『はじめて学ぶリー環』正誤表

井ノ口順一（Jun-ichi Inoguchi）

2024.1.28

誤植

- p. 10，14 行目：$\left(\sum_{i=1} a_{ij}\vec{g}_i\right)$ を $\left(\sum_{i=1} a_{ij}\vec{h}_i\right)$ に訂正.
- p. 22，2 行目：$(\cdot|\cdot) \longmapsto \mathcal{F}$
- p. 22，5 行目：
$$(f(\vec{x}-\vec{y})|f(\vec{x}-\vec{y})) = (f(\vec{x})-f(\vec{y})|f(\vec{x})-f(\vec{y})) = 0.$$
を
$$\mathcal{F}(f(\vec{x}-\vec{y}), f(\vec{x}-\vec{y})) = \mathcal{F}(f(\vec{x})-f(\vec{y}), f(\vec{x})-f(\vec{y})) = 0.$$
に訂正.
- p. 22，7 行目：
$$(f(\vec{x}-\vec{y})|f(\vec{x}-\vec{y})) = (\vec{x}-\vec{y}|\vec{x}-\vec{y}) = \|\vec{x}-\vec{y}\|^2.$$
を
$$\mathcal{F}(f(\vec{x}-\vec{y}), f(\vec{x}-\vec{y})) = \mathcal{F}(\vec{x}-\vec{y}, \vec{x}-\vec{y}) = \|\vec{x}-\vec{y}\|^2.$$
に訂正.
- p. 25，下から 4 行目：$S_\Pi(\boldsymbol{n}) = -\boldsymbol{n}$ を $S_\Pi(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{a}-\boldsymbol{n}$ に訂正.
- p. 29，10 行目：「採れる」を「とれる」に
- p. 33，例 2.3，
$$[q_m, q_n] = 0, \quad [p_m, p_n] = 0$$
を追加.
- p. 41，(2.12)
$$\boldsymbol{i} = \mathtt{i}(E_{11}+E_{22}) \longmapsto \boldsymbol{i} = \mathtt{i}(E_{11}-E_{22})$$
$$\boldsymbol{k} = -\mathtt{i}(E_{11}+E_{22}) \longmapsto \boldsymbol{k} = -\mathtt{i}(E_{12}+E_{21})$$
- p. 45，註 2.3，有限次元多様体を n 次元多様体 $(n>1)$ に修正.

- p. 46，1 行目，部分リー環を線型部分空間に修正.
- p. 46，1 行目，

  で定めると f はリー環同型写像であり
  $$f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$$
  をみたす.

  を

  で定めると f は全単射で $f(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) = [f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})]$ をみたすのでリー環同型写像である．さらに
  $$f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$$
  をみたす.

  に修正.
- p. 48，例 2.13.
  $$\mathsf{J}_2 := \frac{\boldsymbol{j}}{2} = -\frac{\mathtt{i}}{2}(E_{12} - E_{21}) \longmapsto \mathsf{J}_2 := \frac{\boldsymbol{j}}{2} = -\frac{1}{2}(E_{12} - E_{21})$$
- p. 48，命題 2.1 の証明．冒頭に加筆：
  $\mathfrak{g}(A;\mathbb{K})$ は $\mathfrak{gl}_n\mathbb{K}$ の線型部分空間である（確かめよ）.
- p. 49，命題 2.2：主張を次のように訂正：A, $B \in \mathfrak{gl}_n\mathbb{K}$ に対し $B = {}^tPAP$ と表せる $P \in \mathrm{GL}_n\mathbb{K}$ が存在すれば $\mathfrak{g}(A;\mathbb{K})$ と $\mathfrak{g}(B;\mathbb{K})$ はリー環として同型である.
- p. 50，定義 2.4：$\mathfrak{gl}(\mathbb{V}) \longmapsto \mathfrak{gl}(\mathbb{V})$
- p. 51，13 行目：
  $$\phi \circ \rho(X) = \rho'(X) \circ \phi(X)$$
  を
  $$\phi \circ \rho(X) = \rho'(X) \circ \phi$$
  に訂正.
- p. 53，定義 2.9，$k \geq 0 \longmapsto k \geq 1$
- p. 54，1 行目，「可換リー環は 0 次可解リー環とみなせる.」を次のように修正する.
  「$\{0\}$ は 0 次可解リー環，可換リー環は 1 次可解リー環とみなせる.」
- p. 54，3 行目，$x, y \in \mathbb{R} \longmapsto x, y \in \mathbb{K}$
- p. 54，11 行目，$\mathfrak{D}_{i+1} = [\mathfrak{D}\mathfrak{g}, \mathfrak{D}_i\mathfrak{g}] \longmapsto \mathfrak{D}_{i+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{D}_i\mathfrak{g}]$
- p. 55，3 行目の文末を，「である ([38, 補題 3.15])．」に修正.
- p. 55，問題 2.7，核, Ker f $\longmapsto$ 核 Ker f
- p. 55，問題 2.8，$\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(X)$ の定義，$[X,Y] = \in \mathbb{K}X \longmapsto [X,Y] \in \mathbb{K}X$

