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $<$
D	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $c$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $<$
E	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> 0	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $<$
F	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $c$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $<$
G	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $c$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $<$
H	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $c$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $<$
(5) A	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $\infty$	<input type="radio"/> $c$	<input type="radio"/> $d$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $m$
B	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $\infty$	<input type="radio"/> $c$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $m$
C	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $\infty$	<input type="radio"/> $c$	<input type="radio"/> $d$	<input type="radio"/> $x$	<input checked="" type="radio"/>
D	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $\infty$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $d$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $m$
E	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> $\infty$	<input type="radio"/> $c$	<input type="radio"/> $d$	<input type="radio"/> $x$	<input checked="" type="radio"/>
(6) A	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $b$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $d$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $h$	<input type="radio"/> $<$	<input type="radio"/> $>$
B	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $b$	<input type="radio"/> $c$	<input type="radio"/> $d$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $h$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $>$
C	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $b$	<input type="radio"/> $c$	<input type="radio"/> $d$	<input type="radio"/> $x$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $<$	<input type="radio"/> $>$
D	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $b$	<input type="radio"/> $c$	<input type="radio"/> $d$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $h$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $>$
E	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $b$	<input type="radio"/> $c$	<input type="radio"/> $d$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $h$	<input type="radio"/> $<$	<input checked="" type="radio"/>

問2

A	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $\exists$	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $m$
B	<input type="radio"/> $\forall$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $\epsilon$	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $m$
C	<input type="radio"/> $\forall$	<input type="radio"/> $\exists$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $\delta$	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $x$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $m$
問3 a	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 8
b	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 8
問4 A	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 8
B	<input type="radio"/> 1	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 8
C	<input type="radio"/> 1	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 8
問5 (1)	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 8
(2)	<input type="radio"/> 1	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 8
問6 A	<input type="radio"/> 1	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 8
B	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 8
C	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 8
D	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 8
E	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 8
F	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 8
問7 A	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $a^2$	<input type="radio"/> $b$	<input type="radio"/> $b^2$	<input type="radio"/> $\pi$	<input type="radio"/> $e$	<input type="radio"/> $s$	<input type="radio"/> $c$
B	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $a^2$	<input type="radio"/> $b$	<input type="radio"/> $b^2$	<input type="radio"/> $\pi$	<input type="radio"/> $e$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $c$
C	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $a^2$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $b^2$	<input type="radio"/> $\pi$	<input type="radio"/> $e$	<input type="radio"/> $s$	<input type="radio"/> $c$
D	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $a^2$	<input type="radio"/> $b$	<input type="radio"/> $b^2$	<input type="radio"/> $\pi$	<input type="radio"/> $e$	<input type="radio"/> $s$	<input checked="" type="radio"/>
E	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $a^2$	<input type="radio"/> $b$	<input type="radio"/> $b^2$	<input type="radio"/> $\pi$	<input type="radio"/> $e$	<input type="radio"/> $s$	<input type="radio"/> $c$
F	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $a^2$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $b^2$	<input type="radio"/> $\pi$	<input type="radio"/> $e$	<input type="radio"/> $s$	<input type="radio"/> $c$
G	<input type="radio"/> $a$	<input type="radio"/> $a^2$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $b^2$	<input type="radio"/> $\pi$	<input type="radio"/> $e$	<input type="radio"/> $s$	<input type="radio"/> $c$
H	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $a^2$	<input type="radio"/> $b$	<input type="radio"/> $b^2$	<input type="radio"/> $\pi$	<input type="radio"/> $e$	<input type="radio"/> $s$	<input type="radio"/> $c$
問8 A	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $s$	<input type="radio"/> $c$
B	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> $\pi$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $s$	<input type="radio"/> $c$
C	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> $\pi$	<input type="radio"/> $n$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $c$
D	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> $\pi$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $s$	<input type="radio"/> $c$
E	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> $\pi$	<input type="radio"/> $n$	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> $c$
F	<input type="radio"/> 1	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> $\pi$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $s$	<input type="radio"/> $c$
G	<input type="radio"/> 1	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> $\pi$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $s$	<input type="radio"/> $c$
H	<input type="radio"/> 1	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> $\pi$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $s$	<input type="radio"/> $c$
I	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> $\pi$	<input type="radio"/> $n$	<input type="radio"/> $s$	<input type="radio"/> $c$

## 数学I 期末試験 5 解答

### 問 1

(1)  $A = a, B = \epsilon, C = n, D = \epsilon,$

(2)  $A = n, B = a, C = 1, D = \leq, E = i, F = a$

(3)  $A = 1, B = \forall, C = a, D = a, E = \epsilon$

(4)  $A = c, B = \delta, C = c, D = \epsilon, E = c, F = \delta, G = \epsilon, H = 0$

(5)  $A = \forall, B = d, C = m, D = c, E = m$

(6)  $A = c, B = \leq, C = h, D = \leq, E = \geq$

### 問 2

$A = \forall, B = \exists, C = \epsilon,$

### 問 3

$a = \inf X = 3, b = \sup X = 4$

### 問 4

$A = 3, B = 2, C = 2$

### 問 5

(1) 3 (2) 1

### 問 6

$A = 2, B = 1, C = 4, D = 7, E = 4, F = 3$

### 問 7

$A = a, B = \sin, C = b, D = \cos, E = a, F = b, G = b, H = a,$

### 問 8

$A = \pi, B = 1, C = \sin, D = n, E = \sin, F = 2, G = 2, H = 2, I = 3,$