- p. 56，5 行目：文末に加筆する：おこう（随伴表現については『リー群』参照）.
- p. 56，下から 5 行目：$\mathrm{GL}(\mathbb{V}) \longmapsto \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$
- p. 56，下から 4 行目：$e^{tX}Ye^{-tY} \longmapsto e^{tX}Ye^{-tX}$
- p. 56，下から 2 行目：$[X,Y]$ の後に加筆する．$[X,Y]=\mathrm{ad}(X)Y$.
- p. 57，下から 4 行目から 12 行目を以下のものに差し替える：
  そこで $X \in \mathfrak{g}$ をとり $g=e^{tX}$ と選ぶと H が正規部分群であることより
  $$e^{tX}e^{sY}e^{-tX} \in H$$
  がすべての s，$t \in \mathbb{R}$ について成り立つ．
  $$\begin{aligned} H \ni \mathrm{Ad}(e^{tX})e^{sY} =& e^{tX}e^{sY}e^{-tX} = \exp(\mathrm{Ad}(e^{tX})(sY)) \\ =& \exp\{s(\mathrm{Ad}(e^{tX})Y)\} \end{aligned}$$
  より，すべての $t \in \mathbb{R}$ に対し $\mathrm{Ad}(e^{tX})Y \in \mathfrak{h}$ である．Ad の微分表現が ad であることから
  $$H \ni \mathrm{Ad}(e^{tX})e^{sY} = \exp\{s(\mathrm{Ad}(e^{tx})Y)\} = \exp\{s(\exp(t[X,Y]))\}\}.$$
  したがって，すべての $t \in \mathbb{R}$ に対し $t[X,Y] \in \mathfrak{h}$．すなわち $[X,Y] \in \mathfrak{h}$ を得る．以上より $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．
- p. 58，命題 2.4：「連結な」を追加．連結でない場合は正しくない．たとえば $\mathrm{O}(2)$ の場合，
  $$Z(\mathrm{O}(2)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad \mathfrak{z}(\mathfrak{o}(2)) = \mathfrak{o}(2) = \mathfrak{so}(2)$$
  なので $Z(\mathrm{O}(2))$ のリー環と $\mathfrak{z}(\mathfrak{o}(2))$ は異なる．連結リー群 $\mathrm{SO}(2)$ では
  $$Z(\mathrm{SO}(2)) = \mathrm{SO}(2)$$
  であるから $Z(\mathrm{SO}(2))$ のリー環は $\mathfrak{z}(\mathfrak{so}(2))$ と一致している．
- p. 61：
  $$\begin{aligned} \mathsf{A}_1^{\pm} =& \frac{1}{2}\left\{\pm(E_{21}-E_{12})+(E_{43}-E_{34})\right\}, \\ \mathsf{A}_2^{\pm} =& \frac{1}{2}\left\{(E_{24}-E_{42})\pm(E_{31}-E_{13s})\right\}, \\ \mathsf{A}_3^{\pm} =& \frac{1}{2}\left\{(E_{32}-E_{23})\pm(E_{41}-E_{14})\right\} \end{aligned}$$
  に取り替える．
- p. 64，3 行目：
  $$\{X+\mathtt{i}U \mid X, Y \in \mathfrak{gl}_n\mathbb{R}\} \longmapsto \{X+\mathtt{i}U \mid X, U \in \mathfrak{gl}_n\mathbb{R}\}$$
- p. 64，下から 2 行目：
  $${}^tPKP \longmapsto {}^tPK_nP$$

- p. 73
$$(\rho_m(\mathsf{E})f)(t) = mf(t) - t^2 f'(t) \longmapsto (\rho_m(\mathsf{E})f)(t) = mtf(t) - t^2 f'(t)$$
- p. 66，16 行目：もつことがわかった $\longmapsto$ もつのである．
- p. 68，1 行目：$\iota_1 \longmapsto \iota_\circ$，$\iota_2 \longmapsto \iota_\mathrm{u}$
- p. 70，2 行目：採り上げる $\longmapsto$ とり上げる
- p. 70，下から 7 行目：$\rho(H)$ の固有値 $\longmapsto \rho(\mathsf{H})$ の固有値
- p. 70，下から 6 行目：$C = \rho(H) \longmapsto C = \rho(\mathsf{H})$
- p. 71，命題 2.11：ベクトルの列 $\{u_n\} \longmapsto \{\vec{u}_n\}$
- p. 71，命題 2.11：
$$u_n = \frac{1}{n!}B^n \vec{v}(n \geq 1)$$
を
$$\vec{u}_n = \frac{1}{n!}B^n \vec{u} \quad (n \geq 1)$$
に訂正．
$$B\vec{u}_n = (n+1)\vec{u}_n$$
を
$$B\vec{u}_n = (n+1)\vec{u}_{n+1}$$
に訂正．
$$A\vec{u}_n = (\lambda - n + 1)\vec{u}_{n+1}$$
を
$$A\vec{u}_n = (\lambda - n + 1)\vec{u}_{n-1}$$
に訂正．
- p. 71，命題 2.11：「すべての $n \geq -1$」を「すべての $n \geq 0$」に訂正．
- p. 77：式 (3.2) のあとのピリオドを削除．
- p. 80：脚注：Cartan (1869-1951 を Cartan, 1869-1951 に
- p. 82：例 3.1：「Z に XZ を対応させる線型変換」を「Z に X^2Z を対応させる線型変換」に訂正．
- p. 109，下から 6 行目：$\mathrm{ad}(H)X = \mu_i X$ を $\mathrm{ad}(H_i)X = \mu_i X$ に訂正．
- p. 82，下から 3 行目より p. 83，2 行目までの $f(Z) = X^2Z$ の固有和 $\mathrm{tr}\, f$ の計算．以下の

ものに差し替える．

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr} f &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle f(E_{ij}) | E_{ij} \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle X^2 E_{ij} | E_{ij} \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \operatorname{tr}\left({}^t(X^2 E_{ij}) E_{ij} \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \operatorname{tr}\left({}^t E_{ij} {}^t(X^2) E_{ij} \right) = \sum_{i,j=1}^{n} \operatorname{tr}\left(E_{ji} {}^t(X^2) E_{ij} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} {}^t(X^2)_{ii} = n \operatorname{tr}({}^t(X^2)) = n \operatorname{tr}(X^2).
\end{aligned}$$

- p. 88，配列を変更．

$Z(\mathrm{GL}_n\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^\times$
$Z(\mathrm{GL}_n\mathbf{H}) \cong \mathbb{R}^\times$
$Z(\mathrm{O}(n;\mathbb{K})) \cong \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$
$Z(\mathrm{O}_\nu(n)) \cong \mathbb{Z}_2$
$Z(\mathrm{U}(n)) \cong \mathrm{U}(1)$
$Z(\mathrm{SU}(n)) \cong \mathbb{Z}_n$
$Z(\mathrm{SL}_n\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}_n$
$Z(\mathrm{SL}_{2n+1}\mathbb{R}) \cong \{1\}$
$Z(\mathrm{SL}_{2n}\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}_2 \quad (n \geq 2)$
$Z(\mathrm{Sp}(n)) \cong \mathbb{Z}_2$
$Z(\mathrm{Sp}(n;\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}_2$
$Z(\mathrm{Sp}(n;\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}_2$

線型リー群の中心

- p. 90，下から 2 行目，「各 $\vec{p}_j$ に対応する固有値を λ_j」を「各 $\vec{p}_i$ に対応する固有値を λ_i」に差し替え．
- p. 90，下から 1 行目，「$f(\vec{p}_j) = \lambda_j \vec{p}_j$」を「$f(\vec{p}_i) = \lambda_i \vec{p}_i$」に差し替え．
- p. 91，定義 4.3：最後に次の文を加筆．$\mathbb{V}(\lambda) \subset \mathbb{W}(\lambda)$ であることに注意．
- p. 93，13 行目〜15 行目．「$(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$ をもつ．」この文の後を以下のものに差し替える．「ところが $A^m = O$ は逆行列をもたないから矛盾．」
- p. 95，下から 6 行目，「固有空間の代わりに広義固有空間を使ってみよう」を以下のものに差し替え．「対角化できない行列についてもう少し考察を続けよう．」
- p. 96，1 行目の「を得る．」以降から下から 3 行目までを以下のものに差し替える．
  f の $\mathbb{W}_f(\lambda_j)$ への制限を f_j とする．次に $f_{S_j} : \mathbb{W}_f(\lambda_j) \to \mathbb{W}_f(\lambda_j)$ を

  $$f_{S_j}(\vec{v}) = \lambda_j \vec{v}, \quad \vec{v} \in \mathbb{W}_f(\lambda_j)$$

  で定義しよう．$f - \lambda_j \mathrm{Id}$ を $\mathbb{W}_f(\lambda_r)$ に制限したものを f_{N_j} と書こう．

  $$f_{N_j} = (f - \lambda_j \mathrm{Id})|_{\mathbb{W}_f(\lambda_j)} : \mathbb{W}_f(\lambda_j) \to \mathbb{W}_f(\lambda_j).$$

$\vec{v} \in \mathbb{W}_f(\lambda_j)$ ならばある番号 $\ell > 0$ に対し

$$(f_{N_j})^{\ell}(\vec{v}) = (f - \lambda_j \mathrm{Id})^{\ell}(\vec{v}) = \vec{0}.$$

すなわち f_{N_j} は冪零である（したがって $\ell = m_j$ ととれる）．広義固有空間分解に沿って $\vec{x} \in \mathbb{V}$ を

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_r,\quad \vec{x}_j \in \mathbb{W}_f(\lambda_j)$$

と分解すると

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_r) = f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2) + \cdots + f(\vec{x}_r) \\ &= f_1(\vec{x}_1) + f_2(\vec{x}_2) + \cdots + f_r(\vec{x}_r) \end{aligned}$$

と計算できるが，ここで

$$f_j(\vec{x}_j) = f_{S_j}(\vec{x}_j) + f_{N_j}(\vec{x}_j)$$

と表せることに注意しよう．

そこで

$$f_S(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{r} f_{S_i}(\vec{x}_i),\quad f_N(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{r} f_{N_i}(\vec{x}_i)$$

で $\mathbb{V}$ 上の線型変換 f_S と f_N を定義しよう．f_S は半単純で f_N は冪零であることに注意してほしい．さらに f_S と f_N が可換であることを確かめてほしい．

- p. 98，1 行目，(1) を次のものに差し替える．
  (1) $A = \alpha E + N$ かつ $N^2 = O$ となるとき，α の値および N を求めよ．
- p. 109，　一番下の行の数式：右辺の $\sum_{i=1}^{\ell} \mu_i \alpha_i(X)$ を $\sum_{i=1}^{\ell} \mu_i \alpha_i(H) X$ に訂正．
- p. 114，下から 6 行目から 7 行目：最小値を m とおく．すなわち $m = \min_{\gamma \in \Delta} n_\gamma$ を最大値を m とおく．すなわち $m = \max_{\gamma \in \Delta} n_\gamma$
- p. 132，表：$\pm(\alpha+\beta)$ を $\pm(\alpha-\beta)$，$\pm(2\alpha+\beta)$ を $\pm(2\alpha-\beta)$ に訂正．
- p. 138，3 行目：$\pi/2$ を $90°$，$\pi/3$ を $60°$ に訂正．
- p. 207，コラム：下から 5 行目：“長年の未解決問題であった．”　$\longmapsto$ “この本の第 2 刷の時点でまだ未解決である．”に差し替える．
- p. 207，コラム：下から 5 行目：“長年の未解決問題であった．”以降を削除．
- p. 241，下から 5 行目，4.6 節でで $\longmapsto$ 4.6 節でで
- p. 242，1 行目，B.2 $\longmapsto$ 4.4 節
- p. 246，最後の行：$\mathrm{Sp}(n)$ の像はは $\longmapsto$ $\mathrm{Sp}(n)$ の像は
- p. 266，4 行目：$E_2 = E_{11}$ を $E_2 = -E_{11}$ に訂正．
- p. 267，註 E.1：$\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}3 = -1$ を $\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3 = -1$ に訂正．
- p. 266，【問題 2.13】

$$\begin{aligned} &\sigma(\boldsymbol{i}, \mathbf{0}) = -2\mathsf{A}_1^+,\ \sigma(\boldsymbol{j}, \mathbf{0}) = -2\mathsf{A}_3^+,\ \sigma(\boldsymbol{k}, \mathbf{0}) = -2\mathsf{A}_2^+, \\ &\sigma(\mathbf{0}, \boldsymbol{i}) = -2\mathsf{A}_1^-,\ \sigma(\mathbf{0}, \boldsymbol{j}) = -2\mathsf{A}_3^-,\ \sigma(\mathbf{0}, \boldsymbol{k}) = -2\mathsf{A}_2^-. \end{aligned}$$

を

$$\sigma(\boldsymbol{i},\mathbf{0})=2\mathsf{A}_1^+,\ \sigma(\boldsymbol{j},\mathbf{0})=2\mathsf{A}_2^+,\ \sigma(\boldsymbol{k},\mathbf{0})=2\mathsf{A}_3^+,$$
$$\sigma(\mathbf{0},\boldsymbol{i})=2\mathsf{A}_1^-,\ \sigma(\mathbf{0},\boldsymbol{j})=2\mathsf{A}_2^-,\ \sigma(\mathbf{0},\boldsymbol{k})=2\mathsf{A}_3^-.$$

に修正.

- p. 269,【問題 4.2】以下のものに差し替え.

  (1) $A=\alpha E+N$ とおくと $O=N^2=(A-\alpha E)^2=A^2-2\alpha A+n^2E$. 一方,ハミルトン・ケーリーの公式より $A^2=6A-9E$. これを先ほど求めた式に代入すると $(6-2\alpha)A+(\alpha^2-9)E=O$, すなわち

$$(6-2\alpha)\begin{pmatrix}4 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}+(\alpha^2-9)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

  これより $\alpha=3$. $N=A-3E=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

  (2) $S=3E$ とおくと明らかに $SN=NS$. (1) で求めた分解は A のジョルダン分解である. $N^2=O$ であるから

$$\begin{aligned}A^{40}&=(S+N)^{40}=\sum_{k=0}^{40}{}_{40}\mathrm{C}_kS^{40-k}N^k={}_{40}\mathrm{C}_0S^{40}N^0+{}_{40}\mathrm{C}_1S^{39}N^1\\&=3^{40}E+40\times3^{39}N\end{aligned}$$

  と計算して

$$N=\begin{pmatrix}43\times3^{39} & -40\times3^{39}\\ 40\times3^{39} & -37\times3^{39}\end{pmatrix}.$$

  原題では α でなく n を用いていたことを付記しておく. □

- p. 275, 西山亨 $\longmapsto$ 西山享

加筆や補足

- p. 49, 命題 2.2:主張を次のように訂正することを述べた.

  > A, $B\in\mathfrak{gl}_n\mathbb{K}$ に対し $B={}^tPAP$ と表せる $P\in\mathrm{GL}_n\mathbb{K}$ が存在すれば $\mathfrak{g}(A;\mathbb{K})$ と $\mathfrak{g}(B;\mathbb{K})$ はリー環として同型である.

  この主張の逆は成立しない. 反例を挙げる(落合啓之先生による):

  $n=1$ のとき:$\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $A=1$, $B=-1$ とすると $\mathfrak{g}(A;\mathbb{K})=\mathfrak{g}(B;\mathbb{K})=\mathbb{K}$ だが $B={}^tPAP$ となる $P\in\mathrm{GL}_1\mathbb{R}=\mathbb{R}^\times$ は存在しない.

  $n=2$ のとき:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

  とすると $\mathfrak{g}(A;\mathbb{K})=\mathfrak{g}(B;\mathbb{K})$ だが $B={}^tPAP$ となる $P\in\mathrm{GL}_n\mathbb{K}$ は存在しない.

- p. 55，研究課題を追加．
  有限次元 $\mathbb{K}$ リー環 $\mathfrak{g}$ に対し，
  $$\mathfrak{g}_0=\{0\},\quad \mathfrak{g}_k=\{X\in\mathfrak{g}\,|\,[\mathbb{K}X,\mathfrak{g}]\subset\mathfrak{g}_{k-1}\},\quad k\geq 1$$
  で定まる $\{\mathfrak{g}_k\}_{k=0}^{\infty}$ を $\mathfrak{g}$ の**昇中心列** (ascending central series) という[*1]．$\mathfrak{g}_1=\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ に注意．
  以下のことを確かめよ．
  (1) $\mathfrak{g}$ が k 次可解 $(k\geq 1)$ $\iff$ $i\geqq k$ であるすべての i に対し $\mathfrak{g}_i=\mathfrak{g}$ であり，k はこの条件をみたす自然数で最小のもの．
  (2) $\mathfrak{g}$ が冪零 $\iff$ $s\geq 1$ が存在し，$\mathfrak{g}_i=\mathfrak{g}$ がすべての $i\geqq s$ に対し成り立つ．そのような s の最小値を k とすれば $\mathfrak{g}$ は k 次冪零である．
- p. 114，命題 4.9：(2) の別証明を与える．
  $X\in\mathfrak{g}_\alpha$, $Y\in\mathfrak{g}_\beta$ とする．$\alpha+\beta\neq 0$ より $(\alpha+\beta)(Z)\neq 0$ となる $Z\in\mathfrak{h}$ が存在する．すると
  $$\begin{aligned}\alpha(Z)B(X,Y)=&B(\alpha(Z)X,Y)=B(\mathrm{ad}(Z)X,Y)\\=&B([Z,X],Y)=-B([X,Z],Y)\\=&-B(X,\beta(Z)Y)=-\beta(Z)B(X,Y)\end{aligned}$$
  より
  $$(\alpha+\beta)(Z)B(X,Y)=0$$
  を得る．$(\alpha+\beta)(Z)\neq 0$ より $B(X,Y)=0$.
  この命題より，$\alpha\in\Delta$ と $X\in\mathfrak{g}_\alpha$ に対し $\mathrm{ad}(X)$ は $\mathfrak{g}$ 上の冪零線型変換であることがわかる．
- p. 121，命題 4.10：証明の最後の 2 行を以下のように加筆修正する．
  $\rho(H_{\alpha_1}),\rho(H_{\alpha_2}),\ldots,\rho(H_{\alpha_\ell})$ は互いに可換なので同時対角化可能である（命題 4.5）．$\{H_{\alpha_1},H_{\alpha_2},\ldots,H_{\alpha_\ell}\}$ は $\mathfrak{h}$ の基底であるから，$\rho(H)$ は $\{\rho(H_{\alpha_1}),\rho(H_{\alpha_2}),\ldots,\rho(H_{\alpha_\ell})\}$ の線型結合である．したがって $\rho(H)$ は対角化可能である．
- p. 125，下から 7 行目：
  ところで $\{H_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ は $\mathbb{C}$ 上で $\mathfrak{h}$ を張ることを思い出そう．
  定理 4.9 と H_α の定義より $\{H_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ は $\mathbb{C}$ 上で $\mathfrak{h}$ を張る．
- p. 268 に問題 3.4 の略解を加筆する．
  $\mathfrak{o}(n;\mathbb{K})$ のキリング形式を計算しよう．$\mathfrak{gl}_n\mathbb{K}$ の場合は 3 つの線型変換 $Z\longmapsto X^2Z$，$Z\longmapsto XZX$，$Z\longmapsto ZX^2$ の固有和を計算したが，$\mathfrak{o}(n;\mathbb{K})$ の場合は少し注意が必要である．まず X^2 は ${}^t(X^2)=X^2$ をみたす．次に
  $${}^t(XZX)={}^tX\,{}^tZ\,{}^tX=(-X)(-Z)(-X)=-XZX$$

[*1] Adela. Latorre, L. Ugarte, R. Villacampa, The ascending central series of nilpotent Lie algebras with complex structure, Trans. Amer. Math. Soc. **372** (2019), 3867–3903.

なので XZX は $\mathfrak{o}(n;\mathbb{K})$ の元である．X^2Z と ZX^2 は単独では $\mathfrak{o}(n;\mathbb{K})$ の元ではない．両者を加えると

$$
{}^t(X^2Z+ZX^2) = {}^tZ{}^t(X^2) + {}^t(X^2)\,{}^tZ = -ZX^2 - X^2Z = -(X^2Z+ZX^2)
$$

であるから $\mathfrak{o}(n;\mathbb{K})$ の元である．したがって $\mathfrak{o}(n;\mathbb{K})$ のキリング形式を計算するには

$$
f_1(Z) = X^2Z + ZX^2, \quad f_2(Z) = XZX
$$

の固有和を求めることになる．試しに $\mathfrak{o}(3;\mathbb{K})$ のキリング形式を計算してみよう．（一般の次数のときのヒントを掴むため）ここでは $\mathfrak{o}(3;\mathbb{K})$ の基底として

$$
\{e_1 = E_{12} - E_{21}, e_2 = E_{13} - E_{31}, e_3 = E_{23} - E_{32}\}
$$

を選ぶ．$X = (x_{ij}) \in \mathfrak{o}(3;\mathbb{K})$ に対し

$$
X^2 = \begin{pmatrix} -(x_{12})^2 - (x_{13})^2 & -x_{13}x_{23} & x_{12}x_{23} \\ -x_{13}x_{23} & -(x_{12})^2 - (x_{23})^2 & -x_{12}x_{13} \\ x_{12}x_{23} & -x_{12}x_{13} & -(x_{13})^2 - (x_{23})^2 \end{pmatrix}
$$

である．これを使って計算すると

$$
\begin{aligned}
f_1(e_1) =& X^2e_1 + e_1X^2 = -\{2(x_{12})^2 + (x_{13})^2 + (x_{23})^2\}e_1 - x_{12}x_{13}e_2 - x_{12}x_{23}e_3, \\
f_1(e_2) =& -x_{12}x_{13}e_1 - \{(x_{12})^2 + 2(x_{13})^2 + (x_{23})^2\}e_2 - x_{13}x_{23}e_3, \\
f_1(e_3) =& -x_{12}x_{23}e_1 - x_{13}x_{23}e_2 - \{(x_{12})^2 + (x_{13})^2 + 2(x_{23})^2\}e_3
\end{aligned}
$$

より

$$
\mathrm{tr}\, f_1 = -4\{(x_{12})^2 + (x_{13})^2 + (x_{23})^2\} = 2\,\mathrm{tr}\,(X^2).
$$

一方，

$$
\begin{aligned}
f_2(e_1) =& -(x_{12})^2e_1 - x_{12}x_{13}e_2 - x_{12}x_{23}e_3, \\
f_2(e_2) =& -x_{12}x_{23}e_1 - (x_{13})^2e_2 - x_{13}x_{23}e_3, \\
f_2(e_3) =& -x_{12}x_{23}e_1 - x_{13}x_{23}e_2 - (x_{23})^2e_3
\end{aligned}
$$

より

$$
\mathrm{tr}\, f_2 = -\{(x_{12})^2 + (x_{13})^2 + (x_{23})^2\} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(X^2).
$$

以上より

$$
B(X,X) = 2\,\mathrm{tr}\,(X^2) - 2\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(X^2) = \mathrm{tr}(X^2).
$$

これから

$$
B(X,Y) = \mathrm{tr}(XY).
$$

が得られる．

一般の次数の場合を調べよう．この場合は基底として

$$\{E_{12}-E_{21}, E_{13}-E_{31}, \ldots, E_{1n}-E_{n1}, E_{23}-E_{32}, \ldots, E_{n-1\,n}-E_{n\,n-1}\}$$

を選ぶ．

$$\begin{aligned}
f_1(E_{ij}-E_{ji}) &= \sum_{l=1}^{n}(X^2)_{li}(E_{lj}-E_{jl}) + \sum_{l=1}^{n}(X^2)_{jl}(E_{il}-E_{li}), \\
f_2(E_{ij}-E_{ji}) &= \sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} x_{il}x_{jm}(E_{ml}-E_{lm})
\end{aligned}$$

と計算されるから $f_1(E_{ij}-E_{ji})$ の $E_{ij}-E_{ji}$ の係数は

$$(X^2)_{ii} + (X^2)_{jj}$$

であるから，これらの総和を $i<j$ の範囲で足し合わせればよい．$E_{1j}-E_{j1}$ という番号が付いているものは $E_{12}-E_{21}$ から $E_{1n}-E_{n1}$ の $(n-1)$ 個であることに気づけば次のように計算できることがわかる．

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\, f_1 =& \{(X^2)_{11}+(X^2)_{22}\} + \{(X^2)_{11}+(X^2)_{33}\} + \cdots + \{(X^2)_{n-1\,n-1}+(X^2)_{nn}\} \\
=& (n-1)\sum_{i=1}^{n}(X^2)_{ii} = (n-1)\mathrm{tr}(X^2).
\end{aligned}$$

一方，$f_2(E_{ij}-E_{ji})$ の $E_{ij}-E_{ji}$ の係数は $x_{ij}x_{ji}$ であるから，$x_{ii}=0$ に注意すると

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\, f_2 =& \sum_{i<j}(x_{ij}x_{ji}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i<j}(x_{ij}x_{ji}) + \sum_{i<j}(x_{ij}x_{ji})\right) \\
=& \frac{1}{2}\left(\sum_{i<j}(x_{ij}x_{ji}) + \sum_{j<i}(x_{ji}x_{ij})\right) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}x_{ji} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}x_{ji}\right) \\
=& \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X^2)_{ii} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(X^2).
\end{aligned}$$

したがって

$$B(X,X) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)^2\,) = \mathrm{tr}\, f_1 - 2\,\mathrm{tr}\, f_2 = (n-2)\mathrm{tr}(X^2).$$

以上より

$$B(X,Y) = (n-2)\mathrm{tr}(XY).$$

$n=2$ のときは $\mathrm{ad}=0$ だから，この等式は $n=2$ のときも正しい．

誤植のご指摘や改善のご提案をくださった桂法称先生（東京大学）と落合啓之先生（九州大学）に御礼申し上げます